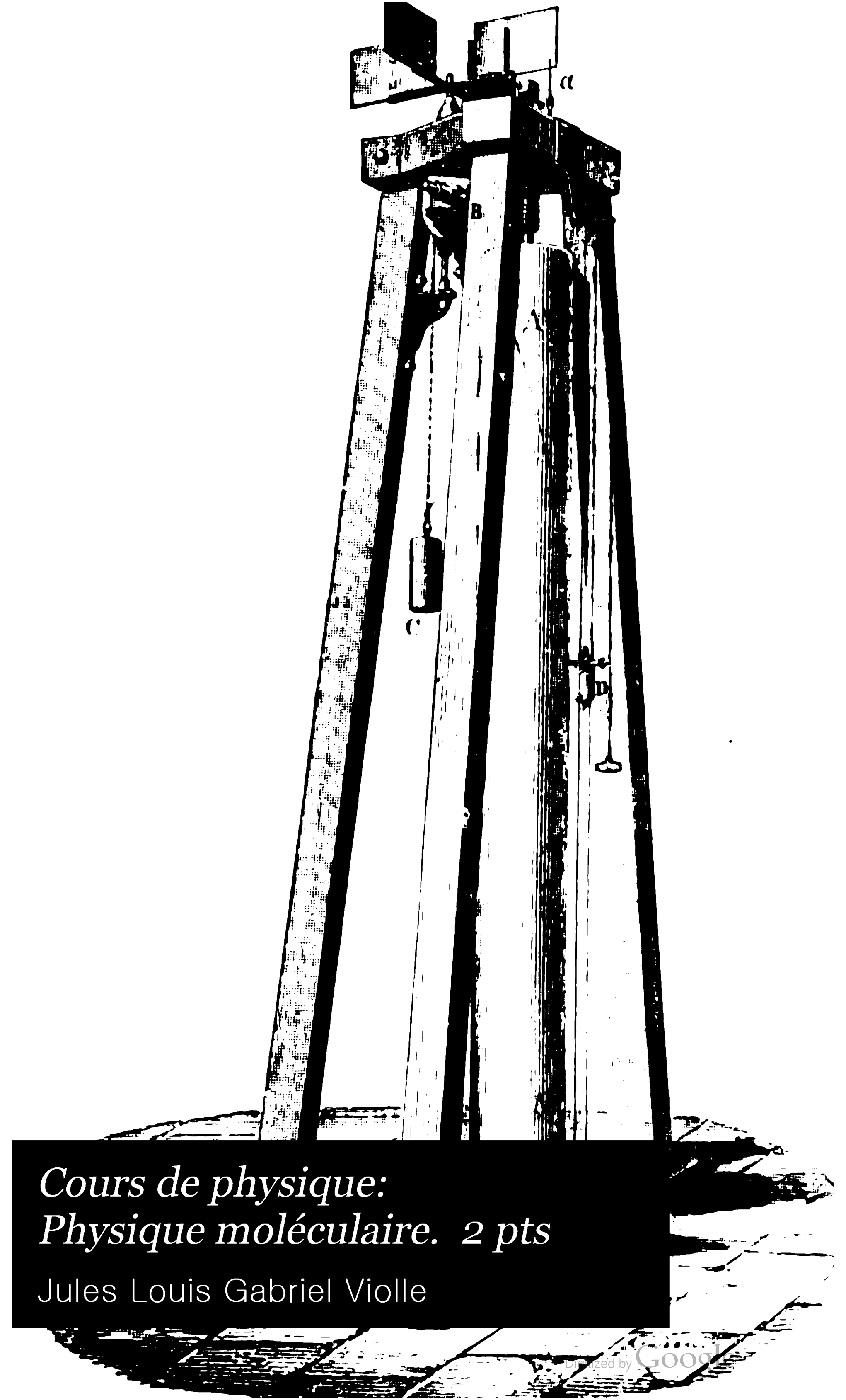
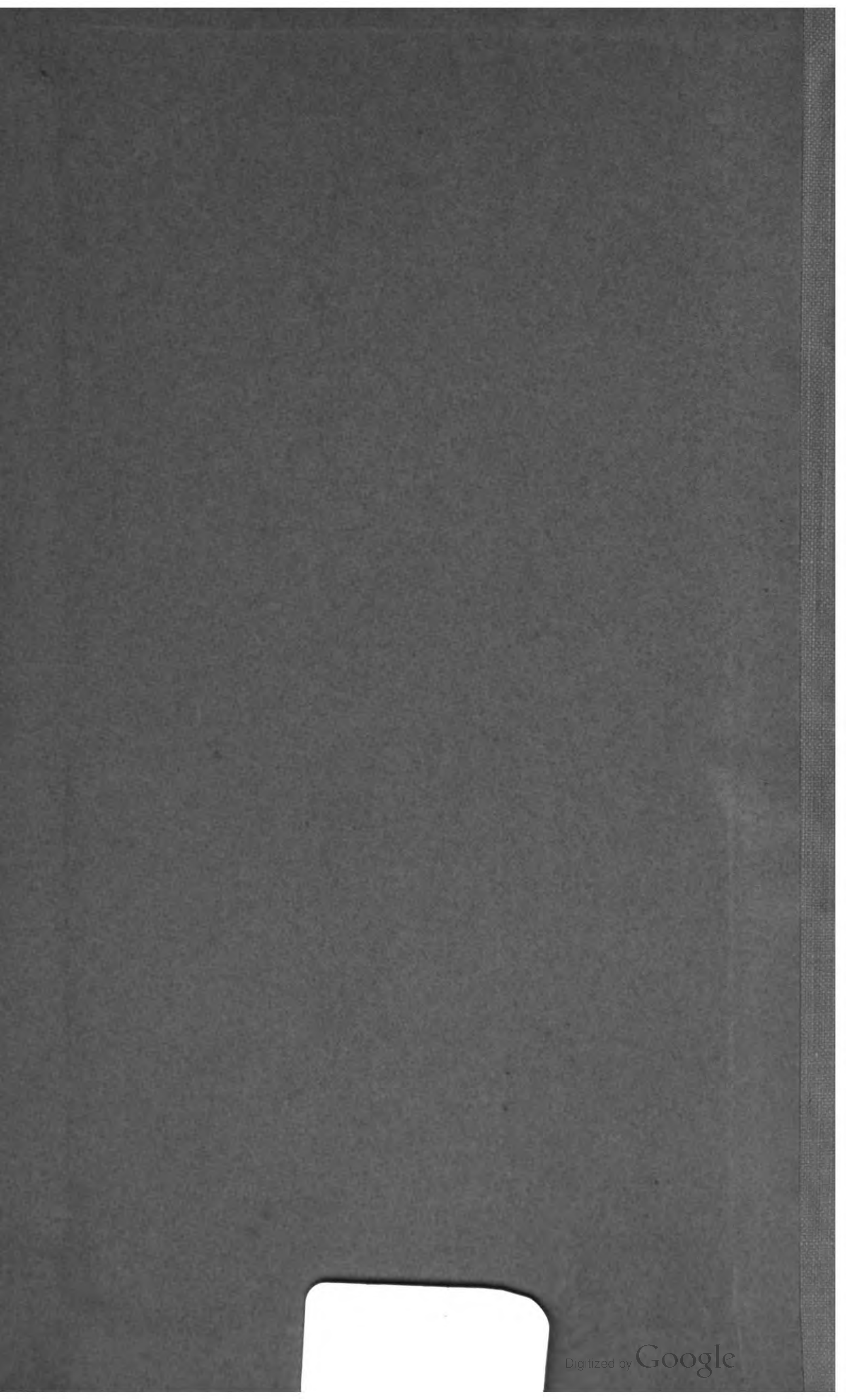


Cours de physique: Physique moléculaire. 2 pts

Jules Louis Gabriel Violle







COURS

DE

PHYSIQUE

4814-82. — Corbeil. Typ. et Stér. Crété.

COURS

DE

PHYSIQUE

PAR

J. VIOLLE

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LYON

TOME I

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE

PREMIÈRE PARTIE

Avec 257 figures dans le texte.

PARIS

G. MASSON, ÉDITEUR

LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, Boulevard Saint-Germain, en face de l'École de Médecine

M DCCC LXXXIII


NEW YORK

AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR

Nous publions aujourd'hui la première partie du tome I d'un Cours de physique en quatre volumes. Dans ce tome I seront exposées les propriétés générales des corps et celles d'où dépendent les phénomènes compris souvent sous le nom de physique moléculaire. Les volumes suivants traiteront de l'acoustique et de l'optique, de la chaleur, de l'électricité et du magnétisme.

La deuxième partie du tome I paraîtra le 15 octobre prochain : elle contiendra l'étude des liquides et des gaz, ainsi que la préface et la table complète des matières du volume.

Paris, 20 mai 1883.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME I

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE

PRÉLIMINAIRES

LIVRE I

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA MATIÈRE

CHAPITRE I

MÉCANIQUE

I. — CINÉMATIQUE.

II. — STATIQUE.

III. — DYNAMIQUE.

A. — DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL.

B. — DYNAMIQUE DES SYSTÈMES.

IV. — UNITÉS ABSOLUES. SYSTÈME C.G.S.

CHAPITRE II

PESANTEUR

I. — CHUTE DES CORPS.

II. — PENDULE.

III. — BALANCE.

IV. — ATTRACTION UNIVERSELLE.

CHAPITRE III

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

I. — IMPÉNÉTRABILITÉ.

II. — ÉTENDUE. INSTRUMENTS DE MESURE.

1° VERNIER.

2° VIS MICROMÉTRIQUE.

3° LEVIER A RÉFLEXION.

III. — COMPRESSIBILITÉ. DIVISIBILITÉ. CONSTITUTION DE LA MATIÈRE.

LIVRE II

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES SOLIDES

CHAPITRE I

STRUCTURE

CHAPITRE II

ÉLASTICITÉ

I. — THÉORIE.

A. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

B. — FORCES ÉLASTIQUES RÉSULTANT DE LA DÉFORMATION.

C. — APPLICATION DES FORMULES A QUELQUES CAS SIMPLES.

II. — EXPÉRIENCES.

A. — TRACTION.

B. — TORSION.

C. — FLEXION.

D. — FROTTEMENT INTÉRIEUR.

CHAPITRE III

DÉFORMABILITÉ. SOLIDITÉ

I. — DÉFORMABILITÉ.

II. — SOLIDITÉ.

CHAPITRE IV

DIVISIBILITÉ

CHAPITRE V

ADHÉRENCE. FROTTEMENT

I. — ADHÉRENCE.

II. — FROTTEMENT.

A. — FROTTEMENT DE GLISSEMENT.

B. — FROTTEMENT DE ROULEMENT.

C. — FREINS DYNAMOMÉTRIQUES.

CHAPITRE VI

CHOC DES CORPS

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME I.

COURS DE PHYSIQUE

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE

PRÉLIMINAIRES

1. Objet de la Physique. — La physique (φύσις, nature) embrassait autrefois l'étude de la nature entière. Aujourd'hui elle se borne à étudier les propriétés générales de la matière et les phénomènes qui, n'altérant pas la constitution intime des corps, apparaissent plus directement comme les manifestations de causes universelles. Elle a donc abandonné l'histoire des êtres organisés; et, dans le monde inorganique, elle laisse de côté les phénomènes célestes, ainsi que la classification des corps bruts et la connaissance de celles de leurs propriétés qui entraînent en eux des modifications permanentes. Mais si la physique a dû forcément restreindre son domaine, elle y a gagné en profondeur. Poursuivant avec un égal succès la détermination des grandes lois et la découverte des applications les plus utiles, elle est restée, par ses progrès et par son objet, au premier rang des sciences qui s'occupent des choses de la nature.

2. Méthode. — Une science se caractérise non seulement par son objet mais encore par sa méthode. En physique, comme dans toute autre science, le point de départ de l'invention est une idée

a priori. Seulement, cette conception première de l'esprit n'a rien ici d'immuable ni d'absolu. C'est un principe essentiellement relatif et provisoire dont les conséquences doivent être l'une après l'autre soumises au contrôle de l'expérimentation, seule capable de donner *a posteriori* la certitude qui manque : c'est pourquoi l'on a appelé aussi la méthode expérimentale méthode *a posteriori*. Ainsi, partir d'un postulat, d'une idée première, suggérée par l'observation attentive d'un phénomène, raisonner, expérimenter, *mesurer* surtout, redresser à chaque instant d'après l'expérience l'idée provisoirement admise, telle est la marche de l'invention dans les sciences physiques, comme le montre l'histoire de chaque théorie.

3. Comparaison des observations. — Lorsque sur un phénomène donné on a relevé un certain nombre d'observations ou exécuté un certain nombre d'expériences, lorsqu'en un mot on a effectué un certain nombre de mesures, la mise en œuvre de ces matériaux exige d'abord un travail de comparaison dégageant de toutes ces données, nécessairement fautives, des nombres plus probablement exacts.

Les erreurs commises sont de deux sortes : erreurs systématiques et erreurs fortuites.

4. Erreurs systématiques, erreurs fortuites. — Les erreurs systématiques, dues à des défauts constants de l'instrument de mesure, se reproduisent identiques dans les mêmes conditions et varient avec les circonstances suivant des lois déterminées.

Les erreurs fortuites, résultant de causes absolument accidentelles, n'obéissent individuellement à aucune loi, se présentent indifféremment positives ou négatives, et se succèdent avec une entière indépendance. Le type des erreurs fortuites est l'écart d'une balle envoyée sur une cible par un tireur exercé avec une arme sans défaut. Cet écart, qui n'a pas d'autre cause que l'imperfection de nos sens, est *chaque fois* absolument indéterminé, bien que ne pouvant dépasser certaine limite assignable et bien que sur une longue série d'écarts les plus petits soient de beaucoup les plus nombreux; il est indifféremment à droite ou à gauche, en haut ou en bas

sans aucune prédilection. Cette indifférence complète pour une direction quelconque est si bien le caractère évident de ce genre d'erreurs que si les balles se portaient de préférence à droite par exemple, on en conclurait immédiatement à un défaut de l'arme, produisant cette erreur systématique.

L'observateur doit avant tout chercher à s'affranchir des erreurs systématiques, soit en supprimant, toutes les fois qu'il le pourra, les défauts qui les occasionnent, soit en évaluant exactement ces erreurs; et cela sera toujours possible, sinon facile, puisqu'il s'agit ici d'effets de causes constantes, auxquels on appliquera les méthodes ordinaires de la physique. C'est une étude spéciale à faire dans chaque cas particulier.

Mais lorsque l'on aura ainsi procédé à cette élimination indispensable des erreurs systématiques, il restera les erreurs fortuites ou erreurs inévitables dont il faut tâcher de réduire autant que possible l'influence.

5. Détermination d'une seule inconnue mesurée directement. — *Moyenne arithmétique.* — Prenons d'abord le cas le plus simple, celui où l'on a effectué directement la mesure de la quantité cherchée.

On avait, par exemple, à mesurer une longueur; on a répété m fois la mesure et l'on a obtenu ainsi m valeurs approchées

$$a,\ a',\ a'',\ \cdots$$

respectivement égales à

$$x+\varepsilon,\ x+\varepsilon',\ x+\varepsilon'',\ \cdots$$

x étant la valeur exacte inconnue et ε, ε', ε'',... les erreurs fortuites des diverses mesures. Mais, d'une part, les petites erreurs sont de beaucoup les plus nombreuses, d'autre part, les erreurs n'affectent de préférence aucun signe ; si donc on prend la *moyenne* des mesures

$$A=\frac{a+a'+a''+\cdots}{m},$$

les petites erreurs se compenseront réciproquement et si, par

hasard, il reste quelque grosse erreur qui ne soit pas détruite, elle sera du moins divisée par m; de sorte que la moyenne sera nécessairement très voisine de x. On peut ajouter que c'est la valeur la plus probable de x.

Erreur moyenne des mesures. — Les différences

$$a-A,\quad a'-A,\quad a''-A,\quad \cdots$$

seront, par suite, elles-mêmes à très peu près égales à

$$\varepsilon,\quad \varepsilon',\quad \varepsilon'',\quad \cdots$$

Soient

$$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_1',\quad \varepsilon_1'',\quad \cdots$$

ces différences immédiatement calculables. Leur somme est identiquement égale à zéro, et par conséquent leur moyenne, exactement nulle, ne peut servir à mesurer l'erreur moyenne. Aussi définit-on l'erreur moyenne non pas la moyenne des erreurs, mais la racine carrée du moyen carré des erreurs. On fait donc les carrés des erreurs,

$$\varepsilon_1^2,\quad \varepsilon_1'^2,\quad \varepsilon_1''^2,\quad \cdots,$$

on ajoute ces carrés et on divise la somme par m; on a ainsi le moyen carré des erreurs

$$\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_1'^2+\varepsilon_1''^2+\cdots}{m}$$

et la racine carrée de ce moyen carré représente ce que l'on appelle l'*erreur moyenne* des observations ou l'*erreur à craindre* sur les observations.

$$E=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_1^2+\varepsilon_1'^2+\varepsilon_1''^2+\varepsilon_1'''^2+\cdots}{m}}.$$

On remarquera que la somme

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_1'^2+\varepsilon_1''^2+\cdots$$

est minimum d'après l'identité

$$\varepsilon_1+\varepsilon_1'+\varepsilon_1''+\cdots=0,$$

$\varepsilon_1+\varepsilon'_1+\varepsilon''_1+\cdots$ représentant, à un facteur constant près, la dérivée de la somme considérée. Ainsi, la valeur la plus probable rend minimum la somme des carrés de ses différences avec les mesures obtenues directement. Nous verrons plus loin que cette règle est générale.

Erreur moyenne du résultat. — Quelle est l'erreur à craindre sur la moyenne A elle-même?

$$A=\frac{a}{m}+\frac{a'}{m}+\frac{a''}{m}+\cdots$$

L'erreur moyenne des divers termes de cette somme est $\frac{E}{m}$. L'erreur moyenne de la somme, racine carrée de la somme des carrés de ces erreurs individuelles (12), sera donc

$$E=\pm\sqrt{\left(\frac{E}{m}\right)^2+\left(\frac{E}{m}\right)^2+\left(\frac{E}{m}\right)^2+\cdots}=\pm\sqrt{m\left(\frac{E}{m}\right)^2}.$$

ou

$$E=\frac{E}{\sqrt{m}}.$$

Cette erreur est en raison inverse de $\sqrt{m}$; en d'autres termes, *la précision des mesures croît* non pas comme le nombre, mais seulement *comme la racine carrée du nombre des observations*.

Poids. — Gauss appelle *poids* « une quantité réciproque au carré de l'erreur moyenne ».

Considérons le cas où chaque mesure est la moyenne d'un certain nombre d'observations directes, également valables : m observations ont fourni une mesure A, n observations une mesure B ; la valeur la plus probable est la moyenne de toutes ces observations $\frac{mA+nB}{m+n}$. Or m et n sont évidemment ici les poids respectifs des deux mesures A et B, les poids de diverses mesures étant nécessairement proportionnels aux nombres d'observations de même valeur qui les ont fournies. Mais les erreurs moyennes de ces mesures sont inversement proportionnelles aux racines carrées des nombres d'observations. On est ainsi amené à la définition de Gauss.

Le poids P de la moyenne est la somme des poids $p, p', p'', \cdots$ des diverses mesures

$$P = p + p' + p'' + \cdots,$$

théorème analogue au principe de statique en vertu duquel la résultante des actions de la pesanteur sur divers corps est égale à la somme de ces actions.

6. Loi des erreurs fortuites (¹). — Avant de passer au cas plus compliqué mais plus général où les mesures donnent non plus directement la quantité à mesurer, mais une fonction de la quantité ou des quantités à déterminer, il est nécessaire d'établir une propriété importante des erreurs fortuites.

S'il est vrai que chacune de ces erreurs, considérée isolément, se présente absolument au hasard, il n'est pas moins incontestable que, sur toute série un peu longue, une loi se dessine nettement, commandant les grandeurs des erreurs, abstraction faite de l'ordre dans lequel elles se sont succédé.

Reprenons par exemple le cas d'un tireur exercé envoyant des balles dans une cible. Après un nombre un peu considérable de coups, relevons les positions de toutes ces balles relativement à la verticale du point de mire : nous trouverons une série d'écarts tels que ceux-ci qui ont été réellement observés sur une cible visée avec un pistolet de cavalerie à 50 mètres de distance (²).

+ 5cm	+ 5cm	+ 5cm	− 31cm	+ 8cm	+ 14cm	+ 45cm	+ 8cm	0cm	− 23
− 5	+ 10	+ 29	+ 25	+ 22	+ 27	+ 10	+ 56	− 3	− 26
− 29	+ 13	+ 40	0	− 15	− 13	− 9	+ 8	− 31	+ 9
− 7	− 22	− 7	+ 7	− 10	+ 28	+ 7	− 2	− 12	+ 19
− 4	− 23	+ 13	− 27	+ 2	+ 28	− 10	− 37	7	+ 3[illegible]
+ 11	+ 1	0	− 17	− 23	+ 5	0	− 2	− 23	− [illegible]
+ 6	+ 18	− 4	+ 10	+ 4	+ 28	− 2	+ 2	+ 37	+ 1[illegible]
− 6	+ 3	− 3	− 2	− 14	0	+ 7	− 19	− 18	− 1[illegible]
+ 24	− 3	− 27	− 11	− 12	+ 21	− 41	+ 9	− 1	+ 1[illegible]
− 17	+ 25	− 20	− 12	+ 16	− 1	− 14	− 2	0	− [illegible]

(¹) Voir FAYE, *Cours d'astronomie nautique*; Paris, Gauthier-Villars, 1880, p. 165

(²) DIDION, *Calcul des probabilités appliqué au tir des projectiles*; Paris, Dumaine, 1858, p. 87.

Sur ces 100 écarts, il y a 46 erreurs positives, 48 négatives et 6 nulles. La moyenne arithmétique est

$$A = +\,0^{cm},77,$$

bien voisine, on le voit, de la réalité ; l'erreur moyenne des différents coups

$$E = \pm\,18^{cm},5.$$

Rangeons ces écarts par ordre de grandeur, abstraction faite des signes ; nous trouvons

entre	0^{cm}	et 5^{cm}	24	écarts	positifs ou	négatifs
»	5	» 10	20		»	»
»	10	» 15	18		»	»
»	15	» 21	11		»	»
»	21	» 26	10		»	»
»	26	» 31	8		»	»
»	31	» 38	5		»	»
»	38	» 45	3		»	»
De	56	....	1		»	»

Traduisons ces résultats graphiquement. Traçons deux axes coordonnés et sur l'axe des x prenons des abscisses respectivement égales aux écarts 5, 10, 15..... La probabilité d'un écart déterminé x ou plutôt la probabilité que l'écart tombe entre x et $x + dx$ est nécessairement infiniment petite. La probabilité que l'écart tombe entre certaines limites n'est finie que si les limites diffèrent elles-mêmes d'une quantité finie. Nous ne prendrons donc pas pour ordonnée la probabilité d'un écart déterminé : mais, sur chaque fragment fini de l'axe des x, 0 — 5, 5 — 10, 10 — 15, ... comme base, nous construirons un rectangle dont l'aire soit égale au nombre des écarts positifs

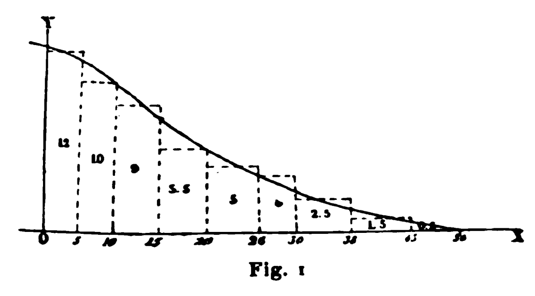


Fig. 1

observés entre 0 et 5, entre 5 et 10, entre 10 et 15, etc. Le rappo de chacune de ces aires rectangulaires à l'aire totale ainsi obten représentera la probabilité d'un écart compris entre les valeu relatives aux deux extrémités de la base. Traçant ensuite un tra continu qui laisse en dehors de petites aires triangulaires équiva lentes à celles qui se trouvent en dedans, nous aurons la *courbe de erreurs* de l'expérience considérée, c'est-à-dire une courbe telle qu la probabilité P d'une erreur comprise entre les limites x et $x + \Delta x$ est représentée par le rapport de l'aire de la portion comprise entr les ordonnées correspondantes à l'aire totale de la courbe.

Nous avons tracé ici seulement la branche de droite, mais il y a aussi une branche de gauche symétrique, et dans son ensemble la courbe est représentée très fidèlement par l'équation

$$y = 11,31\, e^{-(0,0369)^2 x^2}.$$

Si en effet nous déterminons, à l'aide de cette équation, la probabilité

$$P = \frac{\int_x^{x+\Delta x} y\,dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} y\,dx}$$

d'une erreur comprise entre les limites x et $x + \Delta x$ et que nous effectuions le calcul numérique (comme nous l'indiquerons plus loin) pour les divers intervalles 0 — 5, 5 — 10, 10 — 15,... nous trouvons les résultats suivants à côté desquels on a remis les nombres réellement observés.

Nombre des coups.

Entre	D'après la formule.	D'après l'observation.
0cm et 5cm	21,5	24
5 » 10	20,1	20
10 » 15	17,0	18
15 » 21	16,2	11
21 » 26	9,7	10
26 » 31	6,5	8
31 » 40	6,1	5
40 » 45	1,5	3
45 » 56	1,2	1
Au-dessus de 56	0,2	0

Ainsi, quoique le nombre des coups tirés n'ait pas été très considérable, l'accord entre la formule et l'observation est déjà assez intime pour ne laisser aucun doute sur l'exactitude de la loi des écarts.

Considérons maintenant un autre genre de faits qui nous intéressent de beaucoup plus près, une série de mesures répétées par un observateur habile; et, pour avoir encore des données à l'abri de toute critique, nous choisirons une série de 470 observations faites par Bradley, « le modèle des observateurs », suivant l'expression de Laplace, en vue de déterminer la différence d'ascension droite entre le Soleil et Ataïr ou Procyon. Bessel, qui a réduit avec beaucoup de soin ces observations, en a pris la moyenne et, en retranchant cette moyenne de chacune des observations, il a déterminé les écarts ε_1, ε'_1, ε''_1..... à l'aide desquels il a pu calculer l'erreur moyenne E qu'il a trouvée égale à $\pm 0^s,391$. L'erreur à craindre sur la moyenne E est par suite $\pm 0^s,017$; cette moyenne est donc très près de la vérité, et on peut considérer les écarts ε_1, ε'_1, ε''_1..... comme représentant les erreurs ε, ε', ε''..... commises réellement dans chaque mesure. Or, si l'on dresse le tableau de ces erreurs par ordre de grandeur, on trouve que les 470 erreurs se répartissent ainsi :

entre	$0^s,0$	et	$0^s,1$..........	94	erreurs positives	ou négatives
»	0,1	»	0,2..........	88	»	»
»	0,2	»	0,3..........	78	»	»
»	0,3	»	0,4..........	58	»	»
»	0,4	»	0,5..........	51	»	»
»	0,5	»	0,6..........	36	»	»
»	0,6	»	0,7..........	26	»	»
»	0,7	»	0,8..........	14	»	»
»	0,8	»	0,9..........	10	»	»
»	0,9	»	1,0..........	7	»	»
Au-dessus		de	1,0..........	8	»	»

Si d'après ces données on trace la courbe des erreurs, on reconnaît qu'elle est représentée de très près par une équation toute

semblable à celle qui nous a servi à exprimer la courbe des erreu de tir,

$$y = 47,365\, e^{-(1,764)^2 x^2}.$$

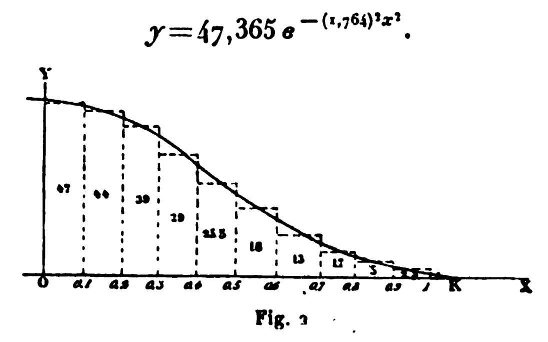


Fig. 2

Si l'on calcule, en effet, le nombre des erreurs correspondant chaque intervalle d'après cette équation, on trouve

Nombre des erreurs.

Entre	D'après la formule.	D'après l'observation.
0^m,0 et 0^m,1	95	94
0,1 » 0,2	89	88
0,2 » 0,3	78	78
0,3 » 0,4	64	58
0,4 » 0,5	50	51
0,5 » 0,6	36	36
0,6 » 0,7	24	26
0,7 » 0,8	15	14
0,8 » 0,9	9	10
0,9 » 1,0	5	7
1,0 » ∞	5	8

La loi est donc la même ; et l'on retrouvera le même résultat dans toute observation où n'interviennent que des causes purement accidentelles.

La statistique en offre de nombreux exemples. C'est ainsi que la taille humaine présente, de part et d'autre de la moyenne, des écarts suivant la loi des erreurs fortuites, ainsi qu'on l'a bien reconnu en Amérique, lors de la guerre de Sécession, en dressant le tableau des nombres d'hommes atteignant chaque taille. Voici ce tableau, dû à M. Gould :

Nombre des hommes sur 10 000.

Atteignant la taille.	D'après la formule.	D'après l'observation.
61 pouces	105	100
62	169	171
63	369	368
64	686	675
65	1044	1051
66	1391	1399
67	1584	1584
68	1607	1531
69	1218	1260
70	852	884
71	467	531
72	277	267
73	139	118
74	92	61
..	...	...

La nature semble donc chercher à réaliser aux États-Unis la taille de $67^{po},24$, mais elle en est plus ou moins éloignée dans chaque cas particulier par un ensemble de causes purement accidentelles.

Dans tout système de mesures ou d'observations où n'intervient aucune erreur systématique, la loi des erreurs fortuites est la même et représentée par

$$y = a e^{-h^2 x^2},$$

a et h étant des paramètres à déterminer dans chaque cas particulier.

Les exemples que nous avons cités établissent empiriquement cette loi d'une manière incontestable. La théorie confirme cette conclusion. On reconnaît facilement, en effet, que la répartition des erreurs d'observation est liée à la règle du binôme de Newton, leurs possibilités relatives étant représentées par les coefficients de son développement : la loi des erreurs en résulte immédiatement (1). Laplace l'a déterminée le premier (2).

(1) Voir Liagre, *Calcul des probabilités et théorie des erreurs*; Bruxelles, 1852, p. 60.

(2) Laplace, *Théorie analytique des probabilités*; Paris, 1812.

Ainsi, la théorie et l'observation s'accordent à prouver que l courbe des erreurs est

$$y = a e^{-h^2 x^2},$$

ou, en d'autres termes, que la probabilité P qu'une erreur soit com prise entre o et l est

$$P = \frac{\int_0^l a e^{-h^2 x^2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-h^2 x^2} dx}.$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-h^2 x^2} dx = \frac{a\sqrt{\pi}}{h}.$$

On a donc

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-h^2 x^2} dx.$$

7. Module de précision. — Le coefficient h a une signification qu'il importe de connaître.

Considérons une deuxième série d'observations; la probablité P' qu'une erreur x' tombe entre o et l' sera exprimée par

$$P' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l'} e^{-h'^2 x'^2} dx'.$$

Les deux probabilités P et P' peuvent s'écrire

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-h^2 x^2} h\, dx,$$

$$P' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l'} e^{-h'^2 x'^2} h'\, dx'$$

ou, en posant $hx = z$, $h'x' = z'$ et prenant pour variable z ou z',

$$P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{lh} e^{-z^2} dz,$$

$$P' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l'h'} e^{-z'^2} dz'.$$

Ces deux probabilités seront égales, si

$$lh = l'h',$$

il y aura alors autant d'erreurs x' entre o et l' que d'erreurs x entre o et l. Une erreur l' dans la deuxième série aura exactement le même degré de probabilité qu'une erreur l dans la première. Mais, si l'on prend dans diverses séries les erreurs affectant un même degré de probabilité, l'inexactitude de chaque série peut évidemment se mesurer par la grandeur de son erreur de probabilité déterminée. Les inexactitudes des deux séries proposées seront donc ici comme l et l'. Or

$$\frac{l}{l'} = \frac{h'}{h}.$$

On pourra donc inversement mesurer l'exactitude d'une série par la valeur du paramètre h qui convient à cette série. De là le nom de *coefficient* ou *module de précision*, donné ordinairement à ce paramètre.

8. **Erreur probable.** — La formule

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}\, dx$$

déterminant la probabilité qu'une erreur soit comprise entre $-x$ et $-x$ dans une série dont la précision est h, il importe de savoir calculer l'intégrale $\int_{-x}^{+x} e^{-h^2x^2}\, dx$. Or, si l'on développe l'exponentielle en série et que l'on intègre, il vient

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[hx - \frac{\frac{1}{3}(hx)^3}{1} + \frac{\frac{1}{5}(hx)^5}{1.2} - \frac{\frac{1}{7}(hx)^7}{1.2.3} + \cdots \right]$$

et le calcul de P est dès lors facile.

Inversement, P étant donné, on pourra calculer x.

Supposons, par exemple, $P=\frac{1}{2}$; en procédant par approximation successives, on trouve aisément

$$h\eta = 0,476936,$$

η désignant cette valeur de x, telle qu'il y a autant de chances pou que l'erreur soit au-dessous de η, en valeur absolue, qu'au-dessus η est ce que l'on appelle l'*erreur probable*.

Elle est liée très simplement à l'erreur moyenne E. Calculons e effet E en fonction de h. La probabilité infiniment petite d'un erreur x, ou plus exactement la probabilité d'une erreur compris entre x et $x+dx$, est

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx.$$

On a donc, d'après la définition même de cette probabilité,

$$\frac{\text{nombre des erreurs comprises entre } x \text{ et } x+dx}{\text{nombre total des erreurs}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} dx.$$

Multiplions les deux membres par x^2,

$$\frac{\text{somme des carrés des erreurs comprises entre } x \text{ et } x+dx}{\text{nombre total des erreurs}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2x}$$

et intégrons de $-\infty$ à $+\infty$,

$$\frac{\text{somme des carrés de toutes les erreurs}}{\text{nombre total des erreurs}} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-h^2x^2} dx,$$

ou

$$E^2 = \frac{1}{2h^2}$$

et par suite

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}h} = \frac{0,70711}{h}.$$

Telle est la valeur de l'erreur moyenne en fonction de h.

Si l'on rapproche cette valeur de celle de η trouvée tout à l'heure

$$\eta = \frac{0,476936}{h}$$

on voit que

$$r_1 = 0,674490\,E$$

c'est-à-dire que *l'erreur probable est à peu près les $\frac{2}{3}$ de l'erreur moyenne.*

9. Table de probabilité. — Prenons pour unité l'erreur probable ; en d'autres termes, prenons pour inconnue le rapport $\frac{x}{r_1}$ d'une erreur quelconque x à l'erreur probable r_1, et, remarquant que

$$hx = hr_1\frac{x}{r_1} = 0,476936\,\frac{x}{r_1},$$

calculons la probabilité P d'une erreur relative quelconque $\frac{x}{r_1}$ au moyen de la formule

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[0,476936\,\frac{x}{r_1} - \frac{1}{3}\,\overline{0,476936}^3\left(\frac{x}{r_1}\right)^3 + \frac{1}{10}\,\overline{0,476936}^5\left(\frac{x}{r_1}\right)^5 - \cdots\right].$$

Nous formerons ainsi la table suivante :

$\frac{x}{\eta}$	P	Différences.	$\frac{x}{\eta}$	P	Différences.
0,0	0,000	54	2,5	0,908	13
1	0,054	53	6	0,921	10
2	0,107	53	7	0,931	10
3	0,160	53	8	0,941	9
4	0,213	51	9	0,950	7
5	0,264	50	3,0	0,957	6
6	0,314	49	1	0,963	6
7	0,363	48	2	0,969	5
8	0,411	45	3	0,974	4
9	0,456	44	4	0,978	4
1,0	0,500	42	5	0,982	3
1	0,542	40	6	0,985	2
2	0,582	37	7	0,987	3
3	0,619	36	8	0,990	1
4	0,655	33	9	0,991	2
5	0,688	31	4,0	0,993	1
6	0,719	29	1	0,994	1
7	0,748	27	2	0,995	1
8	0,775	25	3	0,996	1
9	0,800	23	4	0,997	1
2,0	0,823	20	5	0,998	0
1	0,843	19	6	0,998	0
2	0,862	17	7	0,998	1
3	0,879	16	8	0,999	0
4	0,895	13	9	0,999	0
5	0,908		5,0	0,999255	

Cette table convient dans tous les cas, quel que soit h; et l'usag en est très simple.

Soit, par exemple, à calculer pour les observations de Bradle rapportées plus haut, le nombre des erreurs qui, suivant l théorie, doivent tomber entre 0",1 et 0",3. L'erreur moyenn $E = 0'',391$; par suite l'erreur probable

$$r = 0'',2637.$$

Divisons par cette quantité les erreurs proposées 0",2 et 0",3, nou

aurons les valeurs de l'argument $\frac{x}{\eta}$ correspondant aux deux erreurs données. Ces valeurs sont

$$0,7584 \quad \text{et} \quad 1,1376.$$

Si l'on cherche dans la table les valeurs de P correspondantes, en interpolant par parties proportionnelles, on trouve

$$0,391 \quad \text{et} \quad 0,557,$$

c'est-à-dire que sur 1000 erreurs dans la série proposée, il y en a 391 entre 0^s et $0^s,2$ et 557 entre 0^s et $0^s,3$, et par conséquent $557-391=166$ entre $0^s,2$ et $0^s,3$. Donc, sur 470 erreurs, il y en aura $470 \,.\, 0,166=78$ dans l'intervalle considéré.

10. Méthode des moindres carrés. — Soit maintenant le cas général du problème des erreurs.

Ayant à déterminer plusieurs quantités A, B, C....., liées à une variable indépendante t (ou à plusieurs variables indépendantes) par une relation *connue*

$$f(A, B, C\ldots, t)=N,$$

on a fait m mesures n, n', n''..... de N à diverses valeurs de t. De ces mesures affectées des erreurs inévitables, que nous avons appelées les erreurs fortuites, il s'agit de déduire les valeurs les plus probables de A, B, C..... Supposons les valeurs exactes trouvées et désignons les par A_1, B_1, C_1.....; en les substituant à A, B, C..... dans la fonction f et prenant les différences

$$\begin{aligned}
n\ &-f(A_1, B_1, C_1\ldots, t)=\varepsilon,\\
n'&-f(A_1, B_1, C_1\ldots, t')=\varepsilon',\\
n''&-f(A_1, B_1, C_1\ldots, t'')=\varepsilon'',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

on aurait une série de résidus représentant les erreurs mêmes ε, ε', ε''..... des diverses mesures. Or, la probabilité respective de chacune de ces m erreurs est

pour la 1re. . . . . $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon,$

pour la 2e. . . . . $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon'^2} d\varepsilon,$

pour la 3e . . . . $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon''^2} d\varepsilon,$

. . . . ,

h étant le module de précision relatif à ces observations; et la probabilité de l'apparition simultanée de toutes ces erreurs, probabilité égale, d'après le théorème de Moivre, au produit des probabilités respectives des diverses erreurs isolées, est

$$P = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-h^2(\varepsilon^2+\varepsilon'^2+\varepsilon''^2 \ldots)} d\varepsilon^m.$$

Or, si le nombre des mesures a été assez considérable, les erreurs qui ont été réellement commises ne diffèrent pas de celles que régit la loi des erreurs pour un système d'observations de précision h; mais, de toutes les séries d'erreurs possibles, celle qui suit la loi des erreurs est la plus probable ; donc les valeurs les plus probables des inconnues sont celles qui rendent la probabilité P maximum, c'est-à-dire, h devant être considéré comme donné, celles qui rendent la somme

$$\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 \ldots$$

minimum. De là cette règle fondamentale proposée par Legendre (¹) et démontrée par Laplace (²) et par Gauss (³) :

« *Les valeurs les plus probables des inconnues sont celles qui donnent la moindre valeur possible à la somme des carrés des résidus.* »

(¹) LEGENDRE, *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des planètes*; Paris, 1806.

(²) LAPLACE, *Théorie analytique des probabilités*; Paris, 1812.

(³) GAUSS, *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiæ*; Göttingen, 1823.

On doit donc déterminer A, B, C..... de manière que la somme des carrés

$$S=[n-f(A, B, C\cdots, t)]^2+[n'-f(A, B, C\cdots, t')]^2+\cdots$$

soit minimum, ce qui se traduit par les équations de condition

$$\frac{dS}{dA}=0, \quad \frac{dS}{dB}=0, \quad \frac{dS}{dC}=0, \quad \cdots\cdots$$

En égalant ainsi à zéro séparément chacune des dérivées de la somme des carrés par rapport à l'une des inconnues, on a autant d'équations que d'inconnues, et la question est théoriquement résolue.

11. Pratique de la méthode. — Mais pratiquement on rencontrerait le plus souvent des difficultés inextricables, si une circonstance particulière ne permettait de ramener ces équations à la forme linéaire. Cette circonstance heureuse est la connaissance approchée que l'on a toujours d'avance des quantités A, B, C..... Soient donc a, b, c..... des valeurs plus ou moins approchées de A, B, C.....; posons

$$A=a+x, \quad B=b+y, \quad C=c+z, \quad \cdots\cdots$$

x, y, z..... étant des quantités très petites qu'il s'agit de déterminer.

Substituons ces valeurs dans l'équation générale et négligeons les termes en x^2, xy....., nous avons

$$f(a, b, c\cdots, t)+\frac{df}{dA}x+\frac{df}{dB}y+\frac{df}{dC}z+\cdots=N,$$

ou

$$mx+ny+pz+\cdots=N-f(a, b, c\ldots, t).$$

Par suite, si nous désignons par r, r', r''..... les restes immédiatement calculables $n-f(a, b, c....., t)$, $n'-f(a, b, c....., t')$, $n''-f(a, b, c....., t'')$,....., les mesures se résument dans les équations de condition suivantes

$$\begin{aligned}
mx + ny + pz + \cdots &= r,\\
m'x + n'y + p'z + \cdots &= r',\\
m''x + n''y + p''z + \cdots &= r'',\\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

auxquelles il est aisé d'appliquer la méthode.

Formons, en effet, la somme des carrés des résidus

$$S = (mx + ny + pz + \cdots - r)^2 + (m'x + n'y + p'z + \cdots - r')^2 + \cdots,$$

prenons successivement $\frac{dS}{dx}, \frac{dS}{dy} \cdots$ et égalons à zéro chaque dérivée (divisée par 2) ; nous aurons

$$m(mx + ny + pz + \cdots - r) + m'(m'x + n'y + p'z + \cdots - r') + \cdots = 0$$

ou

$$(\Sigma m^2)x + (\Sigma mn)y + (\Sigma mp)z + \cdots = \Sigma mr,$$

et de même

$$(\Sigma nm)x + (\Sigma n^2)y + (\Sigma np)z + \cdots = \Sigma nr',$$

$$(\Sigma pm)x + (\Sigma pn)y + (\Sigma p^2)z + \cdots = \Sigma pr'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Donc, *pour former l'équation finale relative à x, on multiplie chacune des équations de condition par le coefficient de x dans cette équation et l'on fait la somme de toutes les équations ainsi transformées;* et de même pour les équations finales relatives aux autres variables, qui s'obtiendront ainsi toutes par des équations du premier degré.

12. Erreur moyenne des résultats fournis par la méthode des moindres carrés. — La méthode des moindres carrés ne se borne pas à donner le résultat le plus probable ; son avantage le plus précieux consiste à faire connaître le degré d'exactitude de ce résultat.

Pour obtenir l'erreur à craindre sur le résultat, on commencera

par calculer l'erreur moyenne des observations. A cet effet, on substituera dans les m équations primitives les valeurs trouvées pour $x, y, z.....$, on aura m résidus $\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon''_1.....$ et l'erreur moyenne des observations sera

$$E = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon'^2_1 + \varepsilon''^2_1 + \cdots}{m-i}},$$

i étant le nombre des inconnues. Nous prenons $m-i$ pour dénominateur, parce que, les m équations ayant déjà fourni i inconnues, il ne reste plus en réalité que $m-i$ relations pouvant manifester des contradictions : les erreurs doivent donc être réparties entre ces $m-i$ équations seulement.

Cela fait, il est aisé de calculer l'erreur moyenne de chaque résultat [1]. Soit en effet, d'une manière générale, U une fonction connue quelconque des quantités observées M, N, P.....

$$U = f(M, N, P, \ldots).$$

Lorsque nous mettons pour M, N, P,... des valeurs approchées, $m, n, p.....$ pour lesquelles les erreurs à craindre sont $\pm E$, $\pm E'$ $\pm E''$...., l'erreur à craindre sur U est $\pm \mathcal{E}$; et l'on a

$$\pm \mathcal{E} = \pm \frac{df}{dM} E \pm \frac{df}{dN} E' \pm \frac{df}{dP} E'' + \cdots$$

Élevons au carré en remarquant que les doubles produits disparaissent à cause du double signe de E, E', E''.... et prenons la racine carrée, nous aurons

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{\left(\frac{df}{dM}\right)^2 E^2 + \left(\frac{df}{dN}\right)^2 E'^2 + \left(\frac{df}{dP}\right)^2 E''^2 + \cdots}$$

Cette formule est fondamentale dans la théorie des erreurs : elle permet d'évaluer dans tous les cas la précision d'une fonction quelconque de quantités observées.

(1) Voir FAYE, *loc. cit.*, p. 156.

Elle montre, par exemple, que si l'on a mesuré isolément des parties M et N d'une somme avec des erreurs moyennes respectiv E et E', l'erreur à craindre est

$$E = \pm\sqrt{E^2 + E'^2}.$$

On verrait de même que l'erreur à craindre sur la surface d'un rectangle MN est

$$E = \pm\sqrt{(NE)^2 + (ME')^2};$$

etc.

Appliquons la règle au cas actuel. Pour avoir l'erreur de x en fonction des erreurs des données n, n', n''....., différencions x successivement par rapport à chacune de ces données, faisons la somme des carrés de toutes ces différentielles, en y remplaçant dn^2, dn'^2, dn''^2..... par leur valeur moyenne E^2, et prenons la racine carrée de cette somme de carrés. Opérons de même pour y, pour z..... On voit sans peine que cela revient à remplacer dans les équations finales x, y, z..... par x', y', z'....., à résoudre n fois ces mêmes équations avec les seconds nombres remplacés par

1, 0, 0. . . . . . . pour x',
0, 1, 0. . . . . . . pour y',
0, 0, 1. . . . . . . pour z',
. . . .

et à prendre pour erreurs moyennes de x, y, z, ...

$$E\sqrt{x'}, \quad E\sqrt{y'}, \quad E\sqrt{z'}, \quad \ldots$$

$\frac{1}{x'}$, $\frac{1}{y'}$, $\frac{1}{z'}$..... sont les *poids* des inconnues, si, toutes les observations étant supposées de même valeur, on prend pour unité de poids le poids de l'une d'elles.

13. Application de la méthode des moindres carrés à un exemple. — Comme exemple de la méthode des moindres carrés, j'emprunterai encore à M. Faye la détermination de la lon-

ueur du pendule qui bat la seconde sous l'équateur, d'après les mesures faites en différents points du globe [1].

« La longueur l du pendule simple qui bat la seconde est liée à l'aplatissement μ du globe terrestre par l'équation de Clairaut

$$l = l' + \left(\frac{5}{2}q - \mu\right) l' \cos^2 \lambda,$$

où l' représente la longueur du pendule à l'équateur, q le rapport $\frac{1}{189}$ de la force centrifuge à la pesanteur, toujours à l'équateur, et λ la colatitude.

Voici diverses mesures de l effectuées en divers points du globe par les navigateurs :

	λ	l
Spitzberg.	10°.10'	996mm,13
Saint-Pétersbourg.	30. 3	994 ,97
New-York.	49.17	993 ,24
La Jamaïque	72. 4	991 ,56
Ile Saint-Thomas.	89.35	991 ,19
Rio de Janeiro.	112.55	991 ,77
Montevideo.	124.54	992 ,70
Cap Horn.	145.51	994 ,62
New-Shetland.	152.56	995 ,23.

Posons, pour abréger,

$$l' = 991^{\text{mm}} + x, \qquad \left(\frac{5}{2}q - \mu\right) l' = y;$$

nous aurons, pour déterminer x et y, les équations

$$\begin{aligned}
5,13 &= x + 0,969\,y, \\
3,97 &= x + 0,749\,y, \\
2,24 &= x + 0,426\,y, \\
0,56 &= x + 0,095\,y, \\
0,19 &= x, \\
0,77 &= x + 0,152\,y, \\
1,70 &= x + 0,327\,y, \\
3,62 &= x + 0,685\,y, \\
4,23 &= x + 0,793\,y.
\end{aligned}$$

[1] Faye, *loc. cit.*, p. 181.

L'équation finale relative à x s'obtient simplement en faisant la somme de ces équations

$$(1) \qquad 9{,}000x + 4{,}196y = 22{,}41.$$

Pour avoir l'équation relative à y, multiplions chacune des équations proposées par le coefficient correspondant de y :

$$\begin{aligned}
4{,}97 &= 0{,}969\,x + 0{,}938\,y,\\
2{,}97 &= 0{,}749\,x + 0{,}561\,y,\\
0{,}95 &= 0{,}426\,x + 0{,}181\,y,\\
0{,}05 &= 0{,}095\,x + 0{,}009\,y,\\
0 \quad & \quad 0 \qquad\quad 0\\
0{,}12 &= 0{,}152\,x + 0{,}023\,y,\\
0{,}56 &= 0{,}327\,x + 0{,}107\,y,\\
2{,}48 &= 0{,}685\,x + 0{,}469\,y,\\
3{,}35 &= 0{,}793\,x + 0{,}629\,y.
\end{aligned}$$

Leur somme fournit l'équation

$$(2) \qquad 4{,}196x + 2{,}917y = 15{,}45.$$

La résolution des équations (1) et (2) donne

$$x = 0^{mm}{,}066,$$
$$y = 5^{mm}{,}20.$$

Par conséquent, la longueur du pendule est

à l'équateur..... $l' = 991^{mm}{,}066$
et aux pôles..... $l' + \mu = 996^{mm}{,}266$.

Remarquons que y est une fonction de l'aplatissement μ; connaissant actuellement y, nous en pourrons déduire μ par la relation

$$\left(\frac{5}{2}\frac{1}{289} - \mu\right) 991{,}066 = 5{,}20$$

d'où

$$\mu = \frac{1}{294}.$$

Il nous reste à déterminer l'erreur à craindre sur chaque résultat. Pour cela il faut chercher d'abord l'erreur moyenne de ces mesures de l. En substituant dans les équations de condition les valeurs de x et de y, nous aurons les résidus ε_1, ε_1', ε_1''..... :

Nombres observés.	Nombres calculés.	Calc. — Obs. ou ε_1.	Carrés ou ε_1^2.
5,13	5,11	−0,02	0,0004
3,97	3,96	−0,01	0,0001
2,24	2,28	+0,04	0,0016
0,56	0,56	0	0
0,19	0,07	−0,12	0,0144
0,77	0,86	+0,09	0,0081
1,70	1,77	+0,07	0,0049
3,62	3,63	+0,01	0,0001
4,23	4,19	−0,04	0,0016
			0,0272

La somme $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1'^2 + \varepsilon_1''^2 + \cdots = 0,0272$; par conséquent l'erreur moyenne d'une de ces mesures sera

$$\sqrt{\frac{0,0272}{9-2}} = \pm 0^{\text{mm}},067 = \text{E},$$

puisque 9 est le nombre des équations et 2 celui des inconnues.

Quant à l'erreur à craindre sur les nombres trouvés pour x et y, pour l'obtenir nous résoudrons les deux systèmes

$$\left.\begin{array}{l} 9,000\,x' + 4,196\,y' = 1 \\ 4,196\,x' + 2,917\,y' = 0 \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad x' = \frac{1}{2,96},$$

$$\left.\begin{array}{l} 9,000\,x' + 4,196\,y' = 0 \\ 4,196\,x' + 2,917\,y' = 1 \end{array}\right\} \quad \text{d'où} \quad y' = \frac{1}{0,96}.$$

Par suite l'erreur à craindre sur x, ou $\text{E}\sqrt{x'}$, sera

$$\pm \frac{0^{\text{mm}},067}{\sqrt{2,96}} = \pm 0^{\text{mm}},039,$$

et sur y

$$\pm\frac{0^{mm},067}{\sqrt{0,96}}=\pm 0^{mm},068.$$

Il est très intéressant de savoir avec quelle précision l'aplatissement μ est déterminé par ces mesures du pendule en divers lieux de la terre. La relation

$$\left(\frac{5}{2}\frac{1}{289}-\mu\right)(991+x)=y$$

donne, en différentiant par rapport à μ, x et y, et remarquant que dx peut être négligé à cause du très petit facteur qui le multiplie,

$$d\mu=\pm\frac{dy}{991}=\pm 0,000068.$$

Cela revient à dire que l'incertitude du dénominateur de $\frac{1}{294}$, valeur trouvée pour μ, est de ± 6 unités. »

L'application de la méthode des moindres carrés à l'exemple précédent pourrait ne point paraître légitime à cause du petit nombre des observations. Mais la méthode reposant en réalité sur la loi des erreurs fortuites, il suffit pour qu'on ait le droit de l'appliquer que les erreurs suivent cette loi, ce qui est en effet très approximativement le cas ici.

14. Remarque essentielle. — L'examen des erreurs est donc toujours très important, la condition essentielle pour que l'application de la méthode soit légitime étant que les erreurs ou les résidus manifestent nettement la loi de probabilité des erreurs fortuites. Mais il ne faudrait pas que cet examen fît jamais rejeter une observation qui n'était pas suspecte *avant* le calcul. « Toute observation, dit Gerling (¹), qui ne m'est pas signalée comme suspecte par le registre des observations, est pour moi un témoin qui vient déposer de la vérité. Je n'ai pas plus le droit de récuser son témoignage, sous prétexte qu'il s'écarte des autres dépositions, que

(¹) GERLING, professeur à l'université de Marburg, *Die Ausgleichungs-Rechnungen der practischen Geometrie*; Hamburg, 1843.

e n'ai celui de le torturer jusqu'à ce qu'il ait dit ce que je veux lui aire dire. »

15. Théorème de M. Cornu (1). — Nous avons montré plus haut sur quelques exemples comment on peut établir dans chaque cas particulier le mode de répartition des erreurs. Mais cette méthode ne laisse pas que d'être pénible quand le nombre des observations devient un peu considérable. Et cependant on ne saurait tirer de conclusion sur la précision de la moyenne d'un nombre donné d'observations par application des règles du calcul des probabilités, qu'après avoir préalablement reconnu que les écarts avec la moyenne satisfont à la condition expresse sur laquelle ces règles sont fondées, à loi des erreurs fortuites. M. Cornu a donné un moyen très simple et très élégant de vérifier qu'il en est ainsi. Voici l'énoncé de ce *criterium* pratique :

Lorsque les écarts d'une série de nombres avec leur moyenne arithmétique satisfont à la loi de fréquence des erreurs fortuites, le double du quotient de la moyenne E^2 *du carré de ces écarts par le carré de l'écart moyen* $\mathbf{e}$ (moyenne des écarts faite sans avoir égard au signe) *est égal au nombre* $\pi = 3,14159$.

On a en effet, d'après la définition de $\mathbf{e}$, en remarquant que l'intégrale étendue de $-\infty$ à $+\infty$ donnerait zéro, parce qu'il y a autant d'écarts négatifs que de positifs, et en prenant par conséquent la somme des seuls écarts positifs $\int_0^\infty$ et doublant cette somme,

$$\mathbf{e} = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x e^{-h^2x^2} dx = \frac{1}{h\sqrt{\pi}};$$

d'autre part, comme on l'a vu plus haut (8),

$$E^2 = \frac{1}{2h^2};$$

d'où

$$\frac{2E^2}{\mathbf{e}^2} = \pi = 3,14159.$$

(1) CORNU, *Vitesse de la lumière*, 220, dans *Annales de l'Observatoire de Paris*, XIII ; 1876.

Par exemple, 75 mesures de la différence de deux époques fournies par les tracés d'un enregistreur, donnent à M. Cornu, les écarts étant exprimés en millièmes de seconde,

$$e = 10,648, \quad E = 178,012$$

d'où

$$\frac{2E^2}{e^2} = \frac{356,024}{113,380} = 3,14.$$

16. Lois physiques ; théories physiques. — Que l'on considère un phénomène brut avec toute sa complication naturelle, ou un phénomène se produisant dans des conditions de simplicité spéciale préparées à l'avance, qu'en d'autres termes on fasse une *observation* ou une *expérience*, le but que l'on se propose est de trouver une *loi*, c'est-à-dire une relation entre deux circonstances du phénomène, entre une certaine variable et une autre variable, fonction nécessaire de la première. Quand donc on aura réuni un certain nombre de mesures effectuées dans les meilleures conditions possibles, quand on aura pour chaque grandeur de la variable indépendante déterminé la valeur la plus probable de la fonction, il s'agira de trouver la relation qui lie la fonction à la variable, l'effet à la cause. On rapprochera les résultats de façon à rendre leur comparaison facile ; et pour cela il n'y a pas de meilleur moyen que de tracer une courbe : nous en avons vu un exemple dans la recherche de la loi des erreurs fortuites ; nous en rencontrerons maint autre dans la suite de ce cours. La courbe tracée, il faut la traduire en une règle, ou plus généralement, en une équation. Au moyen de cette équation on calcule les valeurs numériques de la fonction qui correspondent aux grandeurs données de la variable, et l'on compare les valeurs calculées aux valeurs observées. Les différences entre le calcul et l'observation ne doivent pas dépasser les erreurs probables. La loi ne sera toutefois réputée exacte que si elle a ainsi pour elle un très grand nombre de vérifications (1).

(1) Sinon, on aura simplement ce que l'on appelle une *loi empirique*, c'est-à-dire une formule ou une courbe résumant convenablement un certain nombre d'observations. Il est rare qu'avec une parabole ou une chaînette on ne puisse pas obtenir une représentation empirique satisfaisante d'une série de mesures

Quand on aura établi un ensemble de lois relatives à une ıême classe de phénomènes, il restera encore à édifier une *théorie* ıttachant ces lois à un principe unique qui les comprenne toutes omme de simples corollaires. On imaginera donc une *hypothèse*. n en déduira analytiquement toutes les conséquences et l'on evra retouver ainsi toutes les lois données par l'expérience. Mais ela ne suffit pas. « Si l'hypothèse posée est la cause réelle de la lasse de phénomènes qu'on a en vue, elle doit non seulement xpliquer tous les faits connus, mais encore en indiquer d'autres ue le physicien n'aurait pas aperçus ; et si ces faits nouveaux ndiqués par la théorie mathématique sont nombreux, s'ils sont omplètement vérifiés par l'expérience, il en résultera des preuves rrécusables de la réalité de l'hypothèse qui aura servi de point de lépart. Cette seconde épreuve est seule décisive [1]. »

[1] Lamé, *Cours de physique de l'École polytechnique*, I, 6 ; 1836.

LIVRE PREMIER

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA MATIÈRE

CHAPITRE PREMIER

MÉCANIQUE

17. Propriété essentielle de la matière. — « La preuve dernière que nous avons de l'existence de la matière, dit Herbert Spencer, c'est qu'elle est capable de résister. » Cette résistance est ce que l'on appelle en mécanique l'inertie et en physique l'impénétrabilité.

L'inertie est la résistance au mouvement ou plutôt au changement de mouvement; car tout se meut dans la nature : les astres roulent dans les espaces célestes; mille objets s'agitent sous nos yeux à la surface de la terre. Rien dans l'immensité de l'univers n'est en repos absolu. Toutes les propriétés par lesquelles la matière se manifeste à nous à distance, son, lumière, chaleur, sont des mouvements et non seulement des mouvements dans le milieu qui les transmet, mais des mouvements dans le corps même qui les engendre. S'il en est ainsi incontestablement (comme nous le prouverons plus loin) des propriétés par lesquelles la matière nous trahit son existence à distance, il est logique de supposer qu'il en est de même des autres propriétés par lesquelles nous la percevons au contact (lequel n'est au fond qu'une faible distance, mais non une distance nulle). Nous sommes donc amenés ainsi à regarder la ma-

tière comme sans cesse animée de mouvement; et s'il est possible par la pensée d'isoler la matière du mouvement et de concevoir isolément soit le mouvement sans matière, soit la matière sans mouvement, ce ne sont là que des abstractions : la réalité c'est la matière animée de mouvement.

I. — CINÉMATIQUE

18. Définition de la cinématique. — La *cinématique* (κίνημα, mouvement) ou science du mouvement considéré en lui-même, indépendamment de ses causes, est une branche purement rationnelle de la mécanique, branche séparée par Ampère qui lui a donné le nom qu'elle porte. A l'idée d'espace, seule base de la géométrie [1], elle joint uniquement l'idée de temps, et de la combinaison de ces deux idées fondamentales elle conclut les lois nécessaires du mouvement. Nous en résumerons brièvement les points les plus importants.

Dans cette première étude du mouvement on peut faire abstraction des dimensions des corps ; nous considérerons donc des points, mais des points que nous supposerons doués de toutes les propriétés de la matière (qui y sera condensée en telle quantité que l'on voudra), et que nous appellerons en conséquence *points matériels*. Un point matériel en mouvement se nomme un *mobile* et la suite de ses positions une *trajectoire*.

19. Vitesse. — Le mouvement le plus simple que l'on puisse imaginer est celui dans lequel la trajectoire est une ligne droite sur laquelle le mobile parcourt des espaces égaux dans des temps égaux : c'est le *mouvement rectiligne uniforme*. La *vitesse* (que nous ne chercherons pas à définir) se mesure alors par l'*espace constant parcouru dans l'unité de temps*, ordinairement par le nombre de

(1) On fait déjà quelquefois, et avec grand avantage, intervenir le mouvement en géométrie (définition des lignes, des surfaces, comme décrites par le mouvement d'un point, d'une ligne).

mètres parcourus en une seconde de temps solaire moyen. Soit v cette vitesse ; l'espace $OM = x$ parcouru au bout du temps t (es-

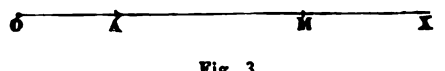


Fig. 3

pace compté sur la trajectoire OX à partir du point O où le mobile se trouve à l'époque $t = o$) est

$$x = vt.$$

On a donc

$$v = \frac{x}{t},$$

c'est-à-dire que dans ce mouvement la vitesse peut aussi s'évaluer par *le rapport constant de l'espace au temps employé à le parcourir*. On la représentera géométriquement par le chemin OA parcouru dans l'unité de temps.

Considérons en deuxième lieu un *mouvement rectiligne non uniforme*. Soient M et M' les positions du mobile à deux époques voisines t

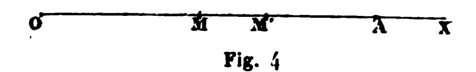


Fig. 4

et $t + \Delta t$, et soit $MM' = \Delta x$; $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_1$ est la *vitesse moyenne* pendant le temps Δt. C'est la vitesse constante qu'il faudrait attribuer à un mobile animé d'un mouvement rectiligne uniforme suivant MX pour que ce mobile parcoure précisément la longueur Δx pendant le temps Δt. Imaginons maintenant que Δt tende vers zéro ; Δx tendra également vers zéro, et le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ tendra vers une limite finie que nous appellerons la vitesse du mobile au temps t :

$$v = \lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

C'est *la dérivée de l'espace par rapport au temps*. Géométrique-

ment cette vitesse pourra se représenter par une droite de longueur convenable MA portée sur OX dans la direction du mouvement.

Arrivons au *cas général*. La trajectoire est quelconque et parcourue suivant une loi quelconque : OM ou $s = f(t)$. Dans ce mouvement curviligne, considérons deux positions M et M′ du mobile

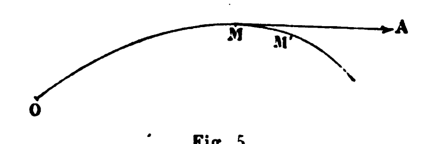


Fig. 5

à deux époques voisines t et $t + \Delta t$, et soit $MM' = \Delta s$; $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ est la vitesse moyenne v_1 avec laquelle l'espace Δs est parcouru. Si Δt décroît indéfiniment, Δs décroît de même et le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tend vers une limite qui sera encore pour nous la vitesse du mobile au temps t,

$$v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Comme d'ailleurs le mouvement élémentaire du mobile à l'époque t est dirigé suivant la tangente à la trajectoire en M, c'est suivant cette tangente que l'on devra compter la vitesse. Géométriquement, nous pouvons remplacer le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, ou $\frac{\text{arc } MM'}{\Delta t}$, par $\frac{\text{corde } MM'}{\Delta t}$, car la différence entre la corde et l'arc est du troisième ordre [1]. D'après cela, nous représenterons la

[1] Soit en effet un arc ACB, infiniment petit du 1er ordre, et sa corde AB

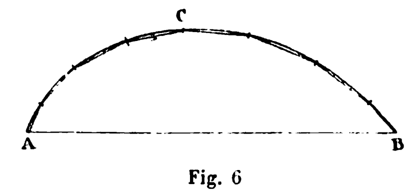


Fig. 6

inscrivons dans l'arc un polygone dont nous ferons ensuite croître indéfiniment le nombre des côtés. Projetons ce polygone sur AB : la projection d

vitesse moyenne v_1 par une certaine longueur $MA_1 = \frac{\text{corde } MM'}{\Delta t}$, portée sur la corde MM′ dans le sens du *déplacement* MM′ ; et la

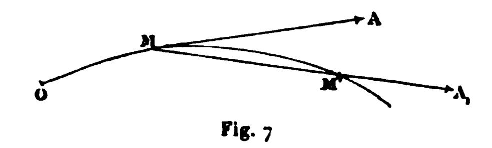


Fig. 7

vitesse en M sera la limite en grandeur et en direction, MA, de cette quantité MA_1.

On peut d'ailleurs ramener la question du mouvement curviligne à celle du mouvement rectiligne par le moyen des projections.

Si en effet le mobile, dans chacune de ses positions successives, est projeté sur un axe fixe X′X, *la vitesse de la projection est à chaque instant la projection de la vitesse.*

Soient m et m' les projections de deux positions voisines du mo-

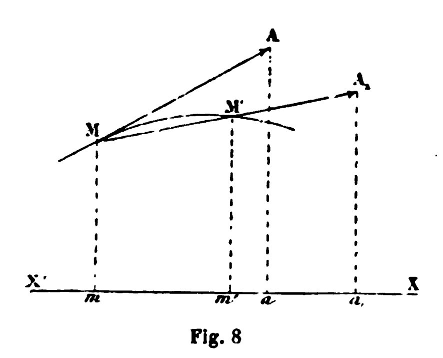


Fig. 8

bile M et M′, et soit ma_1 la projection de la vitesse moyenne MA_1. Les trois plans de projection représentés sur la figure par leurs

chaque côté est égale à ce côté multiplié par $1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, x étant l'angle infiniment petit du 1er ordre que fait ce côté avec AB. Faisons la somme de toutes ces projections, et nous aurons la corde AB, dont la différence avec la somme des côtés sera égale à cette somme même des côtés (infiniment petit du 1er ordre) multipliés respectivement par des infiniments petits du 2e ordre, c'est-à-dire à un infiniment petit du 3e ordre.

traces Mm, M$'m'$ et $A_1\,a_1$ étant parallèles, interceptent sur l'axe X'X des longueurs proportionnelles

$$\frac{ma_1}{mm'}=\frac{MA_1}{MM'}=\frac{1}{\Delta t};$$

d'où

$$ma_1=\frac{mm'}{\Delta t},$$

c'est-à-dire que ma_1 est la vitesse moyenne du mobile m. Si Δt tend vers zéro, ces relations persistent ; et tandis que MA_1 tend vers une limite MA qui est la vitesse du mobile M à l'époque t, ma_1 tend vers une limite ma qui est à la fois la vitesse de m au même instant t et la projection de MA.

Ce théorème est vrai en projection oblique.

Il est encore vrai quand la projection se fait sur un plan ; et sous

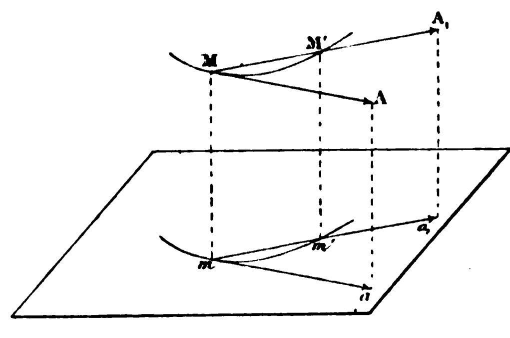


Fig. 9

cette dernière forme on l'emploiera avantageusement toutes les fois que la trajectoire sera donnée, comme cela arrive souvent, par ses projections sur des plans fixes.

Pour le moment, nous nous bornerons à cette conséquence immédiate du théorème sous sa première forme : Si

$$x=\varphi(t),\quad y=\chi(t),\quad z=\psi(t)$$

sont les projections du mobile sur les trois axes coordonnés, les projections de la vitesse sont

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

20. Mesure pratique de la vitesse. — La mesure pratique de la vitesse ne présente aucune difficulté quand il s'agit du mouvement rectiligne uniforme. Il suffit en effet alors, conformément à la définition, de mesurer l'espace parcouru pendant l'unité de temps.

Soit, par exemple, à mesurer la vitesse d'un navire en marche uniforme. Du navire, on lance à la mer un flotteur triangulaire, lesté de manière à se tenir verticalement et qui reste sensiblement en place à la surface de l'eau dès que le navire s'est éloigné à une petite distance. Au flotteur ou *bateau de loch* est attaché un fil, la *ligne de loch*, que le marin déroule en s'éloignant. Lorsque le bateau de loch est à une distance convenable du navire (la longueur du navire), au moment où passe un morceau d'étamine fixé à la ligne de loch, on retourne un sablier et on laisse filer de la ligne pendant une demi-minute. Des *nœuds* placés sur la ligne à des distances telles que 1 nœud par 1/2 minute corresponde à 1 mille par 1 heure [1] mesurent le chemin parcouru par le bâtiment pendant cette demi-minute et par suite sa vitesse : de là l'habitude chez les marins d'exprimer cette vitesse en nœuds. Le mille marin (tiers de la lieue marine) vaut, la terre étant considérée comme sphérique, 1852^m ; 1 mille marin en 1 heure représente $0^m,514$ par 1 seconde : on aura donc la vitesse du navire en mètres-seconde en multipliant le nombre de nœuds par $0^m,514$.

Quand le mouvement est varié, la mesure de la vitesse est plus difficile. L'étude des lois de la chute des corps nous fournira un exemple de détermination de la vitesse dans un mouvement varié.

21. Courbe des espaces ; courbe des vitesses. — Soit $s = f(t)$ la loi du mouvement d'un point. Menons deux axes rectangulaires OX, OY ; et, comptant les t suivant OX et les s suivant

(1) Si l'on calcule la distance de 2 nœuds par cette proportion, on trouve $15^m,4$ ou environ 47 pieds. Pratiquement, on réduit cette distance à 45 pieds ou 9 brasses, pour tenir compte du léger déplacement du flotteur qui est nécessairement un peu tiré par la ligne de loch.



OY, construisons la courbe $s = f(t)$. Cette courbe qui représente géométriquement la loi des mouvements se nomme la *courbe*

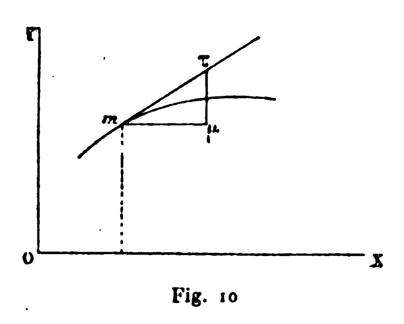


Fig. 10

des espaces. Il est souvent possible, comme nous le verrons plus loin, de faire tracer au mobile lui-même cette courbe des espaces (qu'il faut se garder de confondre avec la trajectoire). La vitesse à l'époque t, ou $\frac{ds}{dt}$, est le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point m dont l'abscisse est t : on la construira en prenant parallèlement à l'axe des temps une longueur $m\mu = 1^{sec}$, et en élevant au point μ une perpendiculaire à $m\mu$ limitée à la tangente $m\tau$.

On peut d'ailleurs tracer pour les vitesses une courbe analogue en

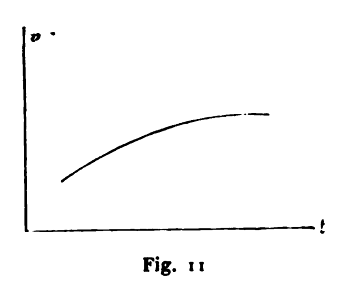


Fig. 11

portant toujours sur l'axe des abscisses les temps et sur l'axe des ordonnées les vitesses : on a alors la *courbe des vitesses*. De cette courbe on peut remonter à celle des espaces par une quadrature. Il existe des appareils effectuant mécaniquement ces quadratures : tel est par exemple le planimètre d'Amsler.

22. Accélération. — Lorsqu'un mobile se meut en ligne droite avec une vitesse variable, un cas particulièrement intéressant se présente, c'est celui où la vitesse éprouve des variations égales dans des temps égaux : le mouvement est alors dit *rectiligne uniformément varié*, et la variation constante de la vitesse dans l'unité de temps s'appelle l'*accélération*. L'accélération est positive ou négative suivant que la vitesse s'accroît ou diminue.

Soient

v_0 la vitesse au temps o,
v la vitesse au temps t,
γ l'accélération.

On a par définition

$$\gamma = \frac{v - v_0}{t},$$

d'où

$$v = v_0 + \gamma t.$$

La loi des espaces en résulte immédiatement. La vitesse étant la dérivée de l'espace par rapport au temps, on a, en intégrant, l'espace

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{\gamma t^2}{2}.$$

Si, à l'époque o, le mobile est au repos, $v_0 = 0$, et si l'on compte les espaces à partir de la position qu'occupe alors le mobile, $x_0 = 0$; les deux formules se réduisent alors à

$$v = \gamma t$$

et

$$x = \frac{\gamma t^2}{2}.$$

Quand le mouvement, que je suppose toujours *rectiligne*, est *varié d'une façon non uniforme*, l'accélération se définira comme il suit : Soit v la vitesse du mobile au temps t, $v + \Delta v$ sa vitesse au temps $t + \Delta t$; $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ est l'accélération moyenne γ_1 : c'est l'accélération qu'il

faudrait attribuer au mobile, animé d'un mouvement uniformément varié, pour que dans le même temps Δt sa vitesse v s'accroisse de la même quantité Δv. Si Δt tend vers zéro, cette accélération moyenne γ_1 tend vers une limite γ, que l'on appelle l'accélération au temps t:

$$\gamma = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

ou

$$\gamma = \frac{dv}{dt}:$$

l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

Mais

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

On a donc

$$\gamma = \frac{d^2x}{dt^2}:$$

l'accélération est la dérivée seconde de l'espace par rapport au temps.

On la représentera par une certaine longueur affectée du signe convenable, longueur que l'on portera sur la droite parcourue par le mobile, en la dirigeant dans un sens ou dans l'autre, suivant son signe.

Considérons maintenant *un mobile se mouvant suivant une trajectoire quelconque.* Soient MA et M'A' les vitesses aux temps t et

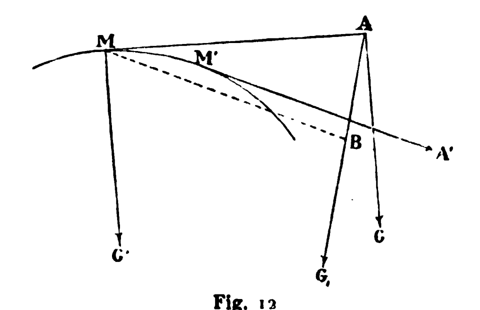


Fig. 12

$t + \Delta t$; par le point M, menons MB égale et parallèle à M'A' et joignons AB, la longueur AB est la variation géométrique de la vitesse

pendant le temps Δt. Si donc nous portons sur AB une longueur $AG_1 = \frac{AB}{\Delta t}$, AG_1 représentera en grandeur et en direction l'accélération moyenne γ_1 du mobile pendant le temps Δt. Que maintenant Δt tende vers zéro, le plan MAB tendra vers une position limite qui sera précisément celle du plan osculateur en M; et, dans ce plan, AG_1 tendra vers une limite en grandeur et en direction : cette limite AG est l'accélération du mobile au temps t. On la représentera plus commodément par une droite MG′, menée par le point M égale et parallèle à AG.

On ramène facilement la définition de l'accélération à celle de la vitesse. Par un même point O de l'espace, menons des droites Oa, Ob..... égales et parallèles aux vitesses successives MA, M′A′..... du mobile; le lieu de ces droites est une surface conique sur laquelle

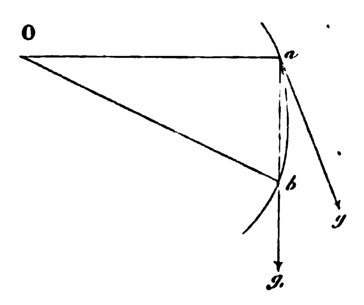


Fig. 13

le point a décrit une courbe ab. La vitesse moyenne ag_1 de a sur cette courbe pendant le temps Δt est $\frac{ab}{\Delta t}$, c'est-à-dire γ_1. Quand Δt tend vers zéro, le plan Oab tend vers le plan tangent à la surface conique suivant Oa, tandis que MAB tend vers un plan parallèle à ce plan tangent, et l'accélération AG du mobile M à l'époque t n'est autre que la vitesse ag du point a au même instant.

Appliquons ce procédé au *mouvement circulaire uniforme*. Un mobile M décrit une circonférence de rayon R avec une vitesse constante v. Si cette vitesse MA est constante en grandeur, elle est variable en direction ; il y a donc une accélération. Par le point O

menons Oa égale et parallèle à MA, le lieu du point a est une circonférence que ce point a parcourt dans le même temps que M

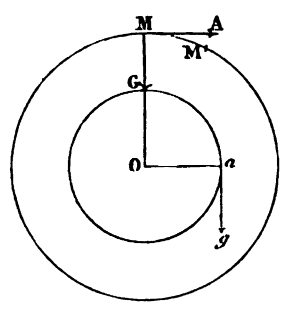


Fig. 14

emploie à parcourir la circonférence de rayon R. Les vitesses de a et de M doivent donc être proportionnelles aux rayons v et R des cercles décrits. Donc, γ étant la vitesse du point a,

$$\frac{\gamma}{v}=\frac{v}{R},$$

ou

$$\gamma=\frac{v^2}{R}.$$

Telle est la valeur de l'accélération dans le mouvement circulaire uniforme. Si nous prenons à partir du point M une longueur MG, égale et parallèle à ag, nous aurons en MG la représentation géométrique de l'accélération, laquelle, on le voit, est à chaque instant dirigée suivant le rayon vers le centre du cercle.

Cette accélération peut s'écrire sous une autre forme souvent utile. Soit, en effet, dans un mouvement circulaire quelconque, $\Delta\theta$ l'angle MOM′ correspondant à l'arc MM′$=\Delta s$, on a

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}R$$

et à la limite

$$v=\omega R,$$

ω étant la *vitesse angulaire de rotation* lim $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$.

Si l'on porte cette valeur de v dans l'expression précédente de γ, il vient

$$\gamma = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

T étant le temps que le mobile met à parcourir la circonférence, ou la durée d'une révolution.

On voit immédiatement, ici comme pour les vitesses, que si l'on projette le mouvement sur un plan ou sur un axe, *la projection de l'accélération est à chaque instant l'accélération de la projection.*

D'après cela, pour calculer l'accélération, on prendra trois axes coordonnés Ox, Oy, Oz. Les coordonnées x, y, z du mobile sont trois fonctions connues du temps :

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \chi(t),$$
$$z = \psi(t),$$

dont les dérivées premières donnent les vitesses des projections ou les projections de la vitesse :

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha,$$
$$\frac{dy}{dt} = v\cos\beta,$$
$$\frac{dz}{dt} = v\cos\gamma,$$

avec

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1\ ;$$

et dont les dérivées secondes donnent les accélérations des projections ou les projections de l'accélération :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma\cos a,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \gamma\cos b,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \gamma\cos c,$$

avec

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1.$$

23. Accélération normale; accélération tangentielle. — Souvent on préfère déterminer autrement l'accélération. L'accélération étant située dans le plan osculateur, on la mesure par ses projections sur deux droites tracées dans ce plan, la tangente au point M et la normale à la courbe dans le plan osculateur, ou normale principale, au même point. La troisième projection est alors nulle; mais le système d'axes est mobile.

Pour calculer ces nouvelles projections, revenons à l'accélération moyenne. Soit $MA = v$ la vitesse au temps t, $M'A' = v'$ la vitesse au

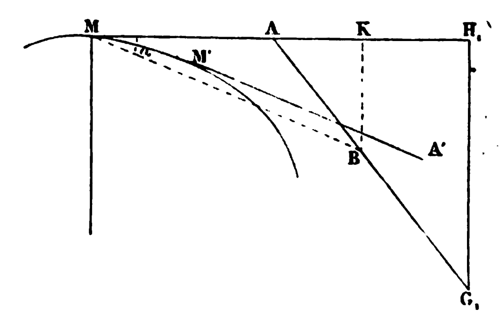


Fig. 15

temps $t + \Delta t$; par le point M menons MB égale et parallèle à $M'A'$ et joignons AB; $AG_1 = \frac{AB}{\Delta t}$ est l'accélération moyenne. Projetons AG_1 sur MA et sur une droite perpendiculaire à MA; ces projections AH_1 et H_1G_1 auront pour limites les projections de l'accélération sur la tangente et sur la normale principale. Si nous projetons de même AB en AK et BK, nous avons

$$G_1H_1 = \frac{BK}{\Delta t} \quad \text{et} \quad AH_1 = \frac{AK}{\Delta t}.$$

Calculons successivement ces deux quantités.

Rappelons-nous que la *courbure d'un cercle* est l'angle de contin-

gence des deux tangentes menées aux extrémités de l'arc de lon-

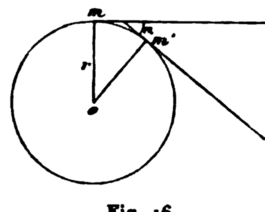


Fig. 16

gueur 1, ou, ce qui revient au même, le rapport de l'angle de contingence α des deux tangentes en m et m' à l'arc mm' :

$$\text{courbure} = \frac{\text{angle } \alpha}{\text{arc } mm'} = \frac{\frac{\text{arc } mm'}{r}}{\text{arc } mm'} = \frac{1}{r};$$

et que par analogie on nomme *courbure d'une courbe quelconque*

$$\frac{1}{r} = \lim \frac{\text{angle } \alpha}{\text{arc MM}'},$$

r étant le rayon de courbure et α l'angle des directions des deux tangentes en M et M', l'angle AMB (fig. 15).

Ce point rappelé, l'expression de G_1H_1 peut s'écrire

$$G_1H_1 = \frac{\text{BK}}{\Delta t} = \frac{v' \sin \alpha}{\Delta t} = v' \cdot \frac{\sin \alpha}{\text{angle } \alpha} \cdot \frac{\text{angle } \alpha}{\text{arc MM}'} \cdot \frac{\text{arc MM}'}{\Delta t};$$

à la limite, v' devient v, $\frac{\sin \alpha}{\text{angle } \alpha} = 1$, $\frac{\text{angle } \alpha}{\text{arc MM}'} = \frac{1}{r}$, $\frac{\text{arc MM}'}{\Delta t} = v$;

et l'on a

$$\lim G_1H_1 = \frac{v^2}{r},$$

ou, en appelant γ_n l'*accélération suivant la normale principale*,

$$\gamma_n = \frac{v^2}{r}.$$

Calculons de même la limite de AH_1 :

$$AH_1 = \frac{AK}{\Delta t} = \frac{v' \cos\alpha - v}{\Delta t} = \frac{v'\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) - v}{\Delta t} = \frac{v' - v}{\Delta t} - 2v' \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta v}{\Delta t} - 2v' \sin\frac{\alpha}{2} \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\Delta t}.$$

La limite du deuxième terme du second nombre étant=o, on a simplement

$$\lim AH_1 = \frac{dv}{dt},$$

ou, γ_t désignant l'*accélération tangentielle*,

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt} \text{ (1)}.$$

L'accélération tangentielle est nulle toutes les fois que le mouvement est uniforme. Ainsi, dans le mouvement circulaire uniforme, la composante tangentielle est nulle; l'accélération est sans cesse dirigée suivant le rayon vers le centre, et égale à $\frac{v^2}{r}$, comme nous l'avons déjà établi (22).

24. Expression de l'accélération au moyen des éléments de la trajectoire. — Nous indiquerons encore une expression de l'accélération qu'il est utile de connaître.

Soient, sur la trajectoire, M et M' les positions du mobile aux époques t et $t+\Delta t$, et soit $MA = v\Delta t$ le chemin qu'aurait parcouru

(1) Dans cette expression $\frac{dv}{dt}$, la vitesse v est, selon l'habitude, considérée comme une grandeur numérique. Si on appliquait directement le calcul différentiel aux grandeurs géométriques, on n'aurait pas besoin de scinder ainsi la question, et l'on pourrait dire que l'accélération est simplement, dans tous les cas, la dérivée de la vitesse, je veux dire de la grandeur géométrique représentant la vitesse. Hamilton, dans ses quaternions, a essayé le calcul direct des grandeurs géométriques ou vecteurs.

le mobile sur la tangente pendant le temps Δt si le mouvement à partir de l'époque t était devenu rectiligne et uniforme. Menons AM' :

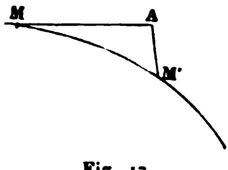


Fig. 17

cette ligne, que Duhamel appelle la *déviation*, a pour direction limite celle de l'accélération ; et elle est telle que lim $\frac{AM'}{\frac{\Delta t^2}{2}}$ est précisément l'accélération à l'époque t. La première proposition est évidente ; la deuxième peut s'établir comme il suit :

Les coordonnées du point M' sont

$$x + \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{\Delta t^2}{1.2} + \cdots,$$
$$y + \frac{dy}{dt}\Delta t + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{\Delta t^2}{1.2} + \cdots,$$
$$z + \frac{dz}{dt}\Delta t + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{\Delta t^2}{1.2} + \cdots;$$

les coordonnées du point A sont

$$x + \frac{dx}{dt}\Delta t,$$
$$y + \frac{dy}{dt}\Delta t,$$
$$z + \frac{dz}{dt}\Delta t.$$

Donc, les projections de AM' sont, en négligeant les quantités d'ordre supérieur au deuxième, qui ne changeraient pas le résultat,

$$\frac{\Delta t^2}{1.2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{\Delta t^2}{1.2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{\Delta t^2}{1.2}\cdot\frac{d^2z}{dt^2};$$

et par suite $2\frac{AM'}{\Delta t^2}$ a pour projections limites

$$\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2};$$

donc

$$\lim 2\frac{AM'}{\Delta t^2}=\gamma.$$

Cette expression de l'accélération, souvent précieuse dans les applications, trouvera bientôt son emploi dans l'étude des mouvements composés.

25. Composition des mouvements. — Jusqu'à présent nous ne nous sommes occupés que du mouvement d'un point rapporté à des axes fixes, et à cela il n'y avait pas d'inconvénient; car, d'une part, si l'on n'a aucun moyen de réaliser de tels axes, on peut toujours concevoir qu'ils existent; d'autre part, tant que l'on considère seulement les déplacements d'un point relativement à des repères donnés, il est parfaitement indifférent que ces repères soient en réalité immobiles ou non. Mais il importe maintenant d'aller plus loin et d'examiner le cas où les axes auxquels on rapporte le mouvement sont eux-mêmes mobiles.

Un mobile M *est animé d'un mouvement connu dans le système A; ce système A se déplace lui-même d'un mouvement connu dans le système B; trouver le mouvement du mobile dans B:* tel est le problème auquel se ramènent finalement toutes les questions de *composition des mouvements*.

26. Composition des vitesses. — Considérons en premier lieu les vitesses.

Soit d'abord à composer *deux mouvements rectilignes uniformes*



Fig. 18

s'effectuant suivant une même droite. Le mobile M se meut sur la droite X'X, parcourant dans le temps Δt un espace $MM' = v\,\Delta t$; en même temps la droite X'X glisse sur elle-même, de sorte qu'au

›ut du temps Δt le point M′ de la droite est venu en M″, M′M″
ant égal à $v'\Delta t$.

L'espace réellement parcouru par le mobile pendant le temps
t est

$$MM'' = (v + v')\Delta t.$$

Le mouvement résultant est donc uniforme et la vitesse résul-
ınte

$$V = v + v'$$

st la somme algébrique des vitesses des deux mouvements pro-
›osés.

Si les deux mouvements dirigés suivant la même droite n'étaient
pas uniformes, la considération des vitesses moyennes conduirait
encore au même résultat ; car on a toujours

$$MM'' = MM' + M'M''.$$

Par suite

$$\frac{MM''}{\Delta t} = \frac{MM'}{\Delta t} + \frac{M'M''}{\Delta t};$$

et à la limite

$$V = v + v'.$$

Cherchons maintenant à composer *deux mouvements rectilignes uniformes dirigés suivant deux droites différentes*. Le mobile se meut d'un mouvement uniforme sur une droite OX qui de son côté se déplace parallèlement à elle-même, son point O glissant uniformément sur OY. Au temps t le mobile sur OX est venu en P,

$$OP = vt;$$

mais la droite OX est venue en O′X′,

$$OO' = v't;$$

le mobile est donc en M, la longueur O′M étant prise égale à OI

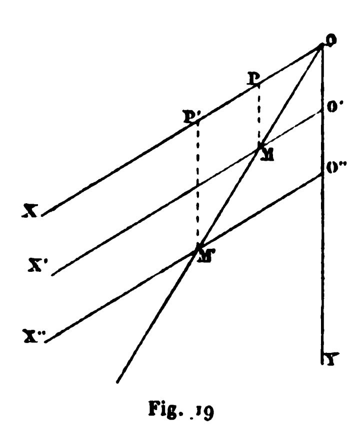


Fig. 19

et pour cela PM étant menée parallèle à OY jusqu'à sa rencontre avec O′X′. A une autre époque t', le mobile sur OX sera en P′,

$$OP' = vt' ;$$

et la droite sera venue en O″X″,

$$OO'' = v't' ;$$

de sorte que le mobile sera en M′ au point de rencontre de la parallèle à OY menée par le point P′ jusqu'à sa rencontre avec O″X″.

Mais on a :

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{t}{t'} = \frac{OO'}{OO''}$$

ou

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{PM}{P'M'}.$$

Les deux triangles POM, P′OM′ sont donc semblables, comme ayant les angles P et P′ égaux (PM et P′M′ sont tous deux parallèles à OY) compris entre côtés proportionnels. Donc les angles en O de ces triangles sont égaux ; les deux directions OM et OM′ coïncident ; la trajectoire du point M est une droite.

De plus le mouvement est uniforme. De la similitude des mêmes triangles on tire en effet :

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OM'}}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OP'}}=\frac{t}{t'}.$$

Ainsi, le mouvement résultant est rectiligne et uniforme.

Pour en avoir la vitesse, supposons $t = 1$, OP, PM et OM seront alors respectivement les espaces parcourus pendant l'unité de temps dans les deux mouvements uniformes composants et dans le mouvement uniforme résultant ; et l'on voit que *la vitesse du mouvement résultant est la diagonale du parallélogramme des vitesses des mouvements proposés.*

Prenons enfin le *cas général.* Soient S la trajectoire relative du point M dans le système A, Σ la trajectoire dans le système B du point du système A avec lequel coïncide le point mobile à l'époque t. Soient MM′ et MM″ les arcs décrits sur ces deux trajectoires

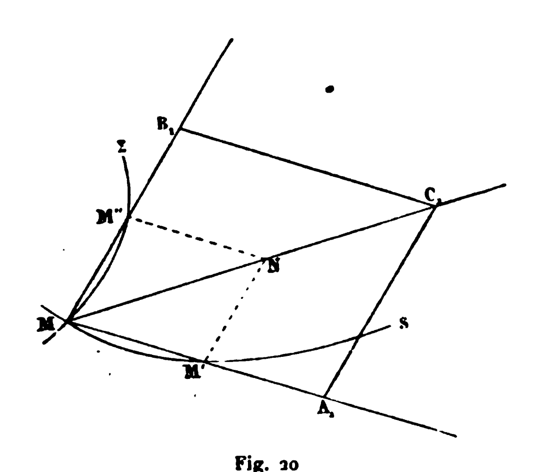


Fig. 20

dans le temps Δt ; au temps $t + \Delta t$ le mobile sera en N à l'extrémité de la diagonale du parallélogramme construit sur MM′ et MM′ comme côtés ; et, d'après ce qui précède, les trois quantités $\frac{\mathrm{MM'}}{\Delta t}$, $\frac{\mathrm{MM'}}{\Delta t}$, $\frac{\mathrm{MN}}{\Delta t}$ auront pour limites respectives les vitesses des mouvements composants et du mouvement résultant. Mais si nous

prenons sur MM', MM'' et MN des longueurs MA_1, MB_1, MC_1, respectivement égales aux rapports précédents, la dernière de ces longueurs sera la diagonale du parallélogramme construit sur les deux autres ; et, cette relation persistant lorsque Δt tend vers zéro, la vitesse du mouvement résultant s'obtiendra en composant suivant la *règle du parallélogramme* les vitesses des mouvements composants. Ou, ce qui revient au même, la vitesse du mouvement résultant s'obtient en portant l'une à la suite de l'autre, avec leur grandeur et

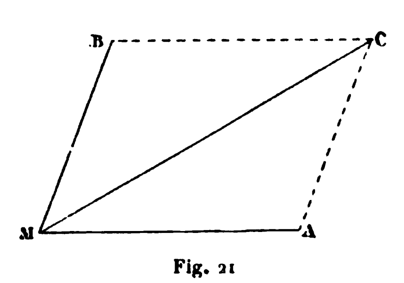


Fig. 21

leur direction, les vitesses MA et MB des mouvements composants, c'est-à-dire en faisant la *somme géométrique* des vitesses composantes. On désigne en effet par somme géométrique de deux grandeurs MA et MB, la droite MC qui joint le point M au point C obtenu en portant en AC, à la suite de MA, la ligne MB en grandeur et en direction.

La généralité de la loi de composition des vitesses est évidente : *la vitesse du mouvement résultant est la somme géométrique des vitesses des mouvements composants*, quel qu'en soit le nombre. A la vitesse du mobile dans le système *A*, on ajoutera géométriquement la vitesse que possède au même instant dans le système *B* le point du système *A* où se trouve actuellement le mobile, puis la vitesse dans le système *C* du point de *B* où est actuellement ce point de *A* et ainsi de suite.

L'énoncé se simplifie quand les mouvements relatifs des systèmes les uns dans les autres sont des *mouvements de translation*, c'est-à-dire quand tous les points du système considéré éprouvent dans le même temps des déplacements égaux et parallèles dans un deuxième système. A la vitesse du mobile M dans *A* on ajoutera

alors simplement la vitesse du système A dans B et ainsi de suite, ces additions se faisant toujours bien entendu suivant la règle de sommation des grandeurs géométriques.

L'interprétation analytique de cette règle est très simple. Qu'en effet on projette sur un axe les vitesses composantes v, v', v''... et la vitesse résultante V, la projection de V sera égale à la somme des projections des différents côtés de la ligne brisée $v v' v''$... Si donc on prend trois axes coordonnés Ox, Oy, Oz, on aura, en appelant α, β, γ ; α', β', γ' ; ... A, B, C les angles des vitesses v, v' ... et de la résultante V avec les axes,

$$V \cos A = v \cos \alpha + v' \cos \alpha' + \cdots,$$

ou

$$V \cos A = \Sigma v \cos \alpha,$$

et

$$V \cos B = \Sigma v \cos \beta,$$
$$V \cos C = \Sigma v \cos \gamma,$$

à quoi il faut joindre la relation fondamentale

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 ;$$

ce qui donne quatre équations pour déterminer les quatre inconnues, V et les angles A, B et C.

La grandeur V est évidemment indépendante des axes choisis : on doit donc pouvoir éliminer ce qui se rapporte aux axes. Si en effet dans la valeur de V^2 tirée des équations précédentes

$$V^2 = (\Sigma v \cos \alpha)^2 + (\Sigma v \cos \beta)^2 + (\Sigma v \cos \gamma)^2,$$

nous développons les carrés, nous aurons

$$\begin{aligned} V^2 &= v^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + v'^2(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') + \cdots \\ &\quad + 2vv'(\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma') + \cdots \\ &= v^2 + v'^2 + \cdots + 2vv' \cos(v, v') + \cdots \end{aligned}$$

cos (v, v') désignant le cosinus de l'angle des deux directions v et v'. ou, avec la notation précédente,

$$V^2 = \Sigma v^2 + 2\Sigma vv' \cos(v, v').$$

Pour deux vitesses, la résultante est la diagonale du parallélo-

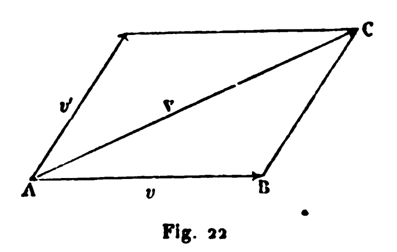


Fig. 22

gramme des vitesses composantes ; et l'on a

$$V^2 = v^2 + v'^2 + 2vv' \cos(v, v').$$

Pour trois vitesses, la résultante est la diagonale du parallélipi-

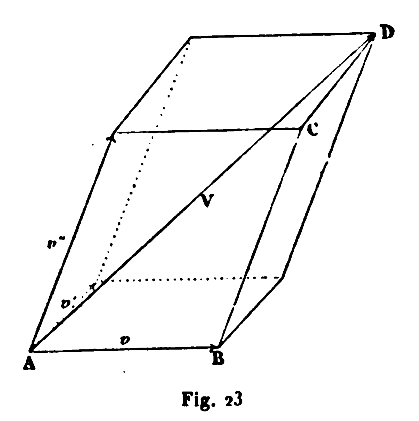


Fig. 23

pède des vitesses composantes; et l'on a

$$V^2 = v^2 + v'^2 + v''^2 + 2vv' \cos(v, v') + 2v'v'' \cos(v', v'') + 2v''v \cos(v'', v)$$

Un mouvement étant donné, on peut toujours le considérer

comme résultant de deux ou plusieurs mouvements composés en un seul. Une vitesse donnée pourra donc toujours être *décomposée* en plusieurs autres, pourvu que les différentes composantes par lesquelles on la remplace donnent pour résultante la vitesse proposée si on les recompose suivant la règle ordinaire. C'est ainsi que l'on remplacera une vitesse par ses projections sur les axes coordonnés, comme nous l'avons déjà indiqué. C'est ainsi encore que l'on résoudra la question suivante :

Un mobile est en mouvement dans un système A qui lui-même se déplace dans un système B : on connaît le mouvement du mobile dans le système B ainsi que le mouvement du système A dans le système B; on demande le mouvement relatif *ou apparent du mobile dans le système A.*

Ce problème revient évidemment à celui-ci : étant donné le mouvement résultant et l'un des mouvements composants, trouver le second mouvement composant; en d'autres termes, décomposer le mouvement résultant en deux mouvements composants dont l'un est connu. Soit, à un instant donné, MM'' le déplacement résultant

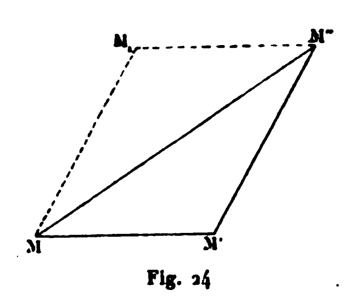


Fig. 24

connu en grandeur et en direction, $M'M''$ le déplacement composant également connu en grandeur et en direction ; sur MM'' comme diagonale et $M'M''$, porté en MM_1, comme côté, construisons un parallélogramme $M_1M''M'M$; MM' est le déplacement composant cherché. Le problème est donc résolu.

Mais on présente souvent cette solution sous une forme plus saisissante : le déplacement inconnu MM' peut en effet être regardé comme la somme géométrique du déplacement résultant MM'' et du déplacement $M''M'$ égal et de signe contraire au premier déplacement composant connu $M'M''$. Passant comme d'habitude

des déplacements aux vitesses, on voit donc que *la vitesse du mouvement apparent du mobile dans le système A est à chaque instant égale à la somme géométrique de deux vitesses : la vitesse réelle du mobile dans le système B et une vitesse égale et contraire à la vitesse dans le système B du point du système A où se trouve actuellement le mobile.*

Soient, par exemple, deux bateaux animés l'un et l'autre d'un mouvement rectiligne et uniforme à la surface d'un lac tranquille : PQ est la vitesse du bateau P, RS la vitesse du bateau R. Cherchons le mouvement apparent de R par rapport à P. Le système *B* est ici

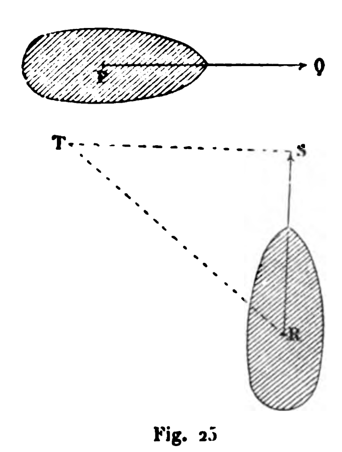


Fig. 25

le lac dont les eaux sont immobiles ; le système *A* c'est le bateau P et toute la portion de l'espace que nous voudrons y rattacher par la pensée en lui attribuant le même mouvement qu'à P. Nous connaissons le mouvement du bateau R dans le système *B*, mouvement rectiligne et uniforme s'effectuant avec la vitesse RS ; nous connaissons aussi le mouvement dans le système *B* du point du système *A* où se trouve actuellement le mobile R ; c'est le mouvement de la portion de l'espace que nous avons rattachée au bateau P en lui donnant précisément la même vitesse PQ. Appliquons la règle : à RS ajoutons géométriquement une vitesse ST, égale et de signe contraire à PQ, et nous aurons la vitesse RT du bateau R dans le système *A*, c'est-à-dire la vitesse apparente de R par rapport à P : des personnes placées sur P verront R se déplacer suivant RT avec la vitesse RT.

27. Composition des accélérations. — Passons maintenant à la composition des accélérations.

Soient d'abord *deux mouvements rectilignes dirigés suivant la même droite*. Un mobile M se meut sur la droite X'X : v_r est sa vitesse à l'époque t relativement à la droite X'X, $v_r + \Delta v_r$ sa vitesse à l'époque $t + \Delta t$; d'autre part, la droite X'X glisse sur elle-même : v_e est la vitesse de ce mouvement d'entraînement au temps t,

X' M X

Fig. 26

$v_e + \Delta v_e$ la vitesse au temps $t + \Delta t$. Or, on sait que la vitesse du mouvement résultant est la somme des vitesses des mouvements composants; si donc on appelle v la vitesse du mouvement résultant au temps t,

$$v = v_r + v_e;$$

la vitesse au temps $t + \Delta t$

$$v + \Delta v = (v_r + \Delta v_r) + (v_e + \Delta v_e).$$

On a donc

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta v_r}{\Delta t} + \frac{\Delta v_e}{\Delta t};$$

et à la limite

$$\gamma = \gamma_r + \gamma_e$$

γ, γ_r et γ_e désignant l'accélération du mouvement résultant et celles des mouvements composants. *L'accélération du mouvement résultant est la somme algébrique des accélérations des mouvements composants.*

Soit maintenant le *cas général* où les deux mouvements sont quelconques. Le mobile se déplace au milieu des axes A d'une manière quelconque et ces axes eux-mêmes ont un mouvement quelconque relativement aux axes fixes B; déterminer l'accélération du mouvement résultant.

28. Mouvement d'un corps solide ([1]). — Nous établirons d'abord que *tout déplacement d'un corps solide peut être produit par une translation et une rotation.* Cette proposition résulte des théorèmes suivants :

1° *Tout déplacement d'un corps solide autour d'un point fixe peut être produit par une rotation autour d'un axe fixe passant par ce point.*

Imaginons une sphère ayant pour centre le point fixe O et pour rayon une longueur quelconque. Il suffit de deux points A et B sur cette sphère pour déterminer la position du corps. Supposons donc que l'arc de grand cercle AB soit venu en une position quelconque A'B'. Je dis que l'on peut amener AB en A'B' par une rotation autour de OP, le point P étant l'intersection des arcs de grand

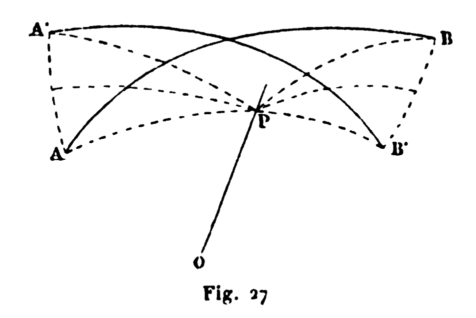


Fig. 27

cercle menés perpendiculairement sur les milieux des arcs de grand cercle AA', BB'. En effet, les deux triangles sphériques PAB, PA'B' sont égaux comme ayant les trois côtés égaux ; les angles en P de ces triangles sont donc égaux : APB = A'PB' ; et, si l'on en retranche la partie commune A'PB, les restes APA', BPB' seront encore égaux ; par suite, une rotation du corps s'effectuant autour de OP de l'angle APA' amènera A en A' et B en B', c'est-à-dire le corps de sa première à sa deuxième position.

2° *Théorème de d'Alembert* ([2]). — *Quand un corps solide se meut d'une manière quelconque autour d'un point fixe, les vitesses de tous les points du corps sont à chaque instant les mêmes que si le corps tournait à cet instant autour d'un certain axe avec une vitesse angulaire déterminée.*

([1]) Voir Briot, *Leçons de mécanique* ; Paris, Dunod, 1861, p. 380.
([2]) D'Alembert, *Recherches sur la précession des équinoxes* ; Paris, 1749.

Soient O le point fixe, M un point du corps au temps t, M' la position du même point du corps au temps $t+\Delta t$. Nous venons d'établir que l'on peut produire le déplacement du corps pendant ce temps Δt par une rotation d'un certain angle θ autour d'un certain axe OP_1 passant par le point O. Dans ce mouvement, le point M décrit un arc de cercle MM' dans un plan C_1MM' perpendiculaire à l'axe OP_1

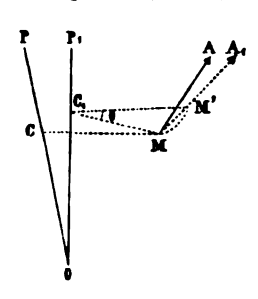


Fig. 28

et la vitesse moyenne v_1 du point M est $\frac{MM'}{\Delta t}=MA_1$. Si Δt tend vers zéro, OP_1 tend vers une position limite OP, *axe instantané de rotation* au temps t ; le plan $M'MC_1$ reste perpendiculaire à l'axe, la perpendiculaire MC_1 sur OP_1 devient la perpendiculaire MC sur OP, en même temps que la sécante MA_1 devient la tangente MA perpendiculaire sur MC. La vitesse MA est donc perpendiculaire au plan POM mené par l'axe OP et le point M. On a d'ailleurs

$$v_1=\frac{MM'}{\Delta t}=\frac{MM'}{\text{arc } MM'}\times\frac{\theta}{\Delta t}\times C_1M,$$

l'arc MM' étant égal à l'angle de rotation θ multiplié par le rayon C_1M. La limite du premier rapport $\frac{MM'}{\text{arc } MM'}$ est égale à 1, le deuxième rapport $\frac{\theta}{\Delta t}$ a pour limite la vitesse angulaire ω au temps t, enfin à la limite C_1M devient CM. On a donc

$$v=\omega\times CM.$$

La vitesse du point M est donc la même que si le corps tournait

autour de l'axe instantané OP avec une vitesse angulaire ω, indépendante du point considéré.

Géométriquement, une telle rotation se représente par une longueur égale à la vitesse angulaire ω portée sur la direction de l'axe et dans un sens tel qu'un observateur placé sur l'axe voie la rotation se faire de sa gauche à sa droite, comme se fait à nos yeux le mouvement du soleil, comme se fait celui des aiguilles d'une montre, comme se fait celui d'une vis que l'on enfonce : c'est ce que nous appellerons le *sens direct* ou *positif* (1).

3° *Théorème de Poinsot* (2). — L'axe instantané change sans cesse de direction aussi bien dans le corps que dans l'espace (3). Soit une

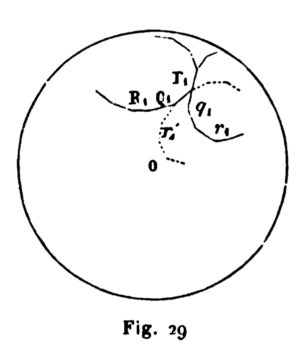


Fig. 29

sphère décrite autour du point O et soient P_1, Q_1, R_1,.... les points correspondant aux époques t, $t+\Delta t$, $t+2\Delta t$,.... où les axes successifs

(1) D'après cette convention, la ligne qui représente la rotation diurne de la terre est dirigée du centre vers le pôle Sud. Si donc on regarde comme positives les longueurs portées sur la ligne des pôles, du centre au pôle Nord, la vitesse angulaire ω devra être comptée négativement. On posera

$$\omega = -\frac{2\pi}{86164} = -0,000073.$$

La durée d'une révolution de la terre ou un jour sidéral se compose, en effet de 86164 secondes de temps solaire moyen.

Il est à remarquer que notre sens direct est le sens rétrograde des astronomes, le sens direct pour eux étant le sens des mouvements réels.

(2) Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*; Paris, 1834.

(3) Si l'axe est fixe dans le corps, il l'est nécessairement dans l'espace. Quand donc on voit un corps tourner autour d'un axe qui *semble* fixe dans le corps, mais qui change de direction dans l'espace, on peut affirmer que cet axe n'est pas l'axe instantané autour duquel se fait réellement la rotation; car il est impossible que l'axe instantané soit fixe dans le corps et mobile dans l'espace.

le rotation du corps, considérés dans l'espace, viennent percer la surface de la sphère; soient P_1, q_1, r_1,.... les points où les mêmes axes considérés dans le corps percent la surface de la sphère au temps t. Au temps $t+\Delta t$ le corps ayant tourné autour de l'axe OP_1 de l'angle $q_1P_1Q_1$, le polygone $P_1q_1r_1$ sera venu en $P_1Q_1r'_1$ et l'on peut se représenter la suite des positions du corps en faisant tourner la pyramide mobile $OP_1q_1r_1$... sur la pyramide fixe $OP_1Q_1R_1$... Quand Δt tend vers zéro, les deux polygones deviennent deux courbes, les deux pyramides deux cônes tangents en chaque instant suivant une ligne OP et *l'on peut concevoir le mouvement du corps solide pirouettant autour du point fixe O comme produit par la rotation du cône mobile sur le cône fixe, sans glissement*, « véritable solution du problème en ce qu'elle fait image et qu'on y voit le mouvement du corps avec autant de clarté que le mouvement d'un point ».

Si maintenant nous considérons deux positions successives d'un corps solide libre dans l'espace ; un point O du corps dans la première position sera venu en O′ dans la nouvelle position : OO′ est le déplacement de ce point. Donnons à tout le corps un déplacement de translation, égal et parallèle à OO′; O viendra en O′, et pour amener le corps dans sa deuxième position, il n'y aura plus qu'à le déplacer autour de O′ considéré comme fixe. Or, ce deuxième déplacement peut se produire par une rotation autour d'un certain axe O′P passant par O′. Tout déplacement d'un corps solide libre peut donc être produit par une translation égale au déplacement d'un de ses points et une rotation autour d'un axe passant par ce point; et il y a évidemment une infinité de manières de produire ainsi le déplacement réel [1].

Cela posé, revenons à notre question du calcul de l'accélération dans le mouvement résultant de deux mouvements quelconques.

29. Théorème de Coriolis. — Soit S la trajectoire relative du point dans le système A et soient M la position du point à l'époque t, P

[1] Parmi toutes ces manières, il en existe toujours une plus simple que les autres, dans laquelle la translation s'effectue parallèlement à l'axe de rotation : le déplacement du corps est alors analogue à celui d'une vis pénétrant dans son écrou (GUILIO MOZZI, *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi*; Napoli, 1763). La droite qui glisse ainsi simplement sur elle-même s'appelle l'*axe central*.

sa position à l'époque $t+\Delta t$; v_r étant la vitesse relative du mobi dans le système A, prenons $MA=v_r\Delta t$: la déviation du premie mouvement est AP.

Soient de même Σ la trajectoire dans le système B du point d

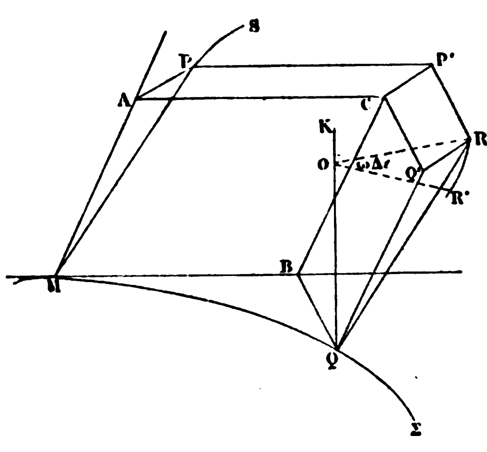


Fig. 30

système A qui est en M à l'époque t et BQ la déviation de ce deuxième mouvement.

Si les deux mouvements étaient rectilignes et uniformes, le point mobile serait à l'époque $t+\Delta t$ au point C, extrémité de la diagonale du parallélogramme construit sur MA et MB. Mais telle n'est pas sa vraie position. Menons CP′ égale et parallèle à AP, CQ′ égale et parallèle à BQ et achevons le parallélogramme P′CQ′R; R serait la position cherchée si le système A n'avait éprouvé aucune rotation. Mais le mouvement de A dans B n'étant pas supposé être exclusivement de translation, nous devons admettre qu'il y a eu, outre la translation, une rotation autour d'un axe QK passant par le point Q. Si ω est la vitesse instantanée de rotation autour de cet axe à l'époque t, pendant le temps Δt la rotation est $\omega\Delta t$ et le point R vient en R′ [1]. La déviation dans le mouvement composé s'obtiendra donc

[1] Dans le cas de la composition des vitesses, ce déplacement RR′ a pu être négligé, de même d'ailleurs que les déviations AP et BQ, parce que toutes ces quantités étant du 2ᵉ ordre, il n'y avait pas alors à en tenir compte; car les grandeurs dont on s'occupait étaient du 1ᵉʳ ordre. On a pu ainsi prendre, *dans tous les cas*, MC comme le déplacement $V\Delta t$ du mouvement résultant.

n composant géométriquement les trois grandeurs CP′, P′R, RR′, t l'accélération du mouvement composé s'obtiendra en composant s limites des rapports

$$2\frac{CP'}{\Delta t^2}, \quad 2\frac{P'R}{\Delta t^2}, \quad 2\frac{RR'}{\Delta t^2}.$$

Les limites des deux premiers rapports sont les accélérations γ_r et γ_e du mouvement relatif et du mouvement d'entraînement du point M, le mouvement d'entraînement du point M étant le mouvement du point du système B avec lequel le mobile coïncide à l'époque t. Quant à la limite du troisième rapport, elle s'obtient aisément en remarquant que

$$\begin{aligned} RR' &= OR \times \omega \Delta t, \\ &= QR \sin KQR \times \omega \Delta t; \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$2\frac{RR'}{\Delta t^2} = 2\frac{QR \sin KQR}{\Delta t}\omega.$$

Mais OR ou QR sin KQR étant du premier ordre, on peut dans son évaluation en vue de la limite cherchée négliger les quantités petites du deuxième ordre. On peut donc dans le produit QR sin KQR remplacer QR par $QQ' = BC = MA = v_r \Delta t$, car la différence entre ces deux lignes est plus petite que Q′R, qui est du deuxième ordre (puisqu'elle est égale à la déviation AP). L'angle QKR est en général fini et l'angle RQQ′ infiniment petit; on peut donc remplacer l'angle KQR par KQQ′, c'est-à-dire par l'angle (ω, v_r) des deux directions QK (ω) et QQ′ ou MA (v_r). On a ainsi pour la limite du troisième rapport

$$2\omega v_r \sin(\omega, v_r).$$

C'est l'*accélération centrifuge composée* γ_c. Elle est égale au double de l'aire du parallélogramme construit sur la vitesse angulaire de rotation et sur la vitesse relative; et il résulte de ce qui précède qu'elle est perpendiculaire au plan de ce parallélogramme et dirigée dans le sens où la rotation entraîne le système; ou bien, ce qui

constitue une règle facile à retenir, *sa direction est telle que l'axe de rotation soit à sa gauche et la vitesse relative à sa droite*, sa droite

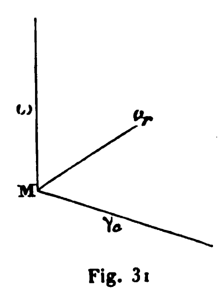


Fig. 31

et sa gauche étant celles d'un observateur placé sur γ_c, les pieds en M, la tête en γ_c, et regardant l'angle (ω, v_r) [1].

L'accélération γ du mouvement résultant s'obtient donc en composant géométriquement:

1° L'accélération relative γ_r;

2° L'accélération d'entraînement γ_e;

3° L'accélération centrifuge composée γ_c :

$$\overline{\gamma} = \overline{\gamma_r} + \overline{\gamma_e} + \overline{\gamma_c},$$

$\overline{\gamma}$, $\overline{\gamma_r}$, $\overline{\gamma_e}$, $\overline{\gamma_c}$ désignant des grandeurs géométriques, et le signe + indiquant une addition géométrique.

Ce théorème est connu sous le nom de *théorème de Coriolis* [2]. Newton avait déterminé l'accélération dans le cas où les axes mobiles ont un simple mouvement d'entraînement, Clairaut dans le cas d'un mouvement plan quelconque; Coriolis le premier résolut la question dans le cas général.

30. Composition des rotations. — Le mouvement d'un corps qui se transporte dans l'espace d'une manière quelconque ne se conçoit pas nettement. On se figure, au contraire, très aisé-

(1) On peut remarquer encore que $\omega v_r \sin(\omega, v_r)$ est en grandeur et en direction la vitesse de l'extrémité v_r de la vitesse relative.

(2) CORIOLIS, *Journal de l'École Polytechnique*, XXIVe cahier, 142; 1835.

nent un mouvement de translation ou un mouvement de rotation autour d'un axe.

Nous avons vu (28) comment tout mouvement d'un corps solide peut être ramené à ces deux mouvements simples.

Nous compléterons ce sujet par l'étude de la composition des rotations.

Soit d'abord *une rotation* ω *à composer avec une translation* v *perpendiculaire à l'axe de rotation* OZ. Considérons un point M situé sur une normale OM au plan ZOA de la rotation $Oc = \omega$ et de la

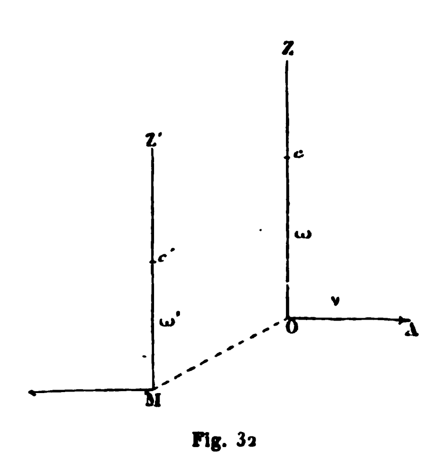


Fig. 32

vitesse $OA = v$. La vitesse de rotation du point M est $\omega \times OM$ et elle est dirigée, comme l'indique la figure, d'après notre convention fondamentale. Si donc nous prenons

$$\omega \times OM = v,$$

la vitesse du point M sera nulle. MZ′ sera une droite dont tous les points seront immobiles à l'instant considéré : ce sera l'axe instantané de rotation. Et la vitesse angulaire ω' autour de cet axe est précisément ω ; car O ne devant avoir que la vitesse de translation v, il faut que la rotation ω' lui donne une vitesse

$$\omega' \times MO = v,$$

c'est-à-dire que $\omega' = \omega$.

Les deux mouvements seront ainsi remplacés par une rotat unique ω autour de OZ'.

Si la translation, au lieu d'être perpendiculaire à OZ, est qu conque, on la décomposera en deux, l'une perpendiculaire, l'au parallèle à l'axe. En composant la première avec la rotation, on a une rotation qui, jointe à la translation parallèle à l'axe, donnera mouvement hélicoïde.

Soient maintenant *deux rotations* de même sens ω et ω' *autour*

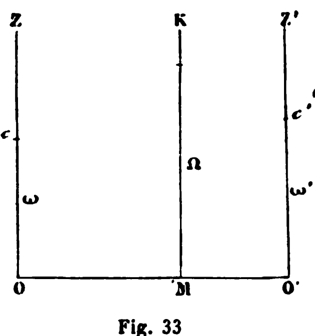


Fig. 33

deux axes parallèles OZ et O'Z'. Menons un plan perpendiculaire au deux axes, les deux mouvements simultanés donnent à ce plan u déplacement sur lui-même. Il y a donc dans le plan un point do la vitesse est nulle, et par suite dans le corps un axe fixe perpe diculaire au plan. Cherchons cet axe instantané de rotation. Si l point M pris sur la droite OO' satisfait à la relation

$$\omega \times OM = \omega' \times O'M,$$

ou

$$\frac{OM}{\omega'} = \frac{O'M}{\omega},$$

MK est l'axe instantané de rotation, c'est-à-dire qu'une rotati unique Ω autour de MK produit la vitesse résultante des deux vitess dues aux rotations proposées. Pour déterminer Ω, écrivons que l vitesse $\Omega \times MO'$ que donne au point O' la rotation Ω est égale à l vitesse unique $\omega \times OO'$ qu'il a par hypothèse :

$$\Omega = \frac{\omega \times OO'}{MO'}.$$

Mais en combinant par addition les rapports égaux

$$\frac{\omega}{O'M} = \frac{\omega'}{OM},$$

on obtient

$$\omega + \omega' = \frac{\omega \times OO'}{O'M}.$$

Donc

$$\Omega = \omega + \omega'.$$

Ainsi, deux rotations de même sens autour de deux axes parallèles peuvent être remplacées par une rotation unique, de même sens que les rotations composantes, autour d'un axe parallèle à leurs axes et avec une vitesse angulaire égale à la somme des vitesses angulaires de ces deux rotations.

Si les deux rotations étaient de sens contraire et inégales : $\omega > \omega'$.

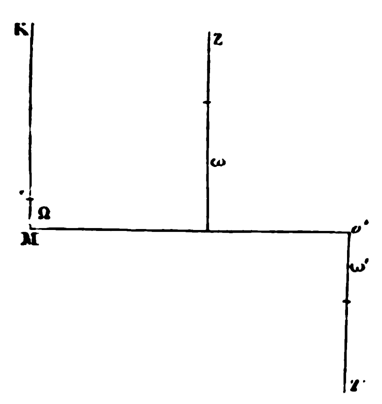


Fig. 34

la situation de l'axe instantané serait encore définie par la relation

$$\omega \times OM = \omega' \times O'M$$

et la vitesse résultante Ω serait égale à la différence des vitesses composantes

$$\Omega = \omega - \omega'.$$

Mais quand les deux rotations de sens contraire sont égales, il y a impossibilité : on a un *couple de rotation*, suivant une expression empruntée à la théorie des forces.

On voit aisément qu'*un couple de rotation équivaut à une translation* avec la vitesse $\omega \times OO'$.

Considérons enfin le cas de *deux rotations autour de deux axes quelconques* passant par un même point.

On suppose que le corps tourne d'un mouvement uniforme autour de OZ′, tandis que le plan Z′OZ tourne autour de OZ. La vitesse du mouvement résultant d'un point quelconque résulte de la composition des deux vitesses. Mais le point O reste fixe : on peut donc produire la vitesse résultante de chaque point du corps, en le faisant tourner autour d'un axe passant par O. Prenons sur OZ, OZ′, les longueurs OC, OC′, qui mesurent ω, ω', et construisons le parallélogramme OCC′K : la diagonale OK est l'axe de la rotation résul-

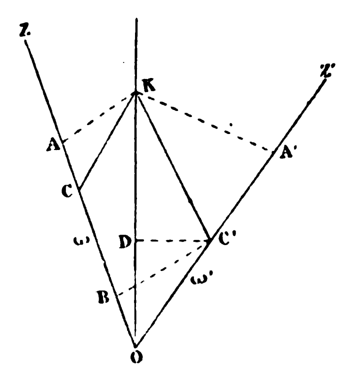


Fig. 35

tante. En effet les vitesses du point K sont $\omega \times KA$, $\omega' \times KA'$, vitesses égales (d'après l'égalité des aires KCO, KC′O) et de sens contraire : par suite le point K est immobile. Quant à la vitesse de la rotation résultante, elle est déterminée par la condition

$$\omega \times C'B = \Omega \times C'D.$$

Mais l'égalité des aires des deux triangles KCO, KC′O donne

$$OC \times C'B = OK \times C'D.$$

Donc

$$\frac{\Omega}{\omega}=\frac{OK}{OC},$$

c'est-à-dire que OK représente la rotation résultante. Il est d'ailleurs aisé de voir que le sens de cette rotation est le même que celui des deux premières. La diagonale OK représente donc bien en grandeur et en direction la vitesse angulaire de la rotation résultante. Ainsi se trouve établie la règle du parallélogramme des rotations due à Lagrange ([1]).

Si les deux axes ne se rencontraient pas, en menant par un point quelconque de l'un d'eux une parallèle à l'autre et en imaginant autour de cette parallèle deux rotations égales et de sens contraire, on ramènerait aisément les deux rotations à une rotation et à une translation (représentée par un couple de rotation).

Si l'on a *un nombre quelconque de rotations autour d'axes quelconques*, en menant par un point O quelconque du corps des parallèles aux axes des diverses rotations, on réduit toutes ces rotations à une rotation unique autour d'un axe passant par ce point O et à une translation ; il y a évidemment une infinité de manières de faire cette composition ([2]).

II. — STATIQUE.

31. Force. — On appelle *force* tout ce qui est capable de modifier l'état de repos ou de mouvement d'un corps.

La notion de la force est une des plus simples et des plus certaines : elle nous vient de l'expérience de chaque instant. Nous ne pouvons changer un corps de place, le déformer, le briser sans avoir conscience de l'effort que nous produisons. Nous voyons aussi immédiatement que dans toute force il y a trois choses à distinguer : le point d'application, la direction et l'intensité ; et ces choses sont

([1]) LAGRANGE, *Mécanique analytique* ; Paris, 1788.

([2]) Parmi ces manières, il en est une qui redonne le mouvement hélicoïde. On retrouve donc ainsi l'*axe central* et en même temps un moyen facile de le déterminer.

si simples qu'il suffit de les nommer sans avoir autrement besoin d les définir.

Lorsque plusieurs forces agissant simultanément sur un corp en repos le laissent en repos, on dit qu'elles se font *équilibre* La science de l'équilibre des forces est la *statique* (στατική), bran che purement rationnelle de la mécanique, comme la cinéma tique; mais ici l'idée nouvelle qui vient s'ajouter à l'idée d'es pace, unique base de la géométrie, est l'idée de force. Cett idée une fois introduite, la statique procède géométriquement L'étude de la statique précédera donc logiquement celle de l dynamique, comme la formation de la statique a précédé cell de la dynamique des dix-huit siècles qui séparent Archimède d Galilée [1].

32. Mesure des forces : dynamomètres. — On appelle forces égales deux forces qui appliquées au même point en sens contraire se font équilibre. Une force est dite double d'une autre quand elle fait équilibre à deux forces égales à cette autre, sollicitant le même point dans la même direction. Une force est triple d'une autre quand elle fait équilibre à trois forces égales à cette autre, et ainsi de suite. Les intensités des forces peuvent donc être exprimées en fonction de l'une quelconque d'entre elles prise comme unité, c'est-à-dire mesurées.

Une force étant évaluée en nombre, on pourra la représenter par une longueur proportionnelle à ce nombre, portée dans la direction de la force à partir du point d'application : la force se trouvera ainsi représentée géométriquement.

L'unité ordinairement adoptée en mécanique est le kilogramme, c'est-à-dire la force avec laquelle la pesanteur sollicite un litre d'eau mesuré à 4°.

La comparaison des forces avec l'unité se fait au moyen des dynamomètres (δύναμις, force ; μέτρον, mesure).

Ces appareils se composent tous essentiellement d'un ressort dont on peut noter la flexion : une force quelconque appliquée à l'instrument et produisant la même flexion qu'un poids de n kilogram-

[1] Voir DUHAMEL, *Cours de mécanique*; Paris, 1853 : *Préface* et *Statique*.

mes vaut n kilogrammes. L'instrument est donc gradué préalablement avec des poids connus.

Le plus simple des dynamomètres est le *peson* du commerce. Il se compose d'un ressort en forme de V ; chaque branche porte un arc de cercle métallique qui lui est fixé normalement et traverse l'autre branche. A l'extrémité libre de l'un de ces arcs on peut suspendre un poids ou appliquer une force quelconque. L'autre arc se termine par un anneau destiné à soutenir ou à suspendre l'instrument. Ce second arc est gradué depuis l'extrémité jusqu'à un talon ménagé pour prévenir la détérioration de l'appareil dans le cas où on y appliquerait par mégarde une force capable de faire fléchir le ressort au delà de sa limite d'élasticité.

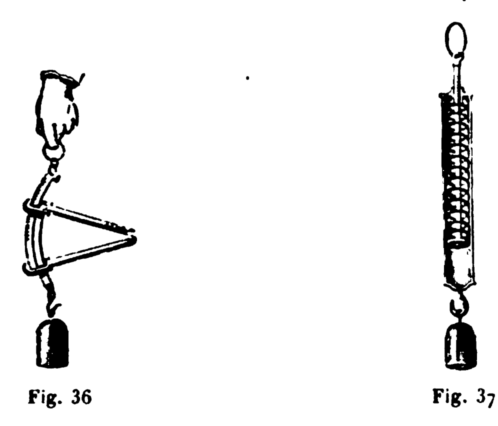


Fig. 36 Fig. 37

Dans d'autres pesons, le ressort est disposé en hélice à l'intérieur d'un tube fermé à ses deux bouts et s'appuie contre la base supérieure du tube, d'une part, et contre un piston mobile, d'autre part. La tige du piston est graduée expérimentalement et se termine par un anneau servant à fixer l'appareil. La force s'applique à un crochet implanté dans la base inférieure du tube. Elle tire la base supérieure du tube vers le piston et met à découvert une portion de la tige d'autant plus longue que la force est plus intense : on lit immédiatement cette intensité sur la tige.

Destiné aux forces plus intenses, le *dynamomètre de Régnier* consiste essentiellement en un ressort à deux branches réunies par leurs extrémités. On fixe le milieu de l'une des branches et l'on applique

au milieu de l'autre la force à mesurer sous forme de pression, en ayant soin d'orienter la ligne des milieux suivant la direction même

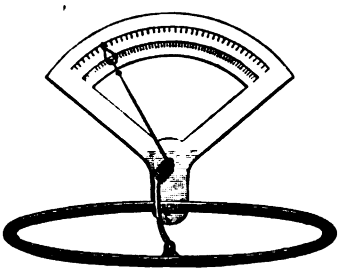


Fig. 38

de cette pression. Les branches se rapprochent, faisant mouvoir une aiguille sur un cadran. On emploie aussi l'appareil d'une autre manière : fixant l'une des extrémités des branches, on applique la force à l'autre ; ces deux extrémités s'éloignent, le système s'aplatit donc encore : une pointe intérieure de l'aiguille mesure la force sur un deuxième arc concentrique au premier. Ce second mode est pratiqué quand on a affaire à des forces plus intenses, la force musculaire d'un cheval par exemple.

Dans tous ces appareils la sensibilité diminue quand la force devient un peu considérable : le déplacement de l'index pour un même accroissement de la force est d'autant plus petit que la déformation

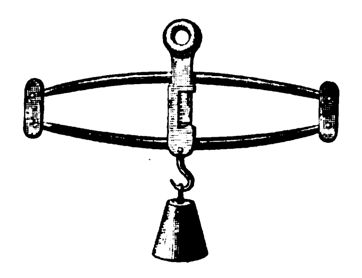


Fig. 39

du ressort est déjà plus grande. Cet inconvénient n'existe plus dans le *dynamomètre Poncelet*, constitué simplement par deux lames d'acier égales et parallèles, articulées à leurs extrémités. On fixe le milieu de l'une d'elles, on applique la force au milieu de l'autre et on lit directement l'écart sur une règle divisée fixée à l'une des lames

et devant laquelle glisse un index attaché à l'autre lame. Quand les forces sont considérables, on taille les lames, comme l'a fait *Morin*, suivant la forme parabolique : avec cette forme la résistance de la lame à la rupture est la même sur toute sa longueur ; en outre la flexion est double pour un même effort, la sensibilité de l'instrument est donc accrue. Morin a trouvé que la proportionnalité entre la force agissante et la flexion produite se maintenait jusqu'à la flexion égale au 0,1 de la longueur des lames.

Il est souvent précieux d'obtenir une trace permanente des flexions du ressort d'un dynamomètre. Il suffit pour cela de fixer au ressort un style appuyant sur une bande de papier qui se déroule d'un mouvement continu. Un second style porté par une bride d'arrêt trace sur le papier une ligne qui correspond à un effort nul. L'ordonnée de la courbe tracée par le style mobile donne à chaque instant l'effort exercé [1].

33. Composition des forces concourantes. — Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un même point et qu'elles ne se font pas équilibre, il existe toujours une force unique ou *résultante* pouvant les remplacer. En effet par l'action des forces proposées, le point tend à se mouvoir dans une certaine direction déterminée ; et il est évident qu'une force unique appliquée dans cette direction en sens contraire et avec une intensité convenable maintiendrait le point en équilibre. Soit — P cette force. Introduisons au point considéré deux forces égales et opposées — P et P (ce qui évidemment ne changera rien à l'effet des premières forces). Or. par hypothèse. — P détruit l'ensemble des forces proposées ; il ne reste donc que la force P. Et l'on voit que la recherche de cette résultante P, étant données les forces proposées ou *composantes*, est un problème d'équilibre.

Cette recherche repose sur le principe suivant : *Une force étant donnée, on peut l'appliquer à tout autre point de sa direction, pourvu que ce nouveau point d'application soit invariablement lié au premier*. Soit F la force donnée, appliquée en A, et soit B un point de sa direction relié à A par une droite AB inflexible et inexten-

[1] Morin, *Notice sur divers appareils dynamométriques* ; Paris, 1841.

sible. En B appliquons deux forces égales et opposées — F et F. Mais les deux points A et B étant invariablement liés l'un à l'autre

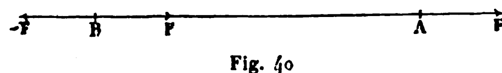


Fig. 40

les deux forces, F appliquée en A et — F appliquée en B, se détruisent évidemment ([1]). Il ne reste donc plus que la force F appliquée en B, laquelle n'est autre que la force proposée dont le point d'application a été transporté de A en B.

On verrait facilement que dans un système libre il n'y a pas d'autre manière licite de transporter une force.

On verrait aussi aisément que la proposition réciproque est vraie : *Si une force* F *agissant sur un point libre* A *peut être transportée en un point* B *lié au premier, ce deuxième point est sur la direction de la force.*

Cela posé, considérons deux forces appliquées à un même point. Nous savons que dans ce cas il y a toujours une résultante et nous pouvons ajouter une seule.

D'une manière générale, en effet, *un système quelconque de forces ne peut pas admettre deux résultantes distinctes* R et R'. Si, en effet, R' est résultante, — R' fait équilibre aux forces proposées, — R' fait donc équilibre à R qui les remplace et par suite est égale et directement opposée à R. R' se confond donc avec R : la résultante est une.

Cherchons d'abord la direction de cette résultante. Il est clair qu'elle est nécessairement comprise dans le plan des deux forces et à l'intérieur de l'angle formé par leur direction ([2]). Si les deux forces sont égales, la direction de leur résultante est évidemment la bissectrice de l'angle des deux forces.

([1]) Nous regardons comme évident que deux forces égales et contraires, appliquées à deux points liés par une droite de longueur invariable et agissant dans la direction de cette droite, se font équilibre.

([2]) Il est bon de remarquer que cette évidence découle en réalité du principe de la composition des mouvements, de sorte que cette démonstration du parallélogramme des forces, qui est essentiellement celle de D. Bernoulli (*Commentaires de l'Académie de Pétersbourg*, I; 1726) ne réussit pas à s'affranchir de l'idée de mouvement. Mais « il serait assez extraordinaire qu'on pût démontrer la pro-

Remarquons enfin que, lorsque deux forces sont appliquées à un même point elles peuvent être transportées parallèlement à elles-mêmes en un point, quelconque de la direction de leur résultante, pourvu que ce point soit invariablement lié au premier; car ces forces peuvent être remplacées par une seule, leur résultante, qui peut être appliquée en un point quelconque de sa direction. Or, en ce point, elle peut être décomposée comme au premier point d'application; ce qui donne finalement deux forces égales et parallèles aux premières, appliquées en un point quelconque de la résultante.

Soient maintenant deux forces AM et AN ayant une commune mesure, contenue 5 fois, par exemple, dans AM et 3 fois dans AN. Décomposons la force AM en 5 forces égales, AB, BC,..... res-

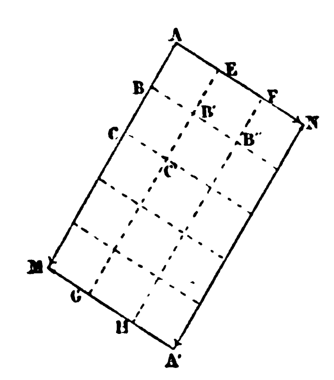


Fig. 41

pectivement appliquées en A, B, C,..... Décomposons de même la force AN en 3 parties AE, EF, FN; par les points B, C..... menons des parallèles à AN et par les points E, F, N des parallèles à AM. Lions les sommets de tous les losanges ainsi formés. Les deux forces égales AB, AE, dont la résultante est dirigée suivant la diagonale AB′ du losange ABEB′ peuvent être transportées parallèle-

priété fondamentale des forces sans s'appuyer sur leur définition, qui les présente comme des causes de mouvement. » (Bour, *Cours de mécanique et machines*; Paris, 1865-68 : *Statique*, 45.)

Cela ne veut point dire toutefois qu'on doive nécessairement présenter la composition des forces comme un simple corollaire de la composition des accélérations. Il est bon de conserver à chaque branche de la mécanique son indépendance, tout en constatant les rapports étroits que ces diverses sciences offrent entre elles.

ment à elles-mêmes au point B′ : on aura ainsi deux forces B′C′ et B′B″ que l'on peut transporter l'une en EB′, l'autre en BB′. En agissant de même sur les deux forces BC et BB′ on les transportera en B′C′ et CC′ ; et en continuant ainsi on transportera finalement la force AM en EG et la force AE en MG. Les forces EG et EF pourront ensuite être transportées en FH et GH ; et enfin FH et FN en NA′ et HA′ ; de sorte que les deux forces AM, AN seront transportées en NA′, MA′ sans que leur effet soit changé. La résultante de ces deux forces peut donc aussi être transportée au point A′ ; le point A′ appartient donc à la direction de la résultante ; et par conséquent cette direction coïncide avec celle de la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces proposées AM et AN.

Le théorème s'étend comme d'habitude au cas où les forces n'ont pas de commune mesure.

Il reste à déterminer l'intensité de la résultante. Soient AM et AN les deux forces proposées ; si nous appliquons, suivant la direction opposée à celle de la diagonale AP du parallélogramme MANP, une force AP′ égale et contraire à la résultante inconnue, il y aura équilibre entre les trois forces AM, AN et AP′ : une quelconque d'entre elles, AM, fait

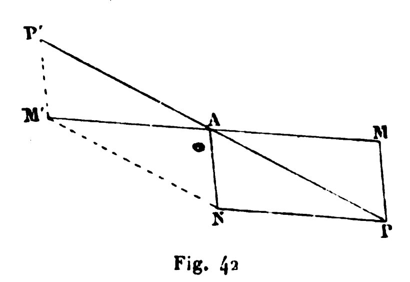


Fig. 42

donc équilibre aux deux autres AN et AP′. La résultante des deux forces AN et AP′ doit donc être égale à AM et dirigée en sens contraire ; en d'autres termes, pour déterminer P′ on a à construire un parallélogramme connaissant un côté AN, la direction d'un autre côté AP′ et la diagonale AM′, question purement géométrique. Par le point N menons NM′ parallèle à PP′ et par le point M′, où cette parallèle rencontre AM prolongée, M′P′ parallèle à AN : AP′ représentera l'intensité de la force AP′, puisque le parallélogramme construit sur la longueur AP′ ainsi déterminée et sur AN a pour dia-

gonale AM'. Mais AP' = M'N = AP. Donc *la résultante de deux forces quelconques est représentée en grandeur, comme en direction, par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces.*

On peut dire aussi que *la résultante de deux forces est la somme géométrique de ces deux forces.*

Cette règle s'étend à un nombre quelconque de forces appliquées à un même point matériel. La résultante se calculera donc dans tous les cas d'après les règles générales de l'addition des grandeurs géométriques, ainsi qu'il a été expliqué à propos des vitesses.

34. Équilibre des forces concourantes. — Pour que plusieurs forces F, F', F''... appliquées à un même point matériel se fassent équilibre, il faut et il suffit que leur résultante soit nulle. L'une quelconque d'entre elles est alors égale et opposée à la résultante de toutes les autres. Dans le cas particulier de trois forces, il en résulte immédiatement que les trois forces proposées sont situées dans un même plan et qu'elles satisfont aux relations :

$$\frac{F}{\sin(F',F'')} = \frac{F'}{\sin(F'',F)} = \frac{F''}{\sin(F,F')}.$$

35. Théorème de Varignon. — On appelle *moment d'une force par rapport à un point* le produit de l'intensité de la force par la perpendiculaire abaissée sur la direction de la force. Ainsi

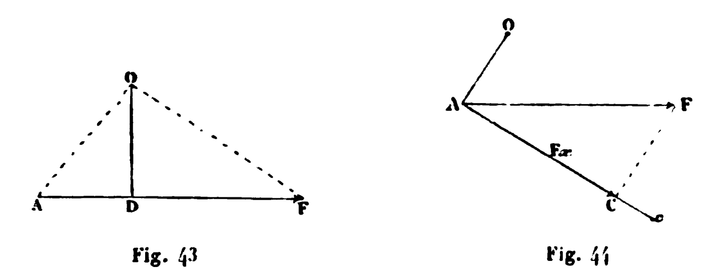


Fig. 43 Fig. 44

le moment de la force AF par rapport au point O est égal à AF multiplié par OD. C'est le double de l'aire du triangle AOF. C'est aussi le produit du rayon vecteur OA par la projection AC $= F_x$ de la force sur une droite Ax perpendiculaire au rayon vecteur. Donc,

un nombre quelconque de forces étant appliquées au point A, on

$$\Sigma \mathcal{M}'F = \Sigma(F_x.OA) = OA.\Sigma F_x.$$

Mais $\Sigma F_x = R_x$, projection de la résultante sur Ax et $OA.R_x$ c'est l
moment de la résultante, on a donc

$$\Sigma \mathcal{M}'F = \mathcal{M}'R$$

c'est-à-dire que le *moment de la résultante d'un nombre quelconqu de forces appliquées à un même point et situées dans un même pla est égal à la somme algébrique des moments des composantes ;* l moment d'une force étant regardé comme positif ou négatif, selo que la force tend à faire tourner le point dans le sens positif (28 ou dans le sens négatif.

36. Composition des forces parallèles. — La compositio de forces parallèles présente assurément moins de difficultés que l composition de forces concourantes; la loi du levier était connu d'Archimède, qui en avait fait la base de la statique, tandis que l loi du parallélogramme des forces ne remonte guère qu'à Galilée. Mais, cette loi du parallélogramme une fois établie, la compositio des forces parallèles s'en déduit si aisément que nous l'y rattacherons simplement ainsi :

Soient deux forces parallèles et de même sens F et F' appliquées aux deux extrémités d'une droite solide AB. En A et B appliquons deux forces égales et opposées AC, BD; ces deux forces se font équilibre et ne changent rien à l'état du système. Les deux forces AC, AM appliquées au point A se composent en une seule, AH, suivant le parallélogramme CAMH. De même les deux forces BD et BN, appliquées au point B, se composent en une seule, BL, suivant le parallélogramme BDLN. Les deux droites AH et BL, situées dans un même plan et non parallèles, se coupent en un point O; en ce point O transportons d'une part les forces F et AC, d'autre part les forces F' et BD. Nous avons alors quatre forces appliquées au

point O : les deux forces OC′ et OD′, égales et directement opposées, qui se détruisent ; et les deux forces OM′ et ON′ qui s'ajoutent et donnent une *résultante égale à la somme* F + F′ *et parallèle à la direction des forces proposées*. On peut d'ailleurs transporter cette résultante au point I où sa direction rencontre la droite AB. La position du point I se détermine aisément. Les triangles semblables AHM et OAI donnent $\frac{IA}{IO}=\frac{MH}{F}$; de même, dans les triangles semblables BLN et OBI, on a $\frac{IB}{IO}=\frac{NL}{F'}$; d'où en divisant :

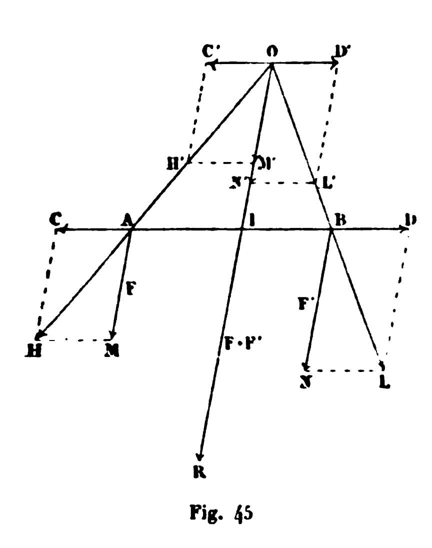


Fig. 45

$$\frac{IA}{IB}=\frac{F'}{F}.$$

Ainsi, *les distances du point d'application de la résultante aux points d'application des composantes sont en raison inverse des intensités de ces composantes.*

La même relation peut s'écrire

$$\frac{F}{IB}=\frac{F'}{AI}=\frac{F+F'}{AB}.$$

Chacune des trois forces F, F' *et* F+F' *est proportionnelle à la distance des points d'application des deux autres.*

Soient maintenant deux forces parallèles et de sens contraire, F et —F', appliquées aux deux extrémités de la droite solide AB; et soit, en valeur absolue, F > F'; nous pouvons décomposer la force F en

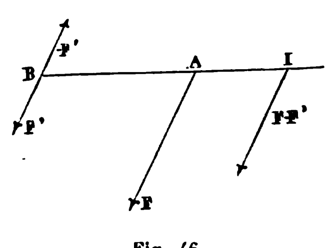


Fig. 46

deux autres parallèles et de même sens, l'une F' appliquée au point B, et l'autre F—F' appliquée en un point I tel que $\frac{IA}{BA}=\frac{F'}{F-F'}$. Mais les deux forces F' et — F' appliquées en B, égales et de sens contraire, se détruisent; il reste donc seulement la force F—F' appliquée au point I. Ainsi, les deux forces proposées admettent une résultante égale à leur différence, parallèle à leur direction commune et dirigée dans le sens de la plus grande; la relation $\frac{IA}{AB}=\frac{F'}{F-F'}$ peut d'ailleurs s'écrire $\frac{IA}{IA+AB}=\frac{F'}{F}$,

ou

$$\frac{IA}{IB}=\frac{F'}{F},$$

ce qui montre que la position du point I est encore déterminée dans ce cas par la règle donnée plus haut.

La démonstration se trouve en défaut dans le cas où F—F'=o. On appelle *couple* un tel système de deux forces, égales, parallèles et de sens contraire.

Un couple n'a pas de résultante; car, s'il y avait une résultante OR, en faisant tourner le couple de 180° dans son plan de façon que les

forces F et $-$F se remplacent l'une l'autre, on voit qu'il devrait y en

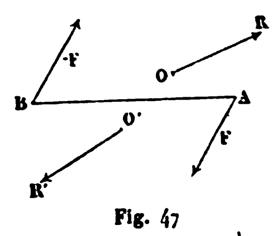


Fig. 47

avoir une autre O'R'; et un système quelconque de forces ne peut pas admettre deux résultantes distinctes.

Considérons maintenant un nombre quelconque de forces parallèles non situées dans un même plan, et supposons-les d'abord toutes de même sens. En composant deux d'entre elles en une seule, puis celle-ci avec une troisième et ainsi de suite, on obtiendra la résultante de toutes les forces proposées; cette résultante sera égale à leur somme, parallèle à la direction commune des forces, de même sens qu'elles, et appliquée en un point qui ne dépend que de la position des points d'application des forces données et du rapport de ces forces, mais nullement de leur grandeur absolue, ni de la direction à laquelle elles sont parallèles : ce point d'application se nomme *centre des forces parallèles*. Si les forces sont dirigées dans l'un et l'autre sens, on les réduira à deux forces respectivement égales à la somme de celles qui agissent dans chacun des deux sens : ces deux forces parallèles et de sens contraire ont une résultante si elles sont inégales; elles se font équilibre ou se réduisent à un couple si elles sont égales. Le point d'application de la résultante, quand il y en a une, jouit des mêmes propriétés que dans le cas où les forces sont toutes de même sens, et s'appelle encore centre des forces parallèles.

La position du centre des forces parallèles se détermine analytiquement au moyen du théorème des moments des forces parallèles.

37. Théorème des moments des forces parallèles. — On appelle *moment d'une force par rapport à un plan* qui lui est parallèle, le produit de l'intensité de la force par la distance de la

force au plan. Considérons d'abord deux forces parallèles et de même sens F et F′ appliquées aux points A et B et leur résultant

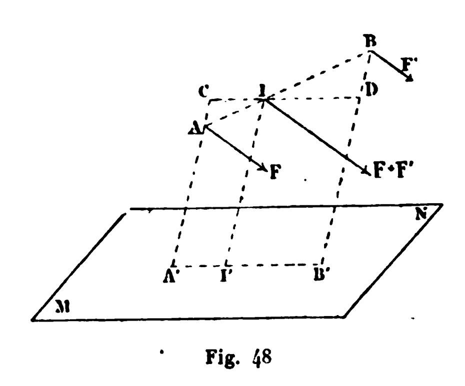


Fig. 48

F+F′ appliquée au point I tel que $\frac{IA}{IB}=\frac{F'}{F}$. Soit MN un plan parallèl aux forces.; des points A, B et I abaissons les perpendiculaires AA′ BB′, II′ sur le plan MN : je dis que

$$(F+F')\times II'=F\times AA'+F'\times BB'.$$

Pour le prouver, par le point I menons CD parallèle à A′B′, on a

$$\frac{AC}{BD}=\frac{IA}{IB}=\frac{F'}{F},$$

d'où

$$F\times AC=F'\times BD,$$

ou

$$F\times(II'-AA')=F'\times(BB'-II'),$$

ou enfin

$$(F+F')\times II'=F\times AA'+F'\times BB';$$

donc le moment de la résultante des deux forces F et F′ est égal au moment des composantes.

Si les deux forces parallèles F et F′ étaient de sens contraire, on verrait facilement que le moment de la résultante est égal à la différence des moments des composantes. On peut comprendre les deux théorèmes dans un même énoncé en disant que *le moment d*

la résultante de deux forces parallèles est dans tous les cas égal à la somme algébrique des moments des composantes. Le théorème s'étend à un nombre quelconque de forces parallèles.

38. Centre des forces parallèles. — Pour déterminer le centre des forces parallèles, on appliquera le théorème des moments à chacun des trois plans coordonnés, en supposant que les forces deviennent parallèles successivement à chacun des plans, le centre des forces parallèles étant indépendant de la direction des forces. Soient x, y, z les coordonnées du point d'application de la force F, x', y', z' celles du point d'application de la force F', etc., X, Y, Z les coordonnées du point d'application de la résultante R; on aura ainsi les trois équations

$$\begin{aligned} RX &= Fx + F'x' + \cdots \quad \text{ou} \quad \sum Fx, \\ RY &= Fy + F'y' + \cdots \quad \text{ou} \quad \sum Fy, \\ RZ &= Fz + F'z' + \cdots \quad \text{ou} \quad \sum Fz, \end{aligned}$$

qui déterminent la position du centre des forces parallèles. L'intensité de la résultante est d'ailleurs connue et égale à

$$R = F + F' + \cdots \quad \text{ou} \quad \sum F.$$

Considérons, par exemple, les actions exercées par la pesanteur sur tous les éléments d'un corps : ces actions constituent un système de forces parallèles que l'on peut remplacer par une résultante unique P appliquée en un point (X, Y, Z) que l'on appelle le *centre de gravité* du corps. On a donc, en désignant par p le poids d'un élément situé en (x, y, z) :

$$P = \Sigma p$$

et

$$PX = \Sigma px, \qquad PY = \Sigma py, \qquad PZ = \Sigma pz.$$

39. Du couple. — Revenons maintenant au cas du couple dont Poinsot a fait une étude spéciale ([1]).

([1]) Poinsot, *Eléments de Statique*; Paris, 1804.

Soit un couple F, —F; on appelle *bras de levier* du couple la plus courte distance AB des deux droites suivant lesquelles agissent les

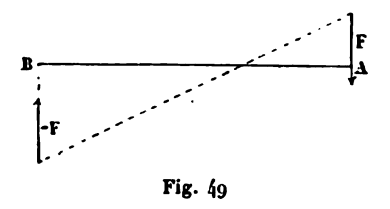


Fig. 49

deux forces F et —F. D'après ce que nous savons sur la possibilité de transporter le point d'application d'une force en un point quel-

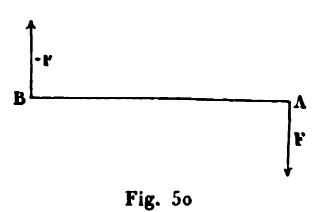


Fig. 50

conque de sa direction, les deux forces F et —F peuvent toujours être supposées appliquées en A et B.

Un couple peut être transporté parallèlement à lui-même dans l'espace, et on peut le faire tourner dans son plan comme l'on veut autour d'un point, pourvu que le nouveau bras de levier soit invariablement lié au premier.

1° Pour établir la première partie du théorème, considérons le bras

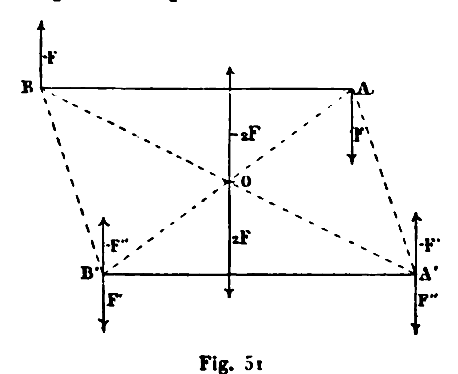


Fig. 51

de levier AB transporté parallèlement à lui-même en A′B′; appliquons en A′ deux forces égales et contraires F″ et —F′ égales aux

forces F ; appliquons de même en B deux forces égales et contraires F′ et —F″ encore égales aux forces F. L'introduction de ces quatre forces F″, — F′, F′, —F″, qui se détruisent deux à deux, est évidemment permise. Mais les deux forces égales et de même sens —F et —F′ ont une résultante égale à —2F, parallèle à leur direction commune et appliquée au milieu O de la distance BA′; les forces F et F′ admettent également une résultante 2F, parallèle à la même direction et appliquée au même point O. Ces deux résultantes —2F et 2F se détruisent. Il reste donc seulement les deux forces F″ et —F″ respectivement appliquées en A′ et B′, c'est-à-dire le couple F, —F transporté parallèlement à lui-même.

2° Je dis en second lieu qu'on peut faire tourner le couple dans son plan d'un angle quelconque autour d'un point O, que je puis supposer au milieu de AB, puisqu'une translation, autorisée par la première partie du théorème, permet toujours d'amener le milieu du bras de levier sur le point O. Soit A′B′ la nouvelle position du bras de levier AB. En A′ appliquons deux forces F″ et —F′ égales

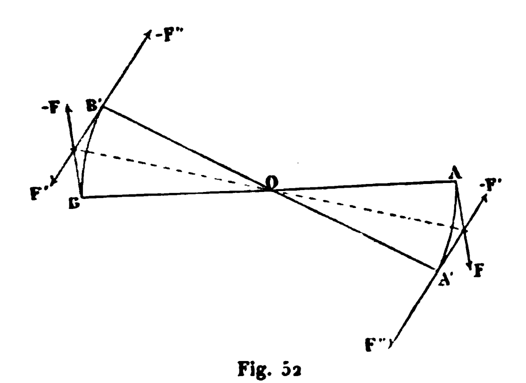


Fig. 52

entre elles et aux forces F et opposées ; appliquons de même en B′ deux forces opposées F′ et — F″ égales encore aux forces F. Les deux forces concourantes égales F et —F′ ont une résultante dirigée suivant la bissectrice de leur direction, laquelle n'est autre que la bissectrice de l'angle AOA′; les deux forces —F et F′ ont une résultante dirigée suivant la même ligne en sens contraire et égale en valeur absolue à la résultante précédente : ces deux résultantes se détruisent. Il reste donc seulement

les deux forces F'' et $-F''$, c'est-à-dire le couple proposé amené en $A'B'$.

On peut donc toujours donner à un couple telle position que l'on veut dans son plan ou dans un plan parallèle, pourvu que le nouveau bras de levier soit invariablement lié au premier.

On appelle *moment d'un couple* le produit de l'une des forces du couple par le bras de levier : $F \times AB$ est le moment du couple $F, -F$ de bras de levier AB. Ce moment est la véritable mesure du couple.

On peut toujours, en effet, *remplacer un couple donné par un autre couple* (situé dans le même plan ou dans un plan parallèle) *de même moment que le premier*. Soit toujours $F, -F$ le couple

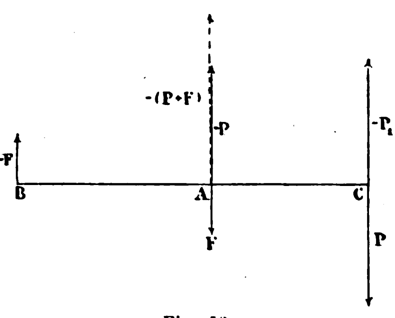


Fig. 53

donné de levier AB ; et soit AC le bras de levier que l'on veut donner au couple par lequel on se propose de remplacer le couple AB. On ne changera pas l'état du système en appliquant au point C deux forces égales et contraires P et $-P_1$. Prenons ces forces perpendiculaires à AC et donnons-leur une intensité P définie par la relation

$$P \times AC = F \times AB.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\frac{P}{AB} = \frac{F}{AC} = \frac{P+F}{BC};$$

en d'autres termes, les deux forces $-P_1$ et $-F$ appliquées en C et B, forces parallèles et de même sens, peuvent être remplacées par une force unique, de même direction, $-(P+F)$, appliquée en A. Mais

les deux forces directement opposées $-(P+F)$ et F appliquées en A se réduisent à une force unique $-P$ appliquée au même point A. Il reste donc seulement les deux forces, $-P$ appliquée en A et P appliquée en C. Le couple F, $-F$ se trouve donc remplacé par le couple P, $-P$ de même moment. Deux couples de même moment sont donc équivalents.

Le moment représente l'une des deux forces égales et contraires du couple ramené à un bras de levier égal à l'unité.

A l'aide des théorèmes précédents on peut *composer les couples* comme les forces.

Soient d'abord deux couples agissant dans le même plan ou dans des plans parallèles, on peut les composer en un seul. Amenons en

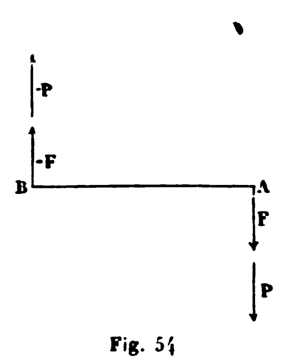


Fig. 54

effet le deuxième couple P, $-P$ à avoir même bras de levier AB que le premier F, $-F$, ce qui est toujours possible d'après ce que nous avons établi précédemment. Il pourra alors arriver que la force P appliquée en A tire dans le même sens que la force F appliquée au même point, ou qu'elle agisse en sens contraire. Supposons d'abord les forces F et P de même sens : elles peuvent être remplacées par leur somme $F+P$; de même les forces $-F$ et $-P$ peuvent être remplacées par une force unique $-(F+P)$. On n'a plus alors qu'un couple $F+P$ et $-(F+P)$ de levier AB, c'est-à-dire un couple dont le moment est égal à la somme des moments des couples composants. Si les forces F et P étaient de sens contraire, le moment du couple résultant serait la différence des moments des couples composants et le couple résultant agirait dans le même sens que le plus grand des couples composants.

Poinsot représente très simplement cette composition dans tou les cas, au moyen de l'*axe du couple*. Ayant pris un point quel conque O dans l'espace, amenons le couple proposé à une positio telle que son bras de levier AB passe par le point O. Élevons en O la perpendiculaire au plan du couple; prenons sur cette perpendi culaire une longueur Oa égale au moment du couple; convenon

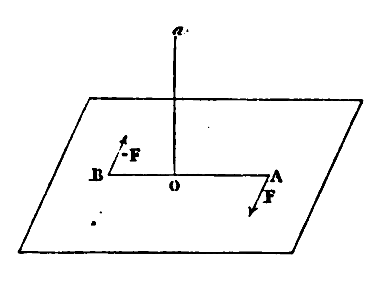


Fig. 55

enfin de porter la longueur Oa dans un sens ou dans l'autre, suivant le sens dans lequel agit le couple; et le couple sera com- plètement représenté par cette ligne Oa ou axe du couple. Pou fixer le sens dans lequel on portera la longueur Oa, on convient qu'un spectateur placé sur Oa, les pieds en O, la tête en a et regardant la droite AB, doit voir cette droite sollicitée par le couple à tourner dans le sens positif (28). Les couples sont dès lors figurés géométriquement comme les forces par une ligne donnée en grandeur et en direction. Seulement, dans le cas des couples, cette ligne peut être transportée parallèlement à elle-même d'une manière quelconque, tandis que la ligne repré- sentative d'une force ne peut être transportée que le long de sa propre direction.

La composition de deux couples situés dans le même plan ou dans des plans parallèles se fera simplement en ajoutant algébri- quement les axes des deux couples.

Soient maintenant deux couples quelconques situés dans des plans différents. Sur la commune intersection de ces deux plans pre- nons une longueur AB égale à l'unité; faisons de cette longueur le bras de levier de chacun des deux couples. Soient alors F, —F et P, —P les deux couples: on peut remplacer les forces F et P

par leur résultante R, de même —F et —P par leur résultante —R

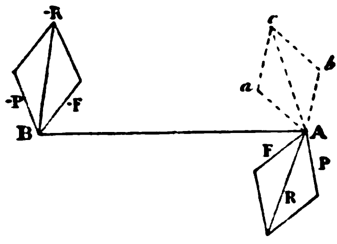


Fig. 56

située dans un même plan avec R ; R,—R est donc le couple résultant.

On voit facilement que les axes Aa, Ab des deux couples proposés se composent, suivant un parallélogramme Aacb, égal au parallélogramme AFRP, pour donner l'axe AC du couple résultant.

On compose donc *les couples au moyen des axes représentatifs, comme on compose les forces.*

La règle s'étend à un nombre quelconque de couples dont les bras de leviers sont invariablement liés entre eux.

40. Conditions de l'équilibre d'un corps solide. — Les lois de l'équilibre d'un corps solide se déduisent immédiatement de la composition des forces et des couples.

Soient F, F′, F″, ... des forces en nombre quelconque appliquées

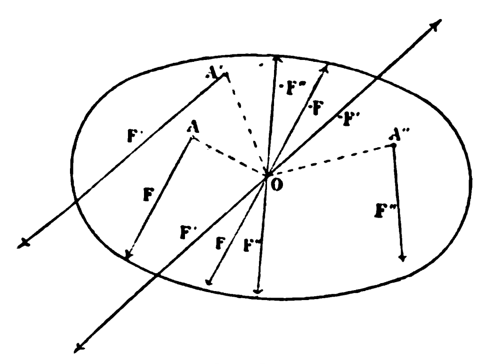


Fig. 57

aux points A, A′, A″, ... d'un corps solide. Prenons dans le corps un point O quelconque ; appliquons en ce point deux forces égales et

opposées F,—F, ce qui ne modifie en rien l'état du système ; les deux forces, F appliquée en A et — F appliquée en O, forment un couple. Ce couple et la force F passant par le point O peuvent être substitués à la force donnée F. On remplacera de même la force F' par un couple F', — F' et une force F' passant par le même point O. En opérant ainsi sur toutes les forces, on obtiendra des couples pouvant se composer en un seul et des forces passant toutes par le point O et pouvant par conséquent se composer aussi en une seule.

Donc, toutes les forces en nombre quelconque appliquées à un corps solide peuvent se réduire à un couple, plus une force.

Il y a évidemment une infinité de manières d'opérer cette réduction, mais l'intensité et la direction de la force sont constantes. L'axe du couple dépend du choix du point O. Mais par une analogie intime avec ce que nous avons vu en cinématique, entre toutes les manières dont on peut réduire les forces agissant sur un corps solide en une force et un couple, il y en a une plus simple que toutes les autres et dans laquelle l'axe du couple se confond avec la direction de la résultante de translation. Le couple qui jouit de cette propriété est un *minimum* par rapport aux couples résultants qui se rapportent à une origine quelconque. Son axe est l'*axe central* de Poinsot ; et cette dénomination est pleinement justifiée par ce fait qu'à distances égales de cet axe les couples résultants ont des valeurs égales et leurs axes sont également inclinés sur cette ligne.

Si l'on amène en O l'une des extrémités du bras de levier du couple résultant, on pourra composer la force du couple appliquée à cette extrémité avec la résultante passant par le point O. Le couple et la force seront alors remplacés par deux forces. L'ensemble des forces appliquées à un corps solide peut donc aussi se réduire à deux forces.

Nous pouvons maintenant établir les conditions d'équilibre d'un corps solide sollicité par un système quelconque de forces.

Supposons d'abord le solide *libre*, c'est-à-dire pouvant prendre toutes les positions possibles dans l'espace. Réduisons toutes les forces à un couple plus une force. Un couple ne pouvant jamais être tenu en équilibre par aucune force dirigée comme on voudra, il

faut évidemment que le couple soit nul et la force également. En écrivant ces deux conditions, on aura six équations :

$$\begin{cases} \sum F\cos\alpha = 0, \\ \sum F\cos\beta = 0, \\ \sum F\cos\gamma = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum P\cos a = 0, \\ \sum P\cos b = 0, \\ \sum P\cos c = 0; \end{cases}$$

les trois premières exprimant que la force est nulle, et les trois dernières indiquant que l'axe du couple résultant est nul, les axes P des couples se composant comme les forces. Ces six équations déterminent complètement l'équilibre d'un corps solide libre.

On peut donner aux trois dernières équations une forme plus commode en opérant comme il suit :

Ayant décomposé la force F, appliquée au point M (x, y, z), en ses trois composantes parallèles aux axes coordonnés, remplaçons chacune de ces composantes par une force appliquée en O et un couple. La force $F\cos\gamma$ donnera ainsi une force $F\cos\gamma$ appliquée en

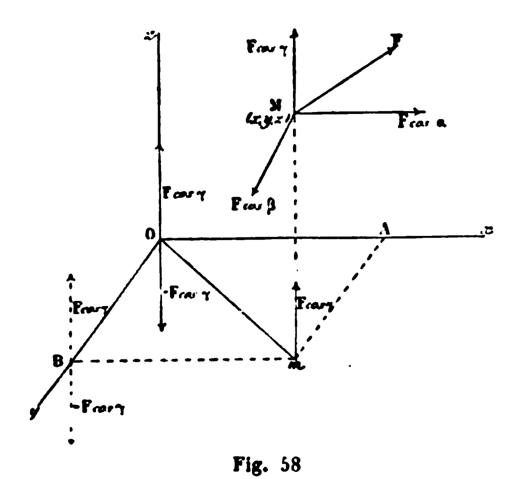


Fig. 58

O et un couple $F\cos\gamma$, $-F\cos\gamma$ de bras de levier Om. Mais si, ayant mené mA et mB respectivement parallèles à Ox et Oy, nous appliquons en B deux forces contraires, égales toutes deux en valeur

absolue à $F\cos\gamma$, nous pourrons, à la place du couple de bras de levier Om, considérer deux couples ayant pour bras de levier OB et Bm, et $F\cos\gamma$ pour force. Le couple de bras de levier OB est situé dans le plan zOy; le couple de bras de levier Bm est dans un plan parallèle au plan zOx et peut être amené dans ce plan même en OA. Leurs moments sont respectivement

$$F\cos\gamma . y \quad \text{et} \quad -F\cos\gamma . x,$$

en regardant toujours comme positifs les moments des couples qui pour un observateur placé sur l'axe coordonné perpendiculaire à leur plan, tendent à produire une rotation de gauche à droite.

Opérant de même sur les deux autres composantes $F\cos\alpha$ et $F\cos\beta$ et réunissant les moments des couples situés dans un même plan, on aura au lieu de la force F ses trois composantes $F\cos\alpha$, $F\cos\beta$, $F\cos\gamma$ appliquées au point O, et trois couples situés dans les plans coordonnés et ayant pour moments:

$$F\cos\gamma . y - F\cos\beta . z, \qquad F\cos\alpha . z - F\cos\gamma . x, \qquad F\cos\beta . x - F\cos\alpha . y.$$

Les conditions de l'équilibre d'un corps solide libre seront donc

$$\begin{cases} \Sigma F\cos\alpha = 0, \\ \Sigma F\cos\beta = 0, \\ \Sigma F\cos\gamma = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Sigma F(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0, \\ \Sigma F(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0, \\ \Sigma F(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0; \end{cases}$$

que l'on écrit souvent, en posant $F\cos\alpha = X$, $F\cos\beta = Y$, $F\cos\gamma = Z$,

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0;$$

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Un corps solide est dit *gêné* lorsqu'il ne peut pas se déplacer dans toutes les directions.

Si le corps solide a un point fixe, on peut toujours prendre ce point pour origine de la force, qui se trouve alors détruite par la résistance du point fixe, et il reste seulement le couple qui ne peut pas être tenu en équilibre par cette résistance. La condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre dans ce cas est donc que le couple soit nul ; ce qui donne les trois équations :

$$\begin{cases} \Sigma P \cos a = 0, \\ \Sigma P \cos b = 0, \\ \Sigma P \cos c = 0; \end{cases}$$

ou

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

Si le corps solide a un axe fixe, remplaçons d'abord chaque force par ses deux composantes, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à l'axe : les composantes parallèles sont sans effet, puisque le corps ne peut que tourner autour de l'axe, sans glisser ; il reste donc seulement les composantes perpendiculaires à l'axe. Soit f une de ces composantes et AO sa plus courte distance à l'axe, transportons le

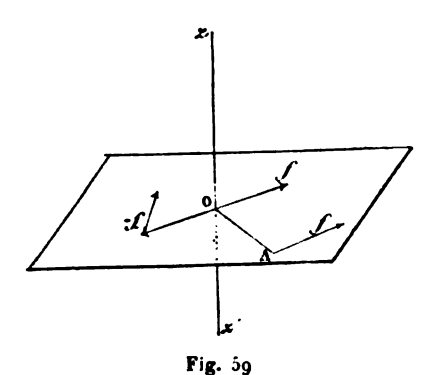


Fig. 59

point d'application de la force en A et remplaçons-la par un couple $f, -f$ de bras de levier AO et une force f appliquée en O ; la force est détruite par la résistance du point O et il reste seulement le couple. Opérant de même sur chaque composante, on a un système de couples situés dans des plans perpendiculaires à l'axe et par conséquent parallèles entre eux. Ces couples se composent en un seul

dont le moment est égal à la somme des moments des couples co posants ; et il est visible que le solide ne sera en équilibre que si couple, situé lui aussi dans un plan perpendiculaire à l'a est nul.

Appelons *moment d'une force* F *par rapport à un axe* le prod de la projection f de la force sur un plan perpendiculaire à l'a

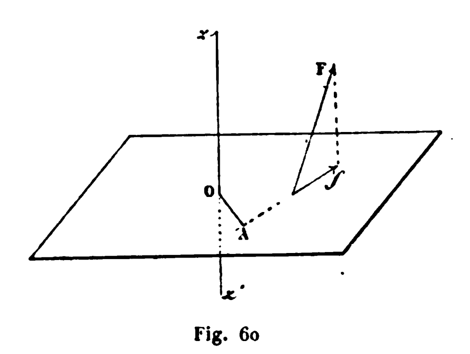


Fig. 60

par la plus courte distance OA de la force à l'axe ; affectons ce pr duit d'un signe suivant le sens dans lequel la force tend à fai tourner le corps ; et la condition précédente pourra s'énonce ainsi : *pour qu'un corps solide mobile autour d'un axe fixe soit e équilibre, il faut que la somme algébrique des moments par rappo à l'axe de toutes les forces agissant sur le corps soit nulle.*

Mais le moment de la force f par rapport à l'axe Oz est égal à l somme des moments de ses deux composantes X et Y par rapport a même axe, la condition précédente s'écrira donc immédiatement en faisant les conventions ordinaires sur les signes :

$$\Sigma(xY - yX) = 0.$$

Cette équation peut aussi s'interpréter en disant que, des trois force résultantes parallèles aux axes et des trois couples résultants situé dans les plans coordonnés que nous avons établis dans le cas géné ral, il ne reste plus que le couple résultant situé dans le plan xOy perpendiculaire à l'axe de rotation. Et, en effet, les forces appliquées en O sont évidemment détruites par la résistance de l'axe, ainsi que les couples qui sont situés dans les deux plans coordonnés

passant par l'axe Oz et dont les bras de levier peuvent être amenés sur cet axe même. On aurait donc pu écrire immédiatement l'équation d'équilibre d'après cette double remarque.

Inversement, dans le cas général d'un corps solide libre, les trois dernières équations de l'équilibre peuvent être regardées comme exprimant que la somme des moments de toutes les forces par rapport à chacun des axes coordonnés est séparément nulle. On les énonce souvent sous cette forme.

III. — DYNAMIQUE.

41. Objet et principes de la dynamique. — La *dynamique* (δύναμις, puissance, force) est l'étude du mouvement considéré dans ses rapports avec ses causes, les forces.

Son but est la solution de ce double problème, qui est en réalité l'objectif de toute la mécanique :

1° Etant données les forces qui agissent sur un corps, déterminer le mouvement de ce corps ;

2° Etant donné le mouvement d'un corps, déterminer les forces qui agissent *actuellement* sur ce corps.

La dynamique ne s'appuie pas uniquement sur des principes rationnels, comme la cinématique et la statique. Elle invoque des principes spéciaux, dont l'idée première est empruntée à l'expérience, mais qui la dépassent de beaucoup, sortes de *postulats* dont la vérité n'est prouvée que par l'exactitude constante des conséquences auxquelles ils conduisent.

Ces principes sont au nombre de deux : principe de l'inertie, principe des mouvements relatifs.

1° *Principe de l'inertie.* — Ce principe peut se formuler ainsi :

Quand un corps n'est sollicité par aucune force extérieure, s'il est en repos, il reste en repos ; s'il est en mouvement, il conserve son mouvement ; et ce mouvement est alors nécessairement rectiligne et uniforme.

La première partie du principe n'est, à proprement parler, que la définition même de la force et ne constitue pas réellement une loi. Nous remarquerons seulement que, en affirmant qu'un corps ne peut modifier en rien son état de repos ou de mouvement, nous

ne prétendons pas que la matière soit incapable de produire du mouvement : tout se passe en effet comme si chaque corps agissait sur tous les autres et n'était inerte que par rapport à lui-même.

La deuxième partie du principe est bien un postulat. Longtemps on a regardé le mouvement circulaire uniforme comme étant le mouvement *naturel.* C'est à Képler [1] qu'est due la première idée de ce principe qu'un corps en mouvement, qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure, se meut en ligne droite et avec une vitesse uniforme. Et il est certain qu'une observation attentive l'*indique.* Lorsqu'une bille est lancée sur un sol horizontal bien uni, elle se meut sensiblement en ligne droite avec une vitesse lentement décroissante ; unissons de plus en plus le sol, remplaçons-le par un plan de marbre parfaitement poli, et le ralentissement de la vitesse sera de moins en moins sensible ; le mouvement se prolongera de plus en plus longtemps et toujours en ligne droite. Il est donc logique d'admettre que, si l'on pouvait supprimer toutes les résistances, le mouvement se continuerait indéfiniment avec sa vitesse et dans la direction initiales.

Ainsi, quand le mouvement d'un corps est rectiligne et uniforme, c'est qu'il n'y a aucune force agissant sur le corps ou que les forces agissantes se font équilibre ; quand le mouvement est rectiligne varié, il y a une force dirigée suivant la trajectoire ; quand le mouvement est curviligne, il y a une force dont la direction fait un certain angle avec la tangente.

2° *Principe des mouvements relatifs.* — Soit un système animé d'un mouvement de translation, et soit dans ce système un corps soumis spécialement à l'action d'une force : ce corps prend dans le système un mouvement relatif ; et le principe consiste en ceci que *le mouvement relatif du corps est indépendant de la translation du système, le même, par conséquent, que si le système était en repos.* Ce principe, dont la première notion est due à Galilée [2], n'est nettement indiqué par l'expérience que dans le cas où le mouvement de translation est rectiligne et uniforme, comme l'est par exemple le mouve-

(1) KEPLER, *Astronomia nova* ἀπολογητός ; Prague, 1609.

(2) GALILÉE, *Dialogues sur deux sciences nouvelles* ; Leyde, 1638.

ment d'un bateau descendant paisiblement une rivière. Nous l'admettrons cependant d'une manière générale, à la seule condition que le mouvement du système soit *de translation*.

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour établir la dynamique d'un point matériel.

A. — DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL.

42. Théorèmes fondamentaux (¹). — Théorème I. — *Une force constante en grandeur et en direction, agissant sur un point matériel libre, lui imprime un mouvement rectiligne uniformément accéléré.*

Le mouvement sera évidemment rectiligne. On doit montrer qu'il sera uniformément accéléré. Pour cela, au point matériel donné m, au repos, adjoignons un système de points matériels identiques m_1, m_2..... également au repos. Sur chacun des points de ce système, y compris le point m, faisons agir une force identique à la force proposée F pendant un même temps θ; et, au bout de ce temps, tous les points ayant pris même vitesse a en grandeur et en direction, supprimons toutes les forces F. Conformément au premier principe, le système va se mouvoir d'un mouvement de translation rectiligne uniforme avec la vitesse a. Dans ce système, faisons agir de nouveau la force F pendant le temps θ sur le seul point m. D'après notre deuxième principe, la force F imprime alors au point m un mouvement relatif qui est le même que si le système était immobile, c'est-à-dire le même que si le point m partait du repos : au bout de ce nouveau temps θ, le mobile aura donc une vitesse relative a. Mais la vitesse absolue est la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement ; donc la vitesse absolue, après ce nouveau temps θ, sera $2a$, et ainsi de suite. La vitesse croît donc proportionnellement au temps : le mouvement est uniformément accéléré.

Si le mobile, au lieu de partir du repos, possédait déjà une vitesse lorsque la force commence à agir sur lui, le théorème serait encore manifestement vrai.

Réciproquement, *tout mouvement rectiligne uniformément accéléré est produit par une force constante en grandeur et en direction.*

(¹) Voir Briot, *loc. cit.*, p. 74.



Il résulte, en effet, du théorème précédent, que l'on peut toujours concevoir une force constante F_1 produisant ce mouvement, donnant par suite au mobile à chaque instant la vitesse qu'il a réellement à cet instant; la force réelle F est nécessairement identique à cette force F_1. Si, en effet, pendant l'intervalle de temps t, $t+\Delta t$, F était constamment supérieure à F_1, on pourrait poser $F=F_1+F_2$. Mais, sous l'action de la force F_1, le mobile prend précisément aux instants t et $t+\Delta t$ les vitesses observées v et $v+\Delta v$. Si donc, pendant ce temps Δt, on fait agir en outre la force F_2, elle va produire une vitesse relative qui s'ajoutera à $v+\Delta v$. Donc, cette force F_2 ne saurait exister.

Du même principe des mouvements relatifs, on déduira, par un raisonnement entièrement semblable au précédent, les théorèmes suivants :

Théorème II. — *Lorsque deux forces constantes agissent simultanément et dans la même direction sur un même point matériel* (partant du repos), *l'accélération du mouvement qu'elles lui impriment est la somme algébrique des accélérations que produirait séparément chacune d'elles.*

Théorème III. — *Deux forces agissant successivement sur un même point matériel lui impriment des accélérations proportionnelles à leurs intensités respectives.* En d'autres termes, *deux forces sont proportionnelles aux accélérations qu'elles impriment à un même point matériel.*

Cette dernière proposition, que l'on déduit immédiatement du théorème II, en remplaçant chacune des deux forces par un multiple de leur commune mesure, donne le moyen de *mesurer* l'intensité d'une force, c'est-à-dire de la comparer avec l'unité choisie, laquelle, comme nous l'avons déjà dit, est ordinairement, en mécanique, le kilogramme.

Le même théorème conduit à la définition de la *masse*.

43. Masse. — Si, en effet, sur un même corps on fait agir successivement diverses forces F, F′, F″...., imprimant au corps respectivement des accélérations γ, γ', γ''....., on a d'après ce qui précède

$$\frac{F}{\gamma}=\frac{F'}{\gamma'}=\frac{F''}{\gamma''}\cdots=m.$$

Ce rapport constant est ce que l'on appelle la masse du corps.

La relation $\frac{F}{\gamma}=m$ peut s'écrire

$$F=m\gamma.$$

Mais, si l'on part du repos, $v=\gamma t$; et par suite

$$F=\frac{mv}{t}.$$

D'où l'on voit que, *pour imprimer à différents corps même vitesse v dans le même temps t, il faudra employer des forces proportionnelles aux masses*. Cette conclusion, entièrement d'accord avec le sens que l'on attache couramment au mot masse, justifie le nom que nous avons donné à la quantité m. La masse, suivant l'heureuse expression de Lamé, est le *coefficient de la résistance de la matière au mouvement* (ou au changement de mouvement).

On peut encore dire que *les accélérations communiquées par une même force à des masses différentes sont en raison inverse de ces masses*.

Si on applique le théorème à la pesanteur, on a

$$\frac{P}{g}=m,$$

ce qui donne un moyen facile de mesurer la masse m. Le nombre exprimant cette mesure dépend des unités choisies. Habituellement on part du kilogramme comme unité de poids et on fait dériver l'unité de masse de l'unité de poids ainsi que des unités fondamentales de longueur et de temps entraînant l'unité d'accélération; de sorte que l'unité de masse est la masse de g kilogrammes. Mais le poids est une propriété tout à fait contingente de la matière, une quantité variable d'un lieu à un autre; la masse au contraire reste absolument constante dans toutes les circonstances [1]. La

[1] g varie en même temps que P et comme lui, de telle manière que le rapport $\frac{P}{g}$ reste fixe.

masse, mieux que le poids, donne donc la mesure de la *quanti de matière* d'un corps; et il est logique de prendre pour unité fo damentale l'unité de masse plutôt que l'unité de poids, ainsi qu l'a proposé Gauss et que nous le ferons plus loin.

44. F = mγ. — La relation fondamentale

$$F = m\gamma$$

s'étend aisément au cas d'une force variable et, au moyen des pro jections, à une trajectoire quelconque.

Ainsi, *dans tout mouvement, la force est égale à chaque instan au produit de la masse par l'accélération.*

Ce théorème permet de résoudre les deux grands problèmes de la dynamique : connaissant le mouvement trouver la force ; connaissant la force trouver le mouvement.

Dans le premier cas, l'accélération est connue en grandeur et en direction ; on connaît donc la force en grandeur, $F = m\gamma$, et en direction, cette direction étant nécessairement celle de l'accélération.

Généralement, le mouvement est donné par ses projections

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \chi(t),$$
$$z = \psi(t).$$

On connaît donc les composantes de la vitesse

$$\frac{dx}{dt} = v \cos\alpha,$$
$$\frac{dy}{dt} = v \cos\beta,$$
$$\frac{dz}{dt} = v \cos\gamma,$$

avec

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

et les composantes de l'accélération

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\gamma\cos a,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\gamma\cos b,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=\gamma\cos c,$$

avec

$$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c=1.$$

Les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F}{m}\cos a,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{F}{m}\cos b,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{F}{m}\cos c,$$

avec

$$\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c=1,$$

détermineront donc complètement la force en grandeur et en direction.

Inversement, si on donne la force, l'accélération est immédiatement déterminée par les mêmes équations. Si on connaît en outre la position initiale et la vitesse initiale, on pourra, par une double intégration, établir les équations du mouvement du mobile.

45. Équations générales du mouvement d'un point matériel. — Ainsi, la dynamique d'un point matériel est implicitement comprise tout entière dans les trois équations :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F\cos a}{m},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{F\cos b}{m},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{F\cos c}{m},$$

ou

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z,$$

X, Y, Z étant les composantes de la force, ou mieux de la résultant des forces, parallèlement aux trois axes coordonnés.

Dans certains cas, il sera plus avantageux de prendre les projec tions sur la tangente et sur la normale principale : on aura alors

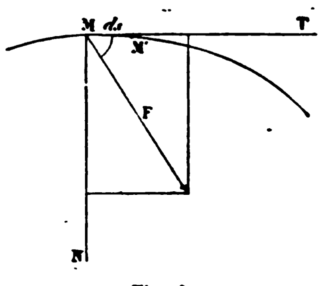


Fig. 61

en désignant par ds l'élément de trajectoire parcouru pendant l temps dt et par (F, ds) l'angle de la force avec l'élément de tra jectoire

$$F\cos(F, ds)=m\frac{dv}{dt},$$

$$F\sin(F, ds)=m\frac{v^2}{r}.$$

46. Théorème des moments des quantités de mou vement. — Revenons aux équations générales. Multiplions la pre mière par y, la deuxième par x et retranchons la première de l deuxième comprise, il vient

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=xY-yX.$$

On a de même

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=yZ-zY,$$

et

$$m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=zX-xZ.$$

Mais ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{d}{dt}.m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=xY-yX,$$
$$\frac{d}{dt}.m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=yZ-zY,$$
$$\frac{d}{dt}.m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=zX-xZ;$$

et sous cette forme elles sont susceptibles d'un énoncé facile à retenir.

Si en effet nous appelons, suivant l'usage, *quantité de mouvement* (¹) le produit mv de la masse d'un corps par sa vitesse ; de même que $xY-yX$ est le moment de la résultante F par rapport à l'axe Oz, $xm\frac{dy}{dt}-ym\frac{dx}{dt}$ pourra être considéré comme le moment de la quantité de mouvement mv par rapport au même axe ; et le théorème représenté par les équations précédentes se formulera ainsi :

Théorème. — *Dans le mouvement d'un point matériel, la dérivée par rapport au temps du moment de la quantité de mouvement par rapport à un axe quelconque est égal au moment de la résultante des forces par rapport au même axe.*

Corollaire. — Si la résultante passe constamment par l'axe, ou lui est parallèle, en un mot si son moment est nul, le moment de la quantité de mouvement est constant. Dans ce cas, projetons le

(¹) L'expression *quantité de mouvement* est assurément malsonnante. Mais la dénomination de *momentum*, souvent employée à l'étranger, celle d'*impetus*, proposée par Belanger, ne paraissent pas beaucoup plus satisfaisantes. Nous croyons donc devoir nous conformer à l'usage généralement adopté en France.

mobile en mouvement sur un plan perpendiculaire à l'axe : soi projection MM' = ds l'arc parcouru en pendant le temps dt et soi

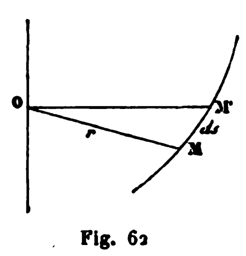


Fig. 62

MO=r sa distance à l'axe, on a

$$m\frac{ds}{dt}\times r=C^{te},$$

ou, en intégrant et supposant $s_0=o$,

$$s=At,$$

A étant une constante; c'est-à-dire qu'alors *les aires décrites par le rayon vecteur* OM *sont proportionnelles aux temps employés à le décrire :* théorème qui porte le nom de *théorème des aires.*

47. Théorème du travail ou théorème des forces vives. — Parmi les effets des forces, l'un des plus utiles à considérer est le *travail* qu'elles effectuent. La connaissance de ce travail conduit immédiatement à la vitesse, tandis que la connaissance de l'intensité de la force ne fournit que l'accélération : une première intégration est donc faite quand on connaît le travail. Mais, avant d'établir cette proposition importante, il est nécessaire de définir d'une manière précise ce que l'on entend par travail d'une force.

Pour cela, nous considérerons d'abord quelques cas très simples.

Prenons le travail le plus vulgaire, celui d'élever des poids, et supposons en premier lieu qu'il s'agisse d'élever successivement divers poids à une même hauteur : les travaux successifs à exécuter seront alors évidemment proportionnels aux poids. Si, au contraire, on devait élever le même poids successivement à diverses hauteurs,

divers travaux à effectuer seraient évidemment proportionnels x hauteurs. D'après cela, les travaux T et T' nécessaires pour éle-r deux poids différents P et P′ à des hauteurs différentes H et H′ nt entre eux comme les produits des poids par les hauteurs,

$$\frac{T}{T'}=\frac{PH}{P'H'}.$$

Supposons que, pour $P'=1$ et $H'=1$, $T'=1$; en d'autres termes, renons comme unité de travail le travail nécessaire pour élever kilogramme à 1 mètre, ou *kilogrammètre;* et nous aurons

$$T=PH$$

c'est-à-dire que le travail nécessaire pour élever un poids P à une hauteur H sera représenté par le produit de ce poids P par cette hauteur H.

Ce que nous venons de dire dans le cas d'une force agissant en sens inverse de la pesanteur, nous le dirions pour la pesanteur même et en général pour toute force constante agissant dans la direction du mouvement. Nous appellerons toujours travail de la force pour un déplacement donné, le produit de la force par ce déplacement.

Si la force agit dans le sens du déplacement, si elle est motrice, le travail s'appellera *travail moteur* et sera compté positivement; si la force agit en sens contraire, si elle est résistante, le travail sera lui-même dit *résistant* et compté négativement.

Si la force, supposée constante, n'agit pas dans le sens du déplacement, supposé rectiligne, il est visible que la composante de la force F suivant le déplacement MM′ produit seule du travail; on

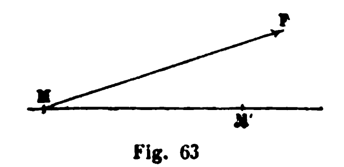


Fig. 63

prendra donc pour mesure du travail dans ce cas, suivant Coriolis et Poncelet,

$$T F=F\times MM'\times\cos(F,MM').$$

Si maintenant la force est variable, si la trajectoire est curviligne, on aura toujours, pendant un temps très court, pour le travail élémentaire de la force F,

$$T_e\mathrm{F} = \mathrm{F} \times ds \times \cos(\mathrm{F}, ds);$$

et le travail correspondant à un déplacement fini sera l'intégrale de cette expression, F étant considérée comme une fonction de s.

Cela posé, cherchons à exprimer le travail élémentaire T_e en fonction des quantités qui définissent le mouvement du mobile.

Or, nous avons (45)

$$\mathrm{F}\cos(\mathrm{F}, ds) = m\frac{dv}{dt}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$T_e\mathrm{F} = m\frac{dv}{dt}ds = m\frac{ds}{dt}dv = mvdv = d\frac{mv^2}{2}.$$

Ainsi, le travail élémentaire de la force F appliquée à un point matériel en mouvement est égal à la différentielle de $\frac{1}{2}mv^2$. Or, la quantité mv^2 s'appelle la *force vive :* on peut donc dire que le travail élémentaire est égal à la différentielle de la demi-force vive ; ou, si pour éviter ce facteur $\frac{1}{2}$ on appelle *puissance vive* la quantité $\frac{1}{2}mv^2$, on dira : *le travail élémentaire est égal à la différentielle de la puissance vive.*

Intégrons le long de l'arc s et nous aurons pour le travail correspondant à ce déplacement s

$$T\mathrm{F} = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2),$$

v_0 étant la vitesse initiale.

Si, d'ailleurs, nous remarquons que, comme conséquence immé-

diate du théorème des projections, *le travail de la résultante des forces agissant sur un point matériel en mouvement est, à chaque instant, égal à la somme des travaux des composantes*, nous pourrons écrire

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum \mathcal{T}F,$$

le signe $\sum$ comprenant toutes les forces qui agissent sur le point considéré ; et nous énoncerons ainsi le *théorème du travail* ou *théorème des forces vives :*

La variation de la puissance vive d'un mobile pendant un certain temps est égale à la somme des travaux de toutes les forces qui agissent sur lui pendant ce même temps.

Ce théorème est d'un usage continuel en mécanique.

Considérons par exemple un mobile descendant sous l'action de la pesanteur de A en B le long d'une courbe quelconque AB. Soit h

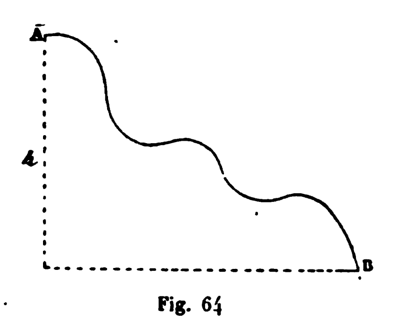


Fig. 64

la distance verticale des deux points ; quelle que soit la forme de la courbe, le travail de la pesanteur de A en B est mgh. On a donc

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) = mgh,$$

ou

$$v^2 = v_0^2 + 2gh.$$

La vitesse v en B est absolument indépendante du chemin suivi entre A et B ; elle ne dépend que de la vitesse initiale en A et de la différence h des niveaux A et B.

48. Application des théorèmes précédents aux corp réels. — Appliquons ces théorèmes à quelques cas simple en choisissant de préférence ceux qui se rapportent le plu directement à la physique. Nous démontrerons bientôt, en effet que dans tout corps il existe un point, le centre de gravité, qui s comporte comme si toute la masse du corps y était concentré et comme si toutes les forces extérieures y étaient transportée parallèlement à elles-mêmes, de sorte que la considération abstrait d'un point matériel conduit réellement à des conclusions pratique Mais, lorsque l'on considère ainsi des corps réels, il est nécessair de se faire quelque idée sur leur constitution; et un nouvea postulat est nécessaire. Ce troisième postulat ou principe, dû à Newton, est le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, e peut se formuler ainsi :

49. Principe de l'égalité de l'action et de la réaction. — *Lorsque deux points matériels* m *et* m′ *sont en présence, chacun des points exerce sur l'autre une force dirigée suivant la droite qui les unit; et la réaction de* m′ *sur* m *est égale et contraire à l'action de* m *sur* m′.

50. Applications. — 1° *Mouvement d'un point pesant sur un cercle horizontal, sans frottement.* — Deux forces seulement agissent sur le point : son poids mg et la réaction normale N de la courbe. Cette dernière force, de grandeur inconnue, est également inconnue quant à sa direction dans le plan normal en M, où elle fait

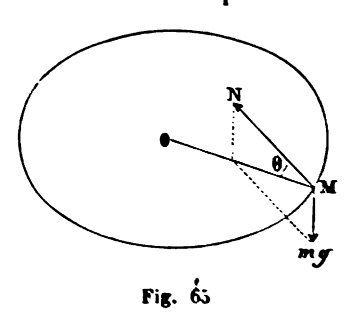


Fig. 65

un certain angle θ avec la normale principale MO située dans le plan horizontal. Mais de ce fait que les deux forces agissantes sont nor-

nales à la trajectoire, il résulte que le mouvement est uniforme t que la résultante des deux forces doit être dirigée suivant la normale principale MO et égale à $\frac{mv^2}{r}$, ce qui détermine N et θ, car on a

$$mg = \frac{mv^2}{r} \operatorname{tg}\theta,$$

l'où

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{gr}{v^2};$$

et

$$N = m\sqrt{g^2 + \frac{v^4}{r^2}}.$$

Plus la vitesse est grande, plus la réaction est grande: il faut que la matière constituant le cercle puisse exercer cette réaction sans se briser, il faut que le cercle puisse supporter, sans se rompre, l'action égale et contraire du mobile qui le presse suivant une force $-N$.

On voit aussi que plus la vitesse est grande, plus θ est petit, plus la réaction s'abaisse vers le plan du cercle. C'est ainsi que, dans un



Fig. 66

cirque, cheval et cavalier s'inclinent d'autant plus vers l'horizon qu'ils vont plus vite.

2° *Mouvement d'un point pesant sur une hélice tracée sur un cylindre vertical.* — Le point M est encore soumis à deux forces,

son poids mg et la réaction normale de la courbe, N, fais
un angle θ avec la normale principale MO. Mais ici, le poi

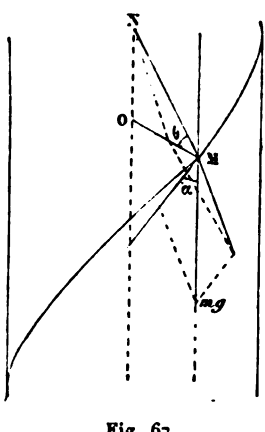


Fig. 67

n'est plus normal à la courbe et fait avec la tangente en M u
angle α, égal à l'angle constant sous lequel l'hélice rencontre chaqu
génératrice du cylindre. Si donc on décompose cette force mg e
deux autres, l'une $mg \cos \alpha$ dirigée suivant la tangente en M e
l'autre $mg \sin \alpha$ située dans le plan normal, on aura trois forces
l'une tangentielle, $mg \cos \alpha$, et les deux autres normales, N e
$mg \sin \alpha$.

La considération de la première donne

$$m\frac{dv}{dt} = mg \cos \alpha,$$

d'où, en intégrant et supposant $v_0 = 0$,

$$v = gt \cos \alpha;$$

et, par suite,

$$s = \frac{gt^2 \cos \alpha}{2};$$

le mouvement sur l'hélice est uniformément accéléré.

Quant à la réaction normale, en se rappelant que le rayon de courbure de l'hélice est $\frac{r}{\sin^2\alpha}$ [1], on trouverait immédiatement

$$N = m\sin\alpha\sqrt{g^2 + \frac{v^4\sin^2\alpha}{a^2}},$$

et

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{gr}{v^2\sin^2\alpha}:$$

à mesure que le corps descend, N augmente et θ diminue.

3° *Mouvement d'un mobile* M *assujetti à se mouvoir sans frottement sur un cercle vertical* O. — Le mobile, placé au début en A

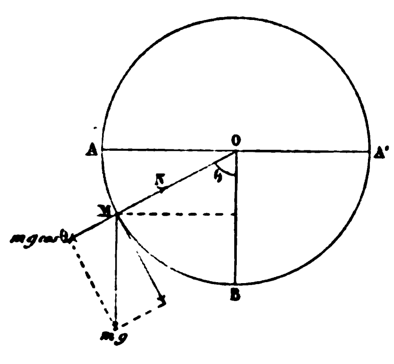


Fig. 68

sans vitesse initiale, tombe jusqu'en B, remonte en A', redescend en B, revient en A, et ainsi de suite indéfiniment. Il est soumis à deux forces : son poids mg dirigé suivant la verticale, et la réaction normale N du cercle dirigée suivant le rayon. Puisque le

[1] Soit en effet un point matériel parcourant l'hélice d'un mouvement uniforme : ce mouvement peut être regardé comme résultant d'un mouvement uniforme sur un cercle animé lui-même d'un mouvement de translation rectiligne uniforme. Or l'accélération du deuxième mouvement est nulle, donc l'accélération du mouvement sur l'hélice est la même que l'accélération du mouvement sur le cercle, c'est-à-dire qu'elle est dirigée suivant MO et égale à $\frac{v_1^2}{r} = \frac{v^2\sin^2\alpha}{r}$. On a donc $\frac{v^2\sin^2\alpha}{r} = \frac{v^2}{\rho}$ d'où $\rho = \frac{r}{\sin^2\alpha}$.

mobile se meut sur un cercle de rayon r, on doit avoir constan ment

$$N - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}.$$

Mais le théorème du travail donne, en remarquant que le travail d la force N, constamment normale à la trajectoire, est nul et que l travail de la force mg, constante en grandeur et en direction, e égal au produit de cette force par la projection du chemin par couru AN sur la direction de la force (c'est-à-dire sur la verticale).

$$mgr\cos\theta = \frac{mv^2}{2}.$$

On a donc

$$N = 3mg\cos\theta :$$

la réaction de la courbe est trois fois plus grande que la composante normale du poids. Si, au lieu d'une gouttière circulaire AA′, on prenait pour retenir le mobile un fil attaché en O, N serait la tension de ce fil.

Conservant notre cercle, supposons que le mobile y arrive en B

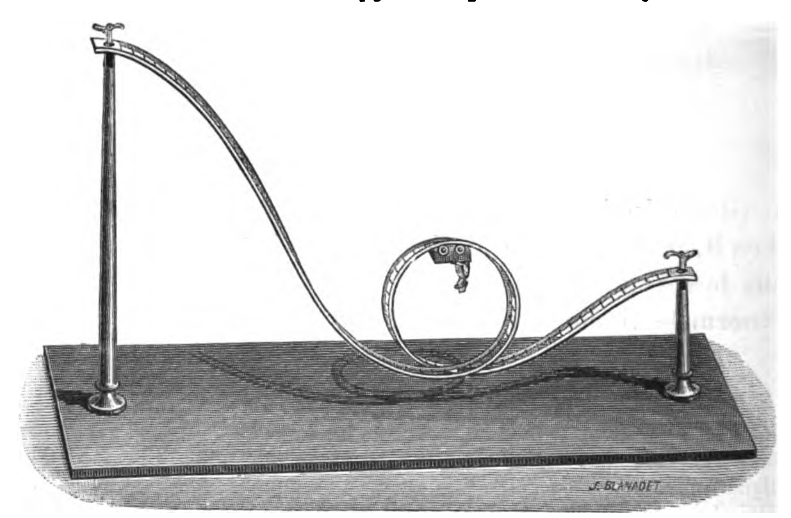


Fig. 69

avec une vitesse initiale $v_0 = \sqrt{2gh}$, due à une chute préalable

de hauteur h, comme dans le *chemin de fer* dit *à force centrifuge*. Pour que le mobile puisse remonter en B′, il faut évidemment

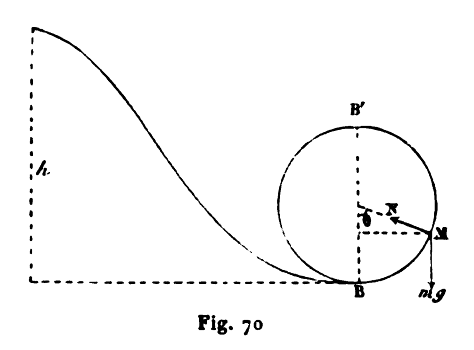


Fig. 70

$h > 2r$; mais cela ne suffit pas pour qu'il parcoure tout le cercle. Le mobile ne restera sur la courbe que s'il la presse constamment, si par conséquent, la réaction normale du cercle est toujours dirigée vers le centre. Soit N cette réaction,

$$N - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}.$$

Mais, d'après le théorème du travail, quand le mobile est en M, à la hauteur z au-dessus du point B,

$$v^2 - v_0^2 = -2gz,$$

d'où

$$v^2 = v_0^2 - 2gz,$$
$$= 2g(h - z).$$

On a donc, en remarquant que $\cos\theta = \frac{r - z}{r}$,

$$N = \frac{mg}{r}(r + 2h - 3z).$$

A mesure que le corps s'élève, z augmente, N diminue. Mais N doit rester positive sous peine de chute. Il faut donc que l'on ait

$$r + 2h - 3(2r) > 0,$$

c'est-à-dire

$$h > \frac{5}{2} r.$$

Si la hauteur h était comprise entre $2r$ et $\frac{5}{2}r$, N s'annulerait en quelque point, et comme en ce point le mobile aurait une certaine vitesse, il tomberait suivant une parabole (ayant au point de départ même rayon de courbure que le cercle, puisque alors la même équation $mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$ représenterait le mouvement sur les deux courbes).

51. Force d'inertie. — Toutes ces questions de mouvement peuvent, d'ailleurs, se ramener à des questions d'équilibre par la considération d'une force fictive, la *force d'inertie*, $-m\gamma$, égale et de sens contraire à la résultante des forces qui agissent réellement sur le mobile. C'est ainsi que l'on peut regarder les équations du mouvement

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

comme indiquant l'équilibre entre la force d'inertie et les forces qui sollicitent réellement le corps [1].

La force d'inertie peut se décomposer en deux autres : l'une menée suivant la tangente en sens inverse de l'accélération tangentielle, l'autre dirigée suivant la normale principale à l'opposé du centre de courbure et nommée en conséquence *force centrifuge*.

52. Force centrifuge. — Dans le mouvement circulaire uniforme, la force d'inertie se réduit à cette dernière composante. Par

[1] Cette force d'inertie se présente, d'ailleurs, tantôt comme une résistance tantôt comme une puissance. Ainsi, quand un homme pousse un wagon sur des rails, il ne lui faut, pour entretenir un mouvement uniforme, que le faible effort nécessité par les résistances passives ; mais s'il veut accélérer le mouvement, il doit augmenter l'effort, et la réaction augmente en même temps : elle agit alors comme une résistance. Si, au contraire, il veut ralentir le mouvement, en tirant sur une corde par exemple, l'action étant négative, la réaction est positive et joue le rôle d'une véritable puissance.

conséquent, dans le mouvement circulaire uniforme, il doit y avoir équilibre entre la résultante des forces réelles et la force centrifuge, force égale et contraire à la force centripète, égale par conséquent à $\frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$ et dirigée suivant le rayon vers la circonférence. Mais, s'il est parfaitement permis de se figurer ainsi les choses, il ne faut pas oublier que la *force centrifuge est une force fictive*, sans existence réelle. La force réelle, la force nécessaire, c'est la force centripète ramenant sans cesse vers le centre le mobile qui tend sans cesse à s'échapper suivant la tangente ; et si cette

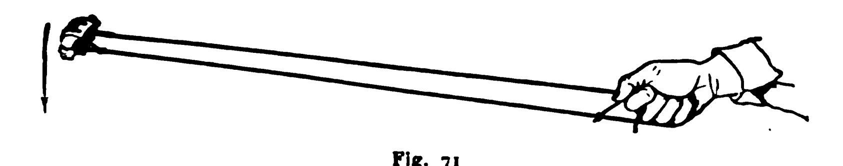


Fig. 71

force vient à manquer (si la corde de la *fronde* vient à lâcher), le mobile s'échappe, en effet, suivant la tangente et nullement suivant le rayon, comme cela devrait avoir lieu si la force centrifuge existait réellement. Cela étant bien entendu, il n'y a aucun inconvénient, il y a même souvent commodité à faire usage de la force centrifuge. La 1re application (50), par exemple, se ramène ainsi à l'équilibre de trois forces : le poids mg du mobile, la réaction normale N de la courbe, et la force centrifuge $\frac{mv^2}{r}$, dirigée suivant MK ; par suite, la

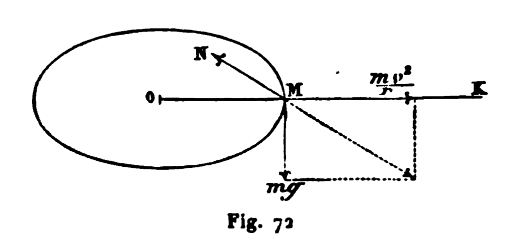


Fig. 72

réaction normale N doit être égale et opposée à la résultante des forces mg et $\frac{mv^2}{r}$, ce qui conduit aux conclusions trouvées plus haut.

La considération de la force centrifuge ne sera pas moins utile dans les questions suivantes.

53. Équilibre et mouvement relatifs. — Le théorème général $F = m\gamma$, F étant la résultante des forces qui agissent sur le mobile de masse m et γ l'accélération du mouvement, suppose le mouvement rapporté à des axes fixes. Si les axes sont mobiles, la proposition n'est plus vraie. Mais ce que nous avons appris, en Cinématique, sur les mouvements relatifs, va nous fournir immédiatement la solution. La question en effet est alors celle-ci : un mobile m se meut dans un système A animé d'un mouvement quelconque dans le système fixe B; quelle est pour le mouvement relatif de m dans A la relation entre l'accélération et la force ?

Pour le mouvement absolu de m dans B, nous avons toujours

$$F = m\gamma.$$

Mais, d'après le théorème de Coriolis,

$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_r + \bar{\gamma}_e + \bar{\gamma}_c.$$

On a donc

$$\overline{m\gamma} = \overline{m\gamma_r} + \overline{m\gamma_e} + \overline{m\gamma_c};$$

d'où

$$\overline{m\gamma_r} = \overline{m\gamma} - \overline{m\gamma_e} - \overline{m\gamma_c}$$

c'est-à-dire que, si à la résultante des forces réellement agissantes $m\gamma$ on ajoute deux forces fictives $-m\gamma_e$ et $-m\gamma_c$, la résultante de ces trois forces représente précisément la force $m\gamma_r$, qui produirait dans un système fixe l'accélération γ_r du mobile relativement au système mobile A. En d'autres termes, *on peut faire abstraction de la mobilité des axes à la condition d'ajouter aux forces réelles*, $m\gamma$, *les deux forces fictives* $-m\gamma_e$ et $-m\gamma_c$: la première est la force d'entraînement prise en sens contraire, la deuxième, ou *force centrifuge composée*, est égale à $-2m\omega v_r \sin(\omega, v_r)$, perpendiculaire au plan de l'axe de rotation et de la vitesse relative, et dirigée à l'opposé du sens dans lequel la rotation entraîne le système, ou, si l'on préfère, dirigée de telle manière qu'elle ait l'axe de rotation à sa droite et la vitesse relative à sa gauche.

54. Questions d'équilibre relatif. — Dans les questions

l'équilibre relatif, cette deuxième force est nulle, v étant $= 0$. Il suffit donc alors d'ajouter aux forces physiques la première force fictive et d'appliquer les conditions ordinaires d'équilibre.

Soit, par exemple, à chercher l'équilibre relatif d'un point matériel dans un système en mouvement de rotation uniforme autour d'un axe. L'accélération d'entraînement γ_e est alors $\omega^2 r$ et elle est dirigée suivant le rayon vers le centre; la force fictive $-m\gamma_e$ sera donc égale à $-m\omega^2 r$, le signe — indiquant qu'elle est dirigée vers la circonférence. La force fictive est donc simplement dans ce cas la force centrifuge, et la condition de l'équilibre relatif consiste en ce que la résultante F des forces physiques doit être égale et contraire à la force centrifuge.

C'est ainsi que l'on résoudra aisément les questions d'équilibre à la surface de la terre. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce sujet au chapitre de la Pesanteur.

Pour le moment, nous examinerons seulement quelques-unes des expériences par lesquelles on prétend quelquefois démontrer l'existence de la force centrifuge.

1° *Régulateur à force centrifuge.* — Cet appareil se compose essentiellement de deux boules métalliques, fixées aux extrémités de

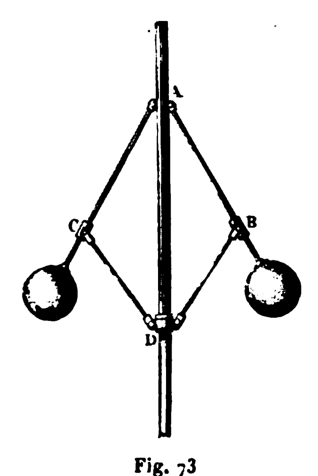


Fig. 73

deux tiges AC, AB attachées elles-mêmes en A sur un arbre animé d'un mouvement de rotation; ces tiges sont reliées en outre par deux autres tiges CD, BD, articulées à un anneau D mobile sur l'arbre.

Si la vitesse de rotation est suffisante, les boules s'écartent, et l'écar croît quand la vitesse augmente. Supposons le système en équilibr

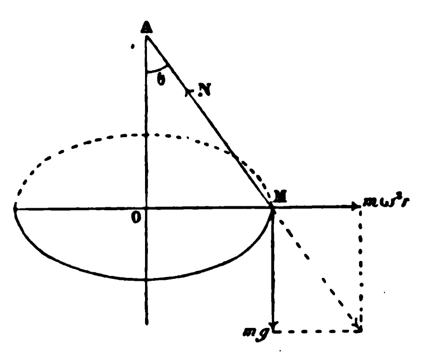


Fig. 74

avec un certain écart θ. De chaque côté, la tension N de la tige et l poids mg de la boule doivent faire équilibre à la force centri-fuge $m\omega^2 r$. On doit donc avoir

$$\tang\theta = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 l \sin\theta}{g},$$

l étant la longueur de la tige OM ; d'où

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Plus la vitesse est grande, plus l'écart est grand. Mais il y a une limite inférieure au-dessous de laquelle l'écart est nécessairement nul. Pour que la formule donne un écart réel, il faut, en effet, que

$$\frac{g}{\omega^2 l} < 1$$

c'est-à-dire que

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Tant que la vitesse angulaire est plus petite que $\sqrt{\frac{g}{l}}$, le pendule ne quitte pas la verticale.

On déterminerait aisément dans chaque position la tension N de la tige.

Mais il est clair que l'on aurait pu traiter la même question en ne considérant que les forces réelles mg et N, et en écrivant que leur résultante donne la force centripète, nécessaire pour produire un mouvement circulaire uniforme.

2° *Forme de la surface d'un liquide pesant contenu dans un vase tournant autour d'un axe vertical.* — Nous verrons en Hydrostatique que la surface se courbe alors suivant un paraboloïde et se déprime

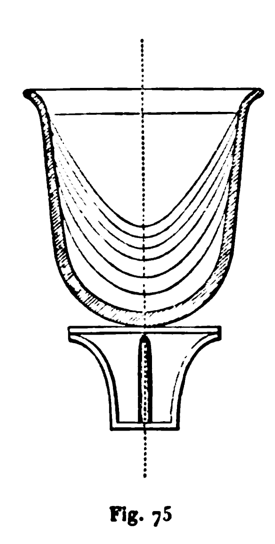


Fig. 75

d'autant plus que la vitesse de révolution est plus considérable. Mais la facilité avec laquelle on établit les conditions du phénomène à l'aide de la force centrifuge ne doit pas faire illusion sur la véritable nature de cette force.

55. Questions de mouvement relatif. — Traitons maintenant quelques questions de mouvement.

1° *Mouvement relatif d'un point matériel assujetti à glisser le long d'une droite horizontale animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical.* — Soient M le point, Ox la droite sur laquelle il glisse, Oz l'axe autour duquel tourne cette droite. Supposons le mouvement de rotation s'effectuant dans le sens positif (de

Ox vers Oy) avec la vitesse angulaire ω. Les forces réellement agissantes sont : le poids $P = mg$ du mobile, et la réaction normale N de

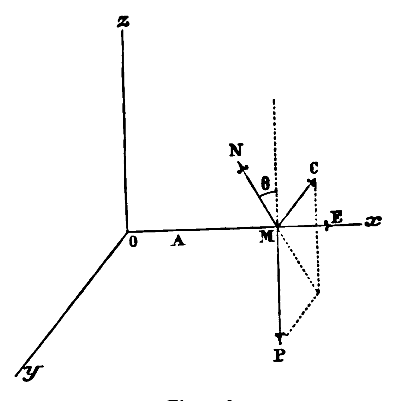


Fig. 76

la droite, réaction qui fait un certain angle θ avec la verticale en M. Pour avoir le mouvement relatif de M le long de Ox, à ces forces réelles ajoutons les deux forces fictives $-m\gamma_e$ et $-m\gamma_c$ et ensuite nous pourrons raisonner comme si la droite Ox était immobile : $-m\gamma_e$ est la force centrifuge $ME = m\omega^2 x$; $-m\gamma_c$ est la force centrifuge composée MC égale à $2m\omega v$ et dirigée dans le sens opposé à Oy (si v est positif). Nous avons donc trois forces normales : P, N et MC, et une force ME dirigée suivant Ox. De cette dernière seule dépend le mouvement [1].

On a :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\omega^2 x,$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x;$$

d'où, en supposant le mobile placé initialement en A (x_0) sans

[1] Quand un mobile se meut sur une courbe quelconque tournant autour d'un axe, la force centrifuge composée n'a pas d'influence sur le mouvement, puisqu'elle est toujours perpendiculaire à v et par conséquent sans effet sur l'accélération tangentielle $\frac{dv}{dt}$.

tesse initiale ($v_0 = 0$)

$$= \frac{x_0 \omega}{2}\left(e^{\omega t} - e^{-\omega t}\right)$$

$$x = \frac{x_0}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right).$$

e mobile marche dans le sens positif avec une vitesse croissante.

La force centrifuge composée n'a aucun effet sur le mouvement; ais elle influe sur la réaction normale. Si l'on remarque que, le ouvement étant rectiligne, les forces normales doivent se faire quilibre, on a

$$N = m\sqrt{g^2 + 4\omega^2 v^2}$$

t

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2\omega v}{g}.$$

La réaction normale, d'abord verticale et égale à mg quand le nobile est en A sans vitesse, augmente avec la vitesse et s'incline de lus en plus vers l'horizon.

La figure représente un appareil propre à réaliser le mouvement que nous venons d'étudier. Cet *appareil à force centrifuge* consiste essentiellement en une sorte de toupie, A, pouvant tourner

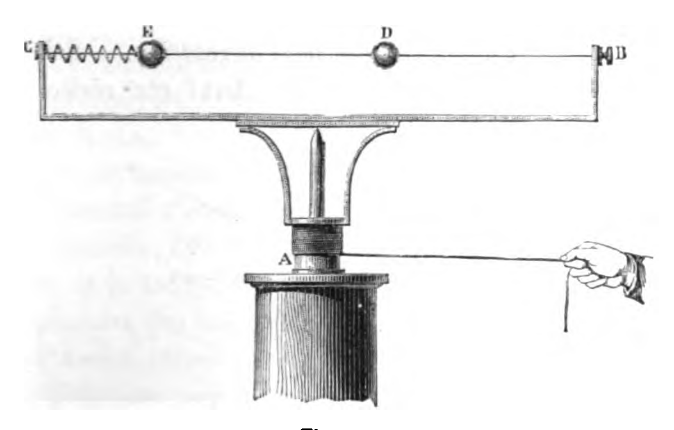


Fig. 77

rapidement au sommet d'un pied solide en bois. Sur cette toupie s'adaptent différentes pièces. Pour le cas actuel, on y fixe un rec-

tangle dont le côté horizontal supérieur est formé par un fil de fer bien tendu, CB, le long duquel peut glisser une bille d'ivoire D traversée par le fil. Si l'on fait tourner rapidement l'appareil, on voit la bille venir vivement en B. En E se trouve une bille semblable qui tend de même à aller en C, mais qui est retenue par un ressort à boudin : elle pousse donc le ressort et le comprime jusqu'à ce que la tension qu'elle lui communique fasse équilibre à la force centrifuge.

Si l'on veut s'en tenir aux forces réelles, cette expérience montre simplement que pour produire le mouvement circulaire uniforme il faut nécessairement une force dirigée vers le centre et ramenant sans cesse vers ce point le mobile qui tend sans cesse à s'en éloigner. Quand, en effet, la droite passe de Ox à une position voisine Ox', le mo-

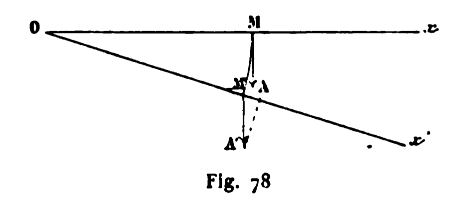


Fig. 78

bile M entraîné par la droite de M en M' a conservé en M' sa vitesse MA perpendiculaire à Ox : en M' il a donc une vitesse M'A' inclinée sur Ox' et ayant, par conséquent, une composante suivant Ox'.

2° *Mouvement relatif d'un point matériel sur une droite rencontrant sous un certain angle l'axe vertical de rotation.* — Soit α l'angle de la droite Ox avec l'axe de rotation Oz. Aux forces réelles mg et N,

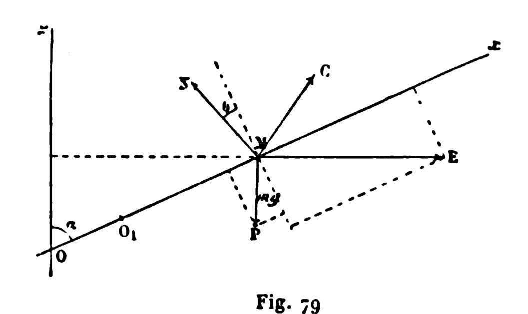


Fig. 79

ajoutons les deux forces fictives, la force centrifuge $ME = m\omega^2 x \sin\alpha$ et la force centrifuge composée $MC = 2m\omega v \sin\alpha$. Décomposons le

oids en deux forces, l'une $mg\cos\alpha$ suivant Ox, l'autre $mg\sin\alpha$ perpendiculaire à cette direction. Décomposons de même la force centrifuge en deux forces, l'une $m\omega^2 x\sin^2\alpha$ suivant Ox, l'autre $m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha$ perpendiculaire à cette ligne. Les forces normales, $mg\sin\alpha$, N, $m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha$ et $2m\omega v\sin\alpha$ se font équilibre. Les deux forces $m\omega^2 x\sin^2\alpha$ et $-mg\cos\alpha$ produisent l'accélération relative :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\omega^2 x\sin^2\alpha-g\cos\alpha.$$

Si le mobile était placé en repos au point O_1 défini par la relation

$$x_1=\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha},$$

il y resterait, les deux forces $m\omega^2 x\sin^2\alpha$ et $-mg\cos\alpha$ se faisant équilibre.

Posons $x=x_1+x'$, c'est-à-dire comptons les abscisses x' à partir de O_1, nous avons

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\omega^2\sin^2\alpha\, x',$$

ce qui est l'équation du cas précédent dans laquelle ω est remplacé par $\omega\sin\alpha$.

Le mouvement présentera donc des circonstances analogues.

On déterminerait de même aisément, par l'équilibre des forces normales, N et θ.

La figure 80 montre d'un côté une petite bille E, de l'autre une certaine quantité d'eau, contenues respectivement dans deux tubes de verre inclinés, DB, DC, disposés pour l'expérience. Une vitesse suffisante de la toupie amènera toujours la bille et l'eau à l'extrémité supérieure des tubes.

On peut aussi placer dans l'un des tubes plusieurs substances de densité différente, par exemple du mercure, de l'eau, une boule de liège, etc. A l'état de repos, ces substances se superposent par ordre de densité décroissante. Mais, quand on fait rapidement tourner l'appareil, les substances sont projetées vers l'extrémité supérieure du tube où elles se superposent dans l'ordre inverse, le mer-

cure, le plus loin de l'axe, au-dessus de l'eau qui se place elle

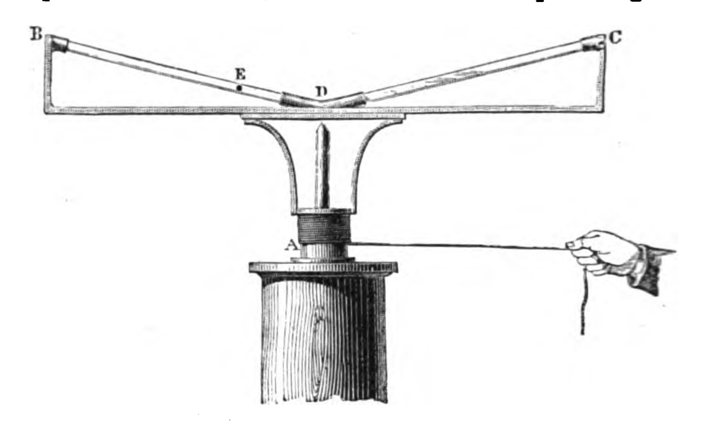


Fig. 80

même au-dessus du liège. Dans les deux cas, en effet, le principe d'Archimède règle l'ordre de superposition conforme à l'équilibre stable ; mais, tandis que dans le cas ordinaire c'est la pesanteur qui agit, dans l'autre c'est la force centrifuge qui l'emporte, et, comme son action est précisément dirigée en sens inverse de celle de la pesanteur, l'ordre doit être interverti.

3° *Pendule de Foucault.*

Théorie.

La force centrifuge composée influe également sur le mouvement du pendule. Bornons-nous au cas des petites oscillations. Le mouvement peut alors être considéré comme s'effectuant dans un plan horizontal xOy (je prends les axes ainsi qu'au n° 1). La composante efficace de la pesanteur est $mg\alpha$ ou $mg\frac{r}{l}$, l désignant la longueur du pendule et r la distance du point oscillant à sa position d'équilibre. La composante verticale de la force centrifuge composée est négligeable devant le poids. Comme, d'autre part, nous négligeons $\frac{dz}{dt}$, les deux composantes horizontales se réduisent à

$$X_c = -2m\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt},$$

$$Y_c = \quad 2m\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt}.$$

Les équations du mouvement sont donc

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{gx}{l} - 2\omega \sin\lambda \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{gy}{l} + 2\omega \sin\lambda \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Au pôle boréal, ces équations deviennent

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{gx}{l} - 2\omega \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{gy}{l} + 2\omega \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Mais au pôle, le phénomène est évident : le mouvement absolu est une oscillation suivant une ellipse très allongée [1], et le mouvement relatif est une rotation uniforme du grand axe de cette ellipse en sens contraire du sens dans lequel tourne la terre et avec la même vitesse ω. Au pôle, en effet, le pendule attaché à un point fixe, exécute dans l'espace ses oscillations suivant une courbe invariable, tandis que la terre tourne au-dessous de lui, de sorte qu'un observateur emporté par la terre voit le pendule tourner en sens contraire avec la vitesse ω.

[1] Le mouvement absolu est donné par les équations

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{gx_1}{l},$$
$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{gy}{l};$$

d'où

$$x_1 = a\cos t\sqrt{\frac{g}{l}},$$
$$y_1 = a\omega\sqrt{\frac{l}{g}}\sin t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

a étant l'écart initial du pendule dans le plan zox_1.

On a donc

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{gy_1^2}{a^2\omega^2 l} = 1,$$

équation d'une ellipse fortement aplatie perpendiculairement au plan d'écart initial.

Cela posé, comme les équations (1) ne diffèrent des équations (2) qu' ce que ω y est remplacé par $\omega \sin \lambda$, on voit qu'à la latitude λ les chos se passeront comme si la terre tournait autour de la verticale Oz av la vitesse angulaire $\omega \sin \lambda$. Donc l'ellipse décrite par le pendule tou nera dans son plan, autour de la verticale de suspension, dans sens positif (nord, est, sud, ouest) avec la vitesse angulaire ω sin

Autre démonstration.

Cette proposition peut d'ailleurs se déduire immédiatement d la décomposition de la rotation de la terre autour de la ligne d pôles avec la vitesse angulaire $OA = \omega$ en deux autres : l'une O dirigée suivant la verticale du lieu et égale à $\omega \sin \lambda$, l'autre OC diri

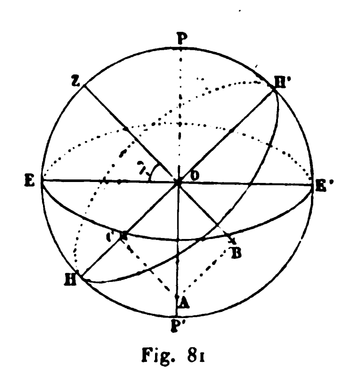


Fig. 81

gée suivant la méridienne du lieu (dans le plan horizontal HH') et sans influence sur le phénomène actuel. La première produit le mouvement relatif mis en évidence par la belle expérience de Foucault.

Expérience.

Un fil d'acier de 67^m, attaché d'un bout au sommet du Panthéon et de l'autre portant une boule de cuivre de 28^{kg}, constituait le pendule : la durée d'une oscillation double était de $16^s,42$. Au début de l'expérience, le pendule préalablement écarté de la verticale et retenu par un fil de chanvre, entrait en mouvement sans vitesse initiale par suite de la combustion de ce fil. Une pointe fixée à la boule venait entamer deux petits tas de sable humide placés aux extrémités du grand axe de l'ellipse d'oscillation ; le déplacement apparent de cet axe était ainsi rendu très visible (il était de $2^{mm},3$ environ à

haque oscillation double, la distance des deux tas étant de 6^{m}); t il avait bien lieu dans le sens des aiguilles d'une montre avec la itesse $\omega \sin \lambda$, c'est-à-dire avec une vitesse telle qu'un tour entier urait duré 32^{h} environ [1]. Foucault réussit donc ainsi à donner ine preuve matérielle de la rotation de la terre sur elle-même.

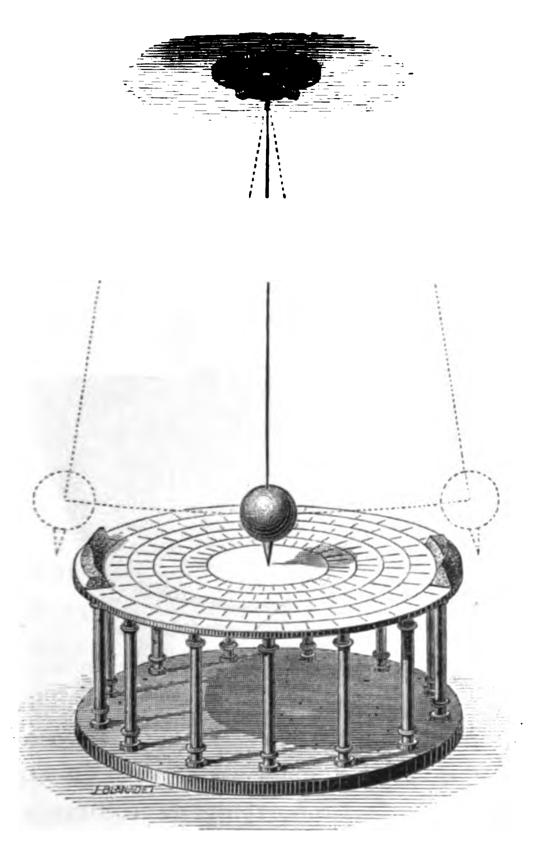


Fig. 82

L'expérience peut se faire dans une salle ordinaire. Foucault la fit d'abord dans sa cave; il la reproduisit ensuite dans la salle de la méridienne à l'Observatoire [2]. Partout où l'on dispose d'une

[1] Bien que l'amplitude des oscillations diminuât assez rapidement, le mouvement du pendule était encore net au bout de 5 à 6 heures : la déviation était alors de 60 à 70 degrés.

[2] Foucault, C. R. XXXII, 135; 1851; et *Recueil des travaux scientifiques de Léon Foucault*; Paris, Gauthier-Villars, 1878, p. 378, 519 et 570.

hauteur verticale de 10 à 12 mètres, on est à même de la répéte sérieusement, surtout si, comme M. Rouzé, on mesure optiquemen la déviation.

Foucault y fut conduit par l'observation de la fixité du plan dan lequel oscille une verge montée sur un tour. Cette fixité, qui n'e qu'une conséquence de l'inertie de la matière, présente des ci constances curieuses sur lesquelles nous reviendrons en Acoustiqu Il est d'ailleurs aisé de vérifier directement que le plan d'oscillatio

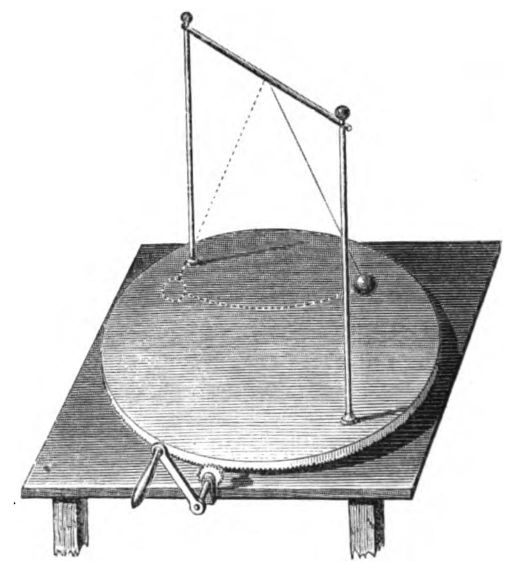


Fig. 83

du pendule reste invariable malgré la rotation du support : il suffit pour cela de rendre le support mobile comme ci-contre.

B. — DYNAMIQUE DES SYSTÈMES.

56. Forces intérieures, forces extérieures. — Dans un système de points matériels, chaque point est sollicité par deux espèces de forces : les unes dites *intérieures*, provenant des actions mutuelles; les autres *extérieures*, de même nature au fond que les premières, mais dues à l'action de corps extérieurs au système.

Si l'on tient compte de toutes ces forces, on peut écrire immédia-

ement les équations du mouvement du point m :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum Z.$$

Pour chaque point on a trois équations analogues.

Ces équations peuvent se grouper de diverses manières, ce qui conduit à des théorèmes importants.

57. Théorème du mouvement du centre de gravité. — *Premièrement.* Faisons la somme de toutes les équations relatives à l'axe des x, il vient

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum X,$$

Σ se rapportant à tous les points du système et $\sum$ comprenant toutes les forces agissantes. En additionnant de même les équations relatives aux autres axes, on obtient deux autres relations analogues ; on a donc les trois équations générales

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}&=\sum X,\\ \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}&=\sum Y,\\ \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}&=\sum Z.\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

Mais les forces intérieures égales deux à deux et de signe contraire (49) disparaissent dans les seconds membres. On peut donc poser immédiatement ces équations pour les forces extérieures, sans se préoccuper des forces intérieures.

Ce théorème s'énonce très simplement au moyen du centre de gravité.

Soient, en effet, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de gravité,

et M la masse totale du système, on a par définition (38)

$$P = \Sigma p,$$

ou

$$Mg = \Sigma mg,$$

ou

$$M = \Sigma m$$

et

$$Mx_1 = \Sigma mx, \quad My_1 = \Sigma my, \quad Mz_1 = \Sigma mz;$$

par suite

$$M\frac{dx_1}{dt} = \Sigma m\frac{dx}{dt}, \quad M\frac{dy_1}{dt} = \Sigma m\frac{dy}{dt}, \quad M\frac{dz_1}{dt} = \Sigma m\frac{dz}{dt};$$

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \sum X, \\ M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \sum Y, \\ M\frac{d^2z_1}{dt^2} = \sum Z; \end{array}\right\} \quad (1)$$

en d'autres termes, *le mouvement du centre de gravité du système es le même que si toutes les masses y étaient concentrées et si toutes le forces extérieures y étaient transportées parallèlement à elles-mêmes*

Quand donc il n'y a pas de forces extérieures, le centre de gravité s'il est en mouvement, se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme; s'il est au repos, il reste au repos.

On s'explique ainsi le recul d'un canon lors du tir, le recul du cœur (*choc du cœur*) au moment où le sang est lancé dans l'aorte On comprend également qu'un homme, placé sur un plan horizontal parfaitement poli, ne pourrait en aucune façon faire avancer son centre de gravité; tandis qu'un frottement (c'est-à-dire une force extérieure) rendra possible la progression dans le sens horizontal

Si un obus décrivant sa parabole éclate en l'air, le centre de gravité de la masse n'en continue pas moins à décrire la même parabole, tandis que les fragments sont dispersés chacun suivant une parabole spéciale.

58. Théorème des moments des quantités de mouvement. — *Deuxièmement.* Combinons pour chaque point matériel les équations générales du mouvement de ce point comme nous l'avons fait (46) et ajoutons toutes les équations ; il vient :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)&=\sum(xY-yX),\\ \frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)&=\sum(yZ-zY),\\ \frac{d}{dt}\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)&=\sum(zX-xZ);\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

et les seconds membres sont encore indépendants des forces extérieures. On a donc ce théorème :

La dérivée par rapport au temps de la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à un axe quelconque est égale à la somme des moments des forces extérieures relativement au même axe.

Et, comme dans le cas d'un point, lorsque cette dernière somme est nulle on a le *théorème des aires.*

59. Rotation d'un corps solide autour d'un axe. — Si un corps solide tourne autour d'un axe fixe, chaque point décrit un cercle perpendiculaire à l'axe ; et si r est la distance du point à l'axe, la quantité de mouvement est

$$mv = m\omega r,$$

ω désignant la vitesse angulaire de rotation du corps. Le moment de cette quantité de mouvement est $m\omega r^2$ et la somme des moments des quantités de mouvement

$$\omega \times \Sigma m r^2,$$

$\Sigma m r^2$ étant une constante pour le corps relativement à l'axe en question : c'est le *moment d'inertie* du corps par rapport à l'axe.

Prenons cet axe pour axe des z; et la première des équations (2) s'écrira

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2=\sum(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}),$$

d'où

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\sum(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X})}{\Sigma mr^2}.$$

Ainsi, *dans le mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe l'accélération angulaire* $\frac{d\omega}{dt}$ *est, à chaque instant, égale au quotient de la somme des moments des forces relativement à l'axe par le moment d'inertie du corps relativement au même axe* (¹).

Une conséquence immédiate de ce théorème c'est que, *si les forces extérieures se font équilibre sur un corps solide tournant autour d'un axe, le mouvement de rotation est nécessairement uniforme.*

Si, les forces extérieures se faisant toujours équilibre, le corps se contractait par suite d'actions intérieures, Σmr^2 diminuerait; ω devrait donc augmenter de manière que $\omega\times\Sigma mr^2$ restât constant. Si, par exemple, la terre se refroidissait, sa vitesse de rotation augmenterait, le jour (ou la durée d'un tour entier) diminuerait.

Le théorème est en tous points applicable aux êtres vivants, comme celui du mouvement du centre de gravité. Un homme, isolé dans l'espace, ne pourra pas tourner sur lui-même : car s'il faisait tourner une partie de son corps autour d'un axe dans un certain sens, une autre partie tournerait en même temps en sens contraire, de manière que la somme des moments des quantités de mouvement restât nulle. La seule force extérieure, en effet, étant alors la pesanteur, la somme des moments des forces extérieures est nulle pour tout axe passant par le centre de gravité.

(¹) Remarquer l'analogie de forme de cette relation avec l'équation fondamentale $\gamma=\frac{\mathrm{F}}{m}$, d'après laquelle l'accélération γ est égale au quotient de la force par la masse.

60. Moments d'inertie. — Nous avons défini *moment d'inertie* d'un corps par rapport à un axe la quantité Σmr^2, somme des produits de la masse de chaque point par le carré de sa distance à l'axe.

Pour un corps homogène, de forme géométriquement définie, la recherche du moment d'inertie autour d'un axe donné est un problème de calcul intégral.

Dans tous les cas, ce problème revient à la détermination du moment d'inertie autour d'un axe mené par le centre de gravité. Soient, en effet, deux axes parallèles : l'un, mené par le centre de gravité G et que je prends pour axe des z, GZ ; l'autre, HZ′, situé à la distance a du premier. Prenons pour plan des zx le plan des deux axes ;

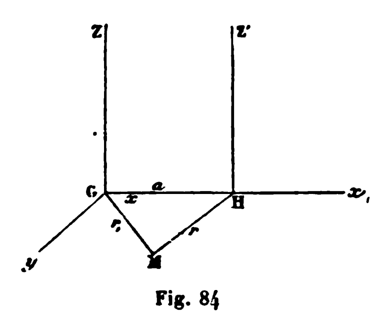


Fig. 84

le plan des yz leur sera perpendiculaire et on aura, en appelant r et r_1 les distances d'un point M quelconque à l'axe HZ′ et à l'axe GZ,

$$mr^2 = mr_1^2 + ma^2 - 2max;$$

et, en faisant la somme pour tous les points du corps,

$$\Sigma mr^2 = \Sigma mr_1^2 + Ma^2,$$

puisque $2a\Sigma mx = 0$.

Il résulte, en effet, de la définition rappelée plus haut (57) que, si l'on prend le centre de gravité pour origine des coordonnées ($x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$), on a :

$$\Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0, \quad \Sigma mz = 0.$$

Si donc on désigne par MK^2 le moment d'inertie autour de l'axe

GZ, K étant ce que l'on appelle le *rayon de gyration*, on a

$$\Sigma mr^2 = M(K^2 + a^2).$$

Ainsi, *le moment d'inertie d'un corps autour d'un axe quelconque est égal au moment d'inertie autour d'un axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale* M *du corps par le carré de la distance de l'axe au centre de gravité.*

Cela posé, calculons quelques moments d'inertie qui nous seront utiles dans la suite.

1° *Parallélipipède rectangle.* — Soit I_z, le moment d'inertie par rapport à l'axe OZ, mené par le centre de gravité parallèlement aux

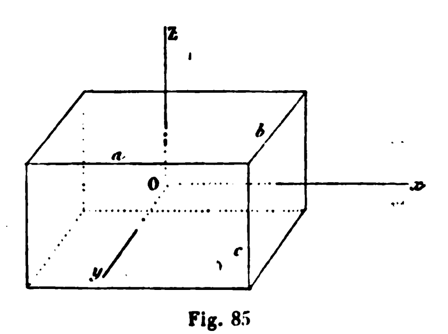


Fig. 85

arêtes c; et soient a, b les arêtes parallèles à Ox et Oy, on a, ρ étant la densité du solide homogène,

$$I_z = \rho \iiint (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = \rho \iint (x^2 + y^2)\,dx\,dy \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz,$$

$$= \rho c \left(\int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx \right),$$

$$= \rho c \left(\frac{a^3}{12} b + \frac{b^3}{12} a \right),$$

$$= \rho \frac{abc}{12} (a^2 + b^2),$$

$$= \frac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

Ainsi, dans ce cas,

$$K^2 = \frac{1}{12}(a^2 + b^2).$$

2° *Sphère.* — Soit I_z le moment d'inertie d'une sphère pleine par rapport à son diamètre OZ

$$I_z = \Sigma m(x^2 + y^2).$$

Mais on aurait de même

$$I_x = \Sigma m(y^2 + z^2),$$

et

$$I_y = \Sigma m(z^2 + x^2);$$

d'où

$$I_x + I_y + I_z = 2\Sigma m(x^2 + y^2 + z^2),$$

ou

$$3I = 2\Sigma m r^2,$$

I étant le moment d'inertie autour d'un diamètre quelconque et r désignant la distance de la masse m au centre de la sphère.

Or, si l'on décompose la sphère en couches sphériques concentriques de rayon variable r et d'épaisseur dr, on a

$$\Sigma m r^2 = \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr . r^2$$

et par suite

$$I = \frac{2}{3} 4\pi\rho \int_0^R r^4 dr,$$

$$= \frac{8}{15}\rho\pi R^5,$$

$$= \frac{2}{5} MR^2.$$

Donc ici

$$K^2 = \frac{2}{5} R^2.$$

On trouverait de même aisément :

3° *Cylindre droit circulaire de rayon* R *et de hauteur* h, *par rapport à son axe*

$$K^2 = \frac{1}{2} R^2.$$

4° *Le même cylindre, par rapport à un axe parallèle aux bases et passant par le centre de gravité*

$$K^2 = \frac{1}{12}(3R^2 + h^2).$$

61. Théorème du travail. — *Troisièmement.* Enfin, voyons ce que devient le théorème du travail et de la puissance vive. Pour chaque point on a

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum T F,$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les forces qui agissent sur le point considéré.

Si l'on ajoute membre à membre les équations se rapportant aux différents points du système, il vient

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} - \Sigma\frac{mv_0^2}{2} = \sum T F; \qquad (3)$$

le signe Σ se rapporte à tous les points du système et le signe $\sum$ comprend *toutes* les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui sollicitent ces divers points.

Il se présente cependant un cas où dans l'évaluation des travaux il n'y a pas à tenir compte des forces intérieures, c'est lorsque le système est solide : alors en effet les forces intérieures étant deux à deux appliquées aux extrémités de droites invariables et étant d'ailleurs égales et de sens contraire, leurs travaux se détruisent.

Dans une machine on doit distinguer le *travail moteur*, T_m, somme de tous les travaux positifs reçus par la machine pendant un certain temps, et le *travail résistant*, T_r, somme, prise positivement, de tous les travaux négatifs pendant le même temps. Mettons ces travaux en évidence, nous aurons :

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} - \Sigma\frac{mv_0^2}{2} = T_m - T_r.$$

Si la machine est arrivée à sa *vitesse de régime*, laquelle sera soit uniforme (roues hydrauliques), soit périodiquement uniforme

pompes, machines à vapeur, etc.), au bout d'un nombre entier de périodes, le premier membre de l'équation est nul,

$$T_m = T_r.$$

Ainsi, *dans une machine en marche régulière le travail moteur est égal au travail résistant* : c'est le théorème connu sous le nom de *théorème de la transmission du travail.*

Au point de vue économique, il y a lieu de diviser les résistances en deux catégories : les *résistances utiles*, celles qui correspondent à l'ouvrage même que la machine doit exécuter, et les *résistances passives* (frottements, etc.), qui se développent dans la machine par suite de son mouvement et en dehors de l'ouvrage à effectuer. Soit T_u le travail des résistances utiles, T_p le travail des résistances passives,

$$T_r = T_u + T_p ;$$

et l'égalité du travail moteur et du travail résistant devient

$$T_m = T_u + T_p ;$$

d'où

$$T_u = T_m - T_p.$$

Ainsi, *le travail utilisé est toujours moindre que le travail moteur dépensé*. Donc *impossibilité du mouvement perpétuel.*

L'*effet utile* ou le *rendement* ou encore le *coefficient économique* de la machine est mesuré par le rapport du travail utilisé au travail dépensé :

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{T_m - T_p}{T_m} = 1 - \frac{T_p}{T_m}.$$

On l'exprime ordinairement en centièmes.

Nous indiquerons au chapitre du Frottement les appareils servant à mesurer le travail fourni par une machine.

62. Étude du mouvement d'un système. — Quand on aura à étudier le mouvement d'un système, *il sera bon d'étudier*

d'abord le mouvement du centre de gravité sous l'action des forc extérieures (57); *puis, transportant les axes coordonnés parallèleme à eux-mêmes au centre de gravité, on étudiera le mouvement système par rapport à ces axes mobiles passant par le centre gravité.*

Soit un point m (x, y, z) du système, on a par rapport aux ax fixes

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum(xY-yX).$$

Transportons les axes au centre de gravité (x_1, y_1, z_1) et soien

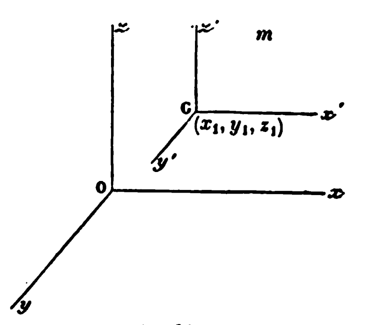


Fig. 86

x', y', z' les coordonnées du point m par rapport aux nouveau axes :

$$\Sigma m\left[(x_1+x')\left(\frac{d^2y_1}{dt^2}+\frac{d^2y'}{dt^2}\right)-(y_1+y')\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{d^2x'}{dt^2}\right)\right]$$
$$=\sum\left((x_1+x')Y-(y_1+y')X\right).$$

Or

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\sum X,$$
$$M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\sum Y;$$

et par suite

$$M\left(x_1\frac{d^2y_1}{dt^2}-y_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)=x_1\sum X-y_1\sum Y.$$

D'autre part, l'origine étant au centre de gravité,

$$\Sigma mx'=0;$$

ar suite

$$\Sigma m \frac{dx'}{dt} = 0,$$

t

$$\Sigma m \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0 :$$

insi les quatre termes

$$x_1 \Sigma m \frac{d^2 y'}{dt^2} = 0, \quad y_1 \Sigma m \frac{d^2 x'}{dt^2} = 0,$$
$$\frac{d^2 y_1}{dt^2} \Sigma m x' = 0, \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} \Sigma m y' = 0.$$

On a donc, toutes simplifications faites,

$$\Sigma m \left(x' \frac{d^2 y'}{dt^2} - y' \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) = \sum (x' \mathrm{Y} - y' \mathrm{X}),$$

c'est-à-dire que le *théorème des moments des quantités de mouvement s'applique sans changement aucun aux axes mobiles.*

Ce résultat aurait pu se prévoir *a priori*. En effet, les axes mobiles ont un mouvement de translation; et on peut faire abstraction de ce mouvement si l'on applique à chaque point une force $-m\gamma$ en sens contraire de l'accélération γ du système. Mais les forces fictives $-m\gamma$ ont dans leur ensemble un moment nul, car étant parallèles, de même sens et proportionnelles aux masses, elles ont une résultante unique appliquée au centre de gravité. Elles disparaissent donc finalement; et l'on voit comment cela tient à ce que l'origine nouvelle est au centre de gravité.

Il est d'ailleurs à remarquer que dans les équations réglant le mouvement du centre de gravité et dans les nouvelles équations traduisant le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport aux axes mobiles menés par le centre de gravité, les inconnues seront en général mêlées de sorte que les premières ne donnent pas à elles seules le mouvement du centre de gravité.

Que devient maintenant l'équation des forces vives avec les nou-

veaux axes ? Par rapport aux anciens axes on avait

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}=\sum TF.$$

Considérons d'abord la puissance vive. Soient v_1 la vitesse du centre de gravité et v' la vitesse relative du point m; des relations $x=x_1+x'$, $y=y_1+y'$, $z=z_1+z'$ on déduit

$$v^2=v_1^2+v'^2+2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{dx'}{dt}+\frac{dy_1}{dt}\frac{dy'}{dt}+\frac{dz_1}{dt}\frac{dz'}{dt}\right),$$

et par suite

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}=\frac{Mv_1^2}{2}+\Sigma\frac{mv'^2}{2}.$$

car $\frac{dx_1}{dt}\Sigma m\frac{dx'}{dt}=o$, puisque, l'origine nouvelle étant au centre de gravité, $\Sigma mx'=o$.

Ainsi, *la puissance vive totale du système par rapport aux axes fixes est égale à la puissance vive par rapport aux axes mobiles augmentée de la puissance vive d'un corps de masse* M *concentrée au centre de gravité* (théorème de Kœnig).

Passons maintenant aux travaux des forces.

$$\begin{aligned}\sum TF&=\sum\int(Xdx+Ydy+Zdz)\\&=\sum\int(Xdx_1+Ydy_1+Zdz_1)+\sum\int(Xdx'+Ydy'+Zdz');\end{aligned}$$

la somme des travaux réels des forces est égale à la somme des travaux des forces transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité augmentée de la somme des travaux apparents des forces.

L'équation des forces vives devient donc

$$\begin{aligned}\frac{Mv_1^2}{2}-\frac{M(v_1)_0^2}{2}+\Sigma\frac{mv'^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0'^2}{2}&=\sum\int(Xdx_1+Ydy_1+Zdz_1)\\&+\sum\int(Xdx'+Ydy'+Zdz')\end{aligned}$$

u, en remarquant que la somme des travaux des forces transpor-
ées au centre de gravité est précisément égale à la variation de la
uissance vive de ce point,

$$\Sigma\frac{mv'^2}{2}-\Sigma\frac{mv'^2_0}{2}=\sum\int(\mathrm{X}dx'+\mathrm{Y}dy'+\mathrm{Z}dz').$$

La variation de la puissance vive par rapport aux axes mobiles est égale à la somme des travaux apparents des forces.

Le théorème du travail subsiste donc, lui aussi, quand on considère les déplacements apparents relatifs au centre de gravité, et cela sans l'introduction d'aucune force nouvelle.

63. Fonction des forces; potentiel. — Dans l'équation (3)

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}=\sum\mathcal{T}\mathrm{F},$$

ou

$$\frac{\Sigma mv^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}=\int\sum(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz),$$

$\sum(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)$ n'est pas nécessairement une différentielle exacte. Cela a lieu cependant dans un cas très important; car les forces naturelles sont toutes des actions mutuelles dont chacune est dirigée suivant la ligne des centres et fonction seulement de la distance. Supposons qu'il en soit ainsi, ou, en d'autres termes, que les forces soient *centrales*. Soient r la distance de deux points m et m' et $mm'f(r)$ leur action mutuelle, positive ou négative suivant qu'elle est attractive ou répulsive, les composantes de l'action de m' sur m sont

$$\mathrm{X}=mm'f(r)\frac{x'-x}{r},$$

$$\mathrm{Y}=mm'f(r)\frac{y'-y}{r},$$

$$\mathrm{Z}=mm'f(r)\frac{z'-z}{r}.$$

Or, ces trois expressions sont les dérivées d'une même fonction.

Car si $F(r)$ désigne une fonction de r telle que

$$F(r) = \int mm'f(r)dr;$$

en se rappelant que

$$r^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2,$$

on a

$$\frac{dF(r)}{dx} = \frac{dF(r)}{dr}\cdot\frac{dr}{dx} = mm'f(r)\cdot\left(-\frac{x'-x}{r}\right) = -X$$

et de même

$$\frac{dF(r)}{dy} = -Y$$

$$\frac{dF(r)}{dz} = -Z.$$

Ainsi, X, Y, Z sont les trois dérivées par rapport à x, y, z de la *fonction de force* $F(r)$, changées de signe. Et comme il en est de même pour toutes les forces agissantes, $\sum(Xdx + Ydy + Zdz)$ est la dérivée changée de signe d'une fonction V de x, y, z, que l'on nomme le *potentiel*, en généralisant une expression réservée primitivement au cas où la loi commune des forces était celle de la gravité ([1]).

On a donc par définition

$$V = -\int\sum(Xdx + Ydy + Zdz) = (T)_1^0,$$

c'est-à-dire que le potentiel est *le travail que pourraient accomplir les forces si le système repassait de la position actuelle* 1 *à la position initiale* 0.

64. Énergie; énergie actuelle; énergie potentielle. Principe de la conservation de l'énergie. — Lorsqu'un sys-

(1) M. Clausius appelle *ergiel* (ergal) le potentiel dans le cas général, réservant le nom de potentiel pour les forces qui varient en raison inverse du carré de la distance (Voir *Journal de Physique*, I, 72).



me se meut sous l'unique influence de forces centrales (tant exté-
ieures qu'intérieures), on a

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}=-(V-V_0)$$

ou

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}+V=\Sigma\frac{mv_0^2}{2}+V_0=\text{const.} \qquad (4)$$

Soit, par exemple, une pierre qui tombe

$$X=0, \qquad Y=0, \qquad Z=-mg,$$
$$V=mgz.$$

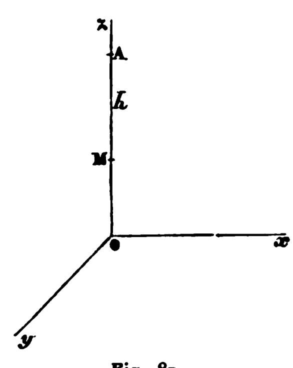


Fig. 87

Au début de la chute, la pierre étant en A, $v_0=0$, $z=h$,

$$\frac{mv_0^2}{2}=0, \qquad V_0=mgh.$$

Quand la pierre atteint le sol, $v=\sqrt{2gh}$, $z=0$,

$$\frac{mv_1^2}{2}=mgh, \qquad V_1=0.$$

A une époque intermédiaire quelconque, la pierre étant en M à une hauteur z

$$\frac{mv^2}{2}=mg(h-z), \qquad V=mgz.$$

A toute époque, par conséquent,

$$\frac{mv^2}{2} + V = mgh,$$

$\frac{mv^2}{2}$ représentant la puissance vive actuelle de la pierre, et $V = mg$ la puissance vive que, par suite de sa position présente, la pierr pourrait développer en descendant jusqu'au sol.

D'après cela, appelons avec Rankine *énergie* d'un système l quantité totale de puissance vive que ce système possède ou peu développer; nommons *énergie actuelle* sa puissance vive actuell $\Sigma\frac{mv^2}{2}$, *énergie potentielle* la puissance vive qu'il peut développer égale et de signe contraire au travail V que peuvent accomplir le forces auxquelles il est soumis ; et l'équation (4) se formuler ainsi :

La somme des énergies actuelle et potentielle d'un système uniquement soumis à des forces centrales est constante.

C'est le *principe de la conservation de l'énergie* dont M. Helmholtz a le premier fait ressortir l'importance dans un mémoire célèbre [1] sur lequel nous aurons plus d'une fois à revenir.

L'état final du système sera l'état d'équilibre stable (70) caractérisé par le *minimum minimorum* de la fonction V.

65. Théorème de M. Yvon Villarceau. — Le théorème des forces vives règle les variations de la force vive; M. Yvon Villarceau a donné une expression de la force vive même [2].

Revenons aux équations du mouvement d'un point matériel

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z;$$

(1) Helmholtz, *Die Erhaltung der Kraft*; Berlin, 1847.
(2) Yvon Villarceau, C. R., LXXV, 232; 1872.

multiplions-les respectivement par x, y, z et ajoutons, il vient

$$m\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right)=Xx+Yy+Zz.$$

Mais on a

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}+x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2},$$

ou, en appelant v la vitesse du point et r sa distance à l'origine des coordonnées,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{dr^2}{dt}\right)=v^2+x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Donc

$$mv^2=\frac{m}{2}\frac{d^2r^2}{dt^2}-(Xx+Yy+Zz);$$

et pour un système matériel, en faisant la somme des équations analogues convenant aux divers points, on aura

$$\Sigma mv^2=\frac{1}{2}\Sigma m\frac{d^2r^2}{dt^2}-\sum(Xx+Yy+Zz). \quad (5)$$

Tel est le théorème de M. Villarceau.

66. Théorème de M. Clausius sur le viriel. — Si chaque point du système se meut dans un espace limité, si, en d'autres termes, le système a un *mouvement stationnaire* suivant l'expression de M. Clausius, l'énergie actuelle moyenne du système sera simplement

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}=-\frac{1}{2}\sum(Xx+Yy+Zz), \quad (6)$$

le premier terme du deuxième membre ayant une valeur moyenne

nulle; et, en appelant *viriel* la quantité $-\frac{1}{2}\sum(Xx+Yy+Zz)$, on dira que *la puissance vive moyenne d'un système animé d'un mouvement stationnaire est égale à son viriel*, théorème découvert par M. Clausius [1] avant que M. Villarceau eût établi la formule générale (5).

Dans l'application de ce théorème, comme dans l'emploi du principe des forces vives, il convient de distinguer les forces intérieures et les forces extérieures.

Considérons d'abord la partie du viriel due aux actions mutuelles. L'action mutuelle des deux molécules m et m' donne respectivement pour ces deux points

$$Xx = mm'f(r)\frac{x'-x}{r}x, \qquad X'x' = mm'f(r)\frac{x-x'}{r}x',$$

d'où

$$Xx + X'x' = -mm'f(r)\frac{(x-x')^2}{r};$$

et, en prenant les expressions analogues relatives aux deux autres axes, on aura pour la partie du viriel correspondant à l'action mutuelle de m sur m'

$$\frac{1}{2}mm'\frac{f(r)}{r}[(x-x')^2+(y-y')^2+z-z')^2] = \frac{1}{2}mm'f(r)r.$$

Par suite, le viriel des forces intérieures est égal à $\frac{1}{2}\mathrm{S}mm'rf(r)$, la sommation S s'étendant à toutes les combinaisons deux à deux des différents points du système.

Pour les forces extérieures, supposons qu'elles se réduisent à une pression p uniformément répartie sur toute la surface du système. La pression sur un élément ω de la surface est $p\omega$; ses composantes suivant les trois axes sont

$$-p\omega\cos\alpha, \qquad -p\omega\cos\beta, \qquad -p\omega\cos\gamma,$$

(1) Clausius, *Pogg. Ann.*, CVI; et C. R., LXX, 1314; 1870.

α, β, γ étant les cosinus des angles de la normale extérieure N avec les axes. Le terme correspondant du viriel est

$$\frac{1}{2}p\omega(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = \frac{1}{2}p\omega r\cos(N, r).$$

Or $\frac{\omega r\cos(N, r)}{3}$ n'est autre chose que le volume du cône ayant pour sommet l'origine O (que je suppose à l'intérieur de la masse) et pour base ω. Donc, en prenant tous les termes analogues et en appelant v le volume du système, on aura pour le viriel extérieur $\frac{3}{2}pv$, expression que nous retrouverons à la base de la théorie cinétique des gaz.

67. Principe de d'Alembert. — De la considération du travail peuvent encore se déduire des théorèmes très importants.

Considérons un système matériel dont les divers points sont sollicités par des forces quelconques. Supposons chacun des points du système transporté, conformément aux liaisons, de la position qu'il occupe dans une position infiniment voisine; on nomme *vitesse virtuelle* [1] de l'un quelconque de ces points, ou mieux *déplacement virtuel* la droite qui joint la première position à la deuxième.

On appelle *travail virtuel* d'une force appliquée à un point le travail correspondant au déplacement virtuel. Si l'on désigne par δs ce déplacement, le travail virtuel $T_v F$ de la force F est

$$T_v F = F\delta s\cos(F, \delta s).$$

Or, on peut toujours, quelles que soient les liaisons, les supposer remplacées par des forces obligeant chaque point à satisfaire aux mêmes conditions. Ainsi, la condition qu'un point doit rester sur une surface ou une courbe donnée se traduira par l'introduction de la réaction normale de la surface ou de la courbe. Chaque point

[1] L'expression de *vitesse* tient à ce que l'on peut concevoir que le déplacement se fait avec uniformité dans un temps extrêmement court et alors les espaces parcourus sont proportionnels aux vitesses; le mot *virtuel* signifie que ce déplacement n'est que possible et ne s'effectue pas réellement.

...me libre et soumis à un système
nulle; et, en appel ... es extérieures, de forces intérieur...
dira que *la puis...* ...es liaisons.
vement station... ...e que nous avons dit des forces d'in...
M. Clausius ... *...a équilibre à chaque instant, au moy...*
générale (5). ... *...orces sollicitant chaque point et les forc...*
Dans l'a... *...principe de d'Alembert* ramenant la Dyn...
cipe des f...
et les for... Z les trois composantes de la résultante d...
Con... ...r un point $m\ (x, y, z)$; on a :
L'act...
pour

$$\ldots = o, \quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2} = o, \quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2} = o;$$

$$\ldots\frac{\ldots x}{dt^2}\Big)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z = o,$$

$$\ldots\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

...oit le déplacement $(\delta x, \delta y, \delta z)$.

... des autres points donne une équation semblable, et e... ...somme de toutes ces équations, il vient

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z). \quad (7)$$

... équation renferme $3n$ variations, le nombre des point... ... Mais on a k équations exprimant les liaisons et qui, diffé... ... permettent d'éliminer k variations. Il en restera don... ... complètement arbitraires. En égalant à zéro le coefficien... ... chacune d'elles, on a $3n - k$ équations qui détermineront le... ... coordonnées réellement indépendantes. Et ainsi, d'une ma... ... générale, le mouvement du système est complètement déter... ...miné.

68. Principe des vitesses virtuelles. — Pour que tous les points restent en repos, il faut et il suffit que pour un déplacement virtuel quelconque le premier membre de l'équation (7) soit nul. Donc, pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme des travaux virtuels de toutes les forces, y compris celles qui tiennent la place des liaisons, soit nulle :

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0, \tag{8}$$

quels que soient les déplacements virtuels des différents points.

Dans tout déplacement compatible avec les liaisons, les forces de liaison sont nécessairement normales aux chemins parcourus, et par conséquent leurs travaux virtuels nuls ; de sorte que l'équation

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

se réduit à

$$\sum(X_e\delta x + Y_e\delta y + Z_e\delta z) + \mathrm{S}mm'f(r)\delta r = 0,$$

où $\sum(X_e\delta x + Y_e\delta y + Z_e\delta z)$ désigne la somme des travaux virtuels des forces extérieures et $\mathrm{S}mm'f(r)\delta r$ la somme des travaux virtuels moléculaires, le signe S marquant une sommation étendue à tous les groupes (m, m').

Donc, *quand un système de points matériels liés entre eux d'une manière quelconque est en équilibre, la somme des travaux virtuels de toutes les forces directement appliquées au système est nulle pour tout système de déplacements virtuels compatible avec les liaisons.*

Tel est le *principe des vitesses virtuelles*, dont l'importance philosophique est considérable, puisque, réduisant toute question d'équilibre de forces à une détermination de rapports de vitesses, il ramène d'un coup la Statique à la Cinématique, et dont l'utilité pratique n'est pas moindre, car il est simplement la traduction en langage mathématique du fameux adage :

Ce que l'on gagne en force, on le perd en vitesse, et réciproquement.



Galilée (1) avait bien reconnu cette loi comme une propriété générale de l'équilibre, mais c'est Descartes (2) qui le premier y montra la vraie raison de l'équilibre. Bernoulli (3) l'énonça ensuite sous sa forme générale; et Lagrange (4) en déduisit une formule renfermant la solution de tous les problèmes d'équilibre.

69. Condition générale de l'équilibre. — Dans la dernière équation, $Smm'f(r)\,\delta r$ est toujours une différentielle exacte des coordonnées des points m, m', m''..... S'il en est de même de $\sum(X_e\delta x + Y_e\delta y + Z_e\delta z)$ (et cela aura toujours lieu dans le cas des forces naturelles), si par conséquent les forces extérieures et intérieures (5) ont un potentiel $V = F(x, y\ z, x'\ y'\ z', \ldots)$, dans lequel nous supposerons que l'on ait remplacé k coordonnées par leurs valeurs en fonction des $3n-k$ autres coordonnées qui restent ainsi indépendantes; alors la condition précédente se réduit à

$$\delta V = 0;$$

ce qui exprime que *pour l'équilibre il faut que le potentiel soit un maximum ou un minimum relativement à toutes les variables indépendantes.*

70. Quand le potentiel est minimum, l'équilibre est stable. — Soient, en effet, a, b, c, a'..... les valeurs de x, y, z, x'..... dans la position d'équilibre pour laquelle V est minimum.

(1) *Les Méchaniques de Galilée, mathématicien et ingénieur du duc de Florence, avec plusieurs additions*, traduites de l'italien par le P. Mersenne, minime. Paris, 1634; et en particulier l'épître dédicatoire de Mersenne, où le commentateur de Galilée dit « que l'on ne peut rien gagner en force qu'on ne le perde en temps ».

(2) DESCARTES, *Méchanique*, traduite par Nicolas Poisson, de l'Oratoire, 1668: explication des machines et engins par l'aide desquels on peut, avec une petite force, lever un fardeau fort pesant.

(3) BERNOULLI, *Lettre à Varignon*. Bâle, 1717.

(4) LAGRANGE, *Mécanique analytique*. Paris, 1788.

(5) Dans le cas d'un corps solide libre ou de plusieurs corps solides agissant les uns sur les autres, les travaux moléculaires sont nuls, et le potentiel se rapporte simplement aux actions extérieures.

Déplaçons chacun des points d'une quantité extrêmement petite, de sorte que les coordonnées deviennent

$$a+h_0,\ b+k_0,\ c+l_0,\ a'+h'_0,\ b'+k'_0,\ c'+l'_0\cdots$$

et communiquons-leur des vitesses très petites v_0, v'_0... ; nous allons montrer que le déplacement du système restera toujours très petit, que par conséquent l'équilibre sera stable.

Soient $x=a+h$, $y=b+k$, $z=c+l$, $x'=a'+h'$..... ce que deviennent les coordonnées, et soient v, v'..... ce que deviennent les vitesses à une époque t quelconque, on a :

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}=-\text{F}(a+h,\ b+k,\ c+l,\ a'+h'\cdots)$$
$$+\text{F}(a+h_0,\ b+k_0,\ c+l_0,\ a'+h'_0\cdots).$$

Posons

$$\text{F}(a+h,\ b+k,\ c+l,\ a'+h'\cdots)=\text{F}(a,b,c,a'\cdots)+\psi(h,k,l,h'\cdots),$$

ψ étant une fonction qui s'annule pour $h=0$, $k=0$, $l=0$, $h'=0$....., et qui est positive et croissante tant que h, k, l, h'..... sont inférieurs à certaines limites H, K, L, H'.....; il vient

$$\Sigma\frac{mv^2}{2}=\Sigma\frac{mv_0^2}{2}-\psi(h,k,l,h'\cdots)+\psi(h_0,k_0,l_0,h'_0\cdots).$$

Soit A la quantité très petite $\frac{1}{2}\Sigma mv_0^2+\psi\,(h_0,\ k_0,\ l_0,\ h'_0.....)$, $\psi\,(h,\ k,\ l,\ h'.....)$ doit rester toujours inférieure à cette quantité, car $\Sigma\frac{mv^2}{2}$ ne saurait devenir <0; donc les déplacements h, k, l, h'..... resteront eux-mêmes très petits, et l'équilibre sera stable.

Soit, par exemple, un système solide, ou plus généralement un système dans lequel le travail des actions moléculaires soit nul, et qui soit soumis à la seule action de la pesanteur. Appelons P le poids du système et z_1 l'ordonnée verticale du centre de gravité; nous aurons

$$\text{V}=\text{P}z_1.$$

Pour que l'équilibre soit stable, il faut que z_1 soit un minimum, c'est-à-dire que le centre de gravité soit le plus bas possible.

Lorsque le potentiel est maximum, l'équilibre est instable [1].

IV. — UNITÉS ABSOLUES. SYSTÈME C.G.S.

71. Unités fondamentales; unités dérivées. — Dans toute science mécanique, et par là il faut entendre toute science ayant un objet matériel, les quantités à étudier, si variées qu'elles soient, peuvent s'exprimer à l'aide des trois unités de *longueur*, de *masse* et de *temps*.

A ces trois *unités fondamentales* peuvent se ramener toutes les unités secondaires. Ainsi, par exemple, l'unité de surface sera le carré construit sur l'unité de longueur; l'unité de vitesse sera la vitesse d'un mobile parcourant d'un mouvement uniforme l'unité de longueur dans l'unité de temps, etc. Il faudra seulement avoir soin de rattacher les *unités dérivées* aux unités fondamentales par des relations simples, et de faire connaître, dans tous les cas, ces relations, de façon que l'on puisse toujours transformer les résultats numériques obtenus dans un système quelconque en leurs valeurs dans un autre système. Le moyen d'assurer cette possibilité, c'est de donner pour chaque unité dérivée ses *dimensions* relativement aux trois unités fondamentales.

72. Dimensions. — Si b varie comme la puissance n de a, b est dit de n dimensions par rapport à a. Ainsi, l'unité de surface L^2 a deux dimensions par rapport à l'unité de longueur L; l'unité de vitesse LT^{-1} est de la dimension 1 par rapport à L et de la dimension -1 par rapport à l'unité de temps T, et la relation $V = LT^{-1}$ qui exprime les dimensions de la grandeur considérée s'appelle l'*équation des dimensions* de cette grandeur. Il est visible que si l'unité de longueur devient 100 fois plus petite, le nombre qui représente une longueur déterminée devient 100 fois plus grand.

[1] Voir Resal, *Traité de Mécanique générale*. Paris, Gauthier-Villars, 1873; I, 261.

lui qui exprime une surface 100^2 ou 10 000 fois plus grand, celui qui exprime une vitesse 100 fois plus grand, etc. Si en outre l'unité de temps devenait 60 fois plus grande, l'expression de la vitesse devrait encore être multipliée par $\left(\frac{1}{60}\right)^{-1}$, de sorte qu'elle deviendrait $100 \times \left(\frac{1}{60}\right)^{-1}$ ou 6000 fois plus grande. Ainsi, chaque dimension d'une grandeur marque la puissance du rapport de l'ancienne unité à la nouvelle par laquelle il faut multiplier l'ancienne mesure de cette grandeur pour la traduire dans les nouvelles unités; d'où la règle pour avoir le coefficient numérique par lequel il faut multiplier l'expression d'une grandeur quand on passe d'un système à un autre : *évaluer dans le nouveau système les unités fondamentales de l'ancien et porter ces nombres dans l'équation des dimensions de la grandeur considérée.*

73. Unités fondamentales dans le système C.G.S. — L'unité de temps universellement admise jusqu'ici est la *seconde* de temps moyen. Dépendant à la fois de la durée exacte d'une révolution de la terre autour de son axe et du temps employé par notre globe à parcourir son orbite autour du soleil entre deux passages successifs à l'équinoxe du printemps, ou en d'autres termes dépendant à la fois de la valeur du jour sidéral et de la longueur de l'année tropique, notre unité de temps ne repose pas sur des bases immuables. Il y aurait certainement avantage à lui substituer une unité à l'abri de tout changement, telle que la durée de la vibration d'une lumière simple facile à reproduire, la durée de la vibration de la raie du sodium par exemple : certains physiciens l'ont déjà proposé. Nous resterons cependant dans la tradition et nous garderons pour unité de temps la seconde de temps moyen.

L'unité scientifique de longueur est le mètre, c'est-à-dire une longueur égale à celle de l'étalon des Archives, ou l'un des multiples du mètre : les physiciens anglais ont adopté le *centimètre*. Peut-être paraîtrait-il plus logique de prendre pour unité de longueur, la longueur d'onde, dans le vide, de la lumière à laquelle on aurait déjà emprunté l'unité de temps; mais le système métrique est adopté aujourd'hui partout, et notre unité de longueur sera le centimètre.

L'unité de masse est le *gramme-masse*, c'est-à-dire théoriquement la masse d'un centimètre cube d'eau distillée à 4°, et pratiquement le $\frac{1}{1000}$ de la masse du kilogramme étalon conservé aux Archives. L'unité fondamentale fut d'abord l'unité de poids (43); mais alors l'unité de masse et l'unité de force dépendaient toutes les deux de l'intensité g de la pesanteur, laquelle varie d'un point du globe à l'autre. Cet inconvénient frappa Gauss, lorsqu'il voulut instituer un système général d'observations de la force magnétique, comportant des mesures dans des pays où l'intensité de la pesanteur est très différente. Il prit comme unité fondamentale la masse du gramme; par suite l'unité de force devint $\frac{1 \text{ gr.}}{g}$ [1] $= \frac{1 \text{ gr.}}{981}$; et les résultats numériques des mesures furent alors partout exactement comparables. Pratiquement d'ailleurs ce système est fort commode, la masse y étant précisément représentée par le nombre même qui vulgairement exprime le poids.

En prenant notre unité de masse dans le système métrique, nous lui imposons la relation qui, dans ce système, rattache les poids aux volumes, nous l'assujettissons à varier comme L^3: le choix d'une substance particulière, l'eau, pour étalon des densités, établit ainsi un rapport qui n'est pas dans la nature des choses. En mécanique céleste, on déduit l'unité de masse des unités de temps et de longueur en s'appuyant sur le fait de la gravitation universelle: l'unité de masse est la masse qui attire un corps quelconque placé à l'unité de distance de manière à communiquer à ce corps l'unité d'accélération. Il n'y aurait aucun inconvénient à adopter en physique cette unité vraiment naturelle: on peut en effet dès aujourd'hui l'évaluer numériquement en grammes d'une manière satisfaisante [2]. Nous ne pouvons, au contraire, prévoir le jour où l'on

[1] On doit toujours avoir en effet $P = mg$, ou l'unité de masse doit toujours être g fois l'unité de poids.

[2] Soit m l'unité de masse adoptée en mécanique céleste; placée à la distance 1 d'une masse quelconque μ, elle lui communique une accélération 1. A la surface du globe la masse μ prend une accélération g sous l'action de la terre de masse M, agissant comme si elle était concentrée en son centre à la distance R de μ. On a donc $\frac{1}{g} = \frac{m}{M} \cdot \frac{R^2}{1}$; d'où, en appelant D la den

saura peser une molécule isolée de sodium, molécule dont la masse serait logiquement l'unité de masse, si la vibration de la raie D fournissait déjà les unités de longueur et de temps.

Le système établi sur ces unités fondamentales, centimètre, gramme masse, seconde [1], ou système C.G.S., tend à se répandre de plus en plus. Ce seul motif le recommande particulièrement. Un système de mesures universellement admis par tous les peuples offrirait des avantages incontestables. Il est certain cependant qu'en général une seule unité ne suffit pas pour chaque ordre de quantités : ainsi, la distance du soleil à la terre ne saurait raisonnablement être exprimée en centimètres, pas plus qu'une longueur d'onde ne sera commodément mesurée avec cette même unité. On résout en partie la difficulté par l'emploi de multiples et de sous-multiples : les grandes longueurs s'évaluent en kilomètres, en myriamètres, en rayons terrestres; pour les petites longueurs on a adopté le *micron* ou millionième de mètre (ou millième de millimètre). Dans le système C.G.S., outre les multiples et les sous-multiples habituels du système métrique, on emploie le multiple *méga* (un million) et le sous-multiple *micron* (un millionième).

74. Unités dérivées d'un usage fréquent en mécanique. — Il ne sera pas inutile de rappeler ici pour chacune des principales unités mécaniques sa définition en fonction des unités fondamentales, définition dont l'expression analytique n'est autre chose que l'équation des dimensions.

1° Unité de vitesse. — Vitesse d'un mobile parcourant l'unité de longueur dans l'unité de temps.

Équation des dimensions : $V = LT^{-1}$.

2° Unité d'accélération. — Accélération d'un mobile dont la vitesse croît d'une unité dans l'unité de temps.

Équation des dimensions : $G = VT^{-1} = LT^{-2}$.

sité de la terre, $m = \frac{4}{3} \frac{\pi RD}{g}$. $R = 637\,100\,000$, $D = 5{,}56$, $g = 981$; donc $m = 15\,000\,000$ grammes-masses.

[1] Un exposé très net de ce système, *Illustrations of the centimetre-gramme, second systeme of unites*, London, 1875, a été publié par le professeur Everett sous les auspices de la Société royale de Londres. Une traduction française de cet ouvrage vient de paraître chez Gauthier-Villars.

3° UNITÉ DE FORCE OU *dyne*. — Force qui communique à l'un de masse l'unité d'accélération.

Équation des dimensions : $F = MG = MDT^{-2}$.

La dyne $= \frac{1 \text{ gr.}}{981}$ diffère peu du milligramme.

1 milligramme vaut 0,981 dyne.
1 gramme » 0,981 kilodyne.
1 kilogramme » 0,981 mégadyne.

4° UNITÉ D'ÉNERGIE OU *erg*. — Travail accompli par l'unité force se déplaçant, suivant sa propre direction, de l'unité de lo gueur.

Équation des dimensions : $W = FL = ML^2T^{-2}$.

1 gramme-centimètre vaut g ergs.
1 kilogrammètre » 100 000 g ergs ou 98,1 mégergs.

5° UNITÉ DE PUISSANCE. — Puissance d'un moteur qui fournit l'uni de travail dans l'unité de temps.

Équation des dimensions : $P = \frac{W}{T} = ML^2T^{-3}$.

1 cheval vapeur vaut $75 \times 100\,000\, g$ unités ou $7,36 \times 10^9$ unités ([1]

([1]) Pour les très grands nombres on emploie avantageusement la not tion $K.10^n$. On évite ainsi les files de zéros ; et si l'on prend K entre 0 et 10, n e la caractéristique du logarithme de $K.10^n$. Ainsi, le logarithme de 7,36.1 est 9,86688.

CHAPITRE II

PESANTEUR

I. — CHUTE DES CORPS.

75. Direction de la pesanteur. Verticale. — La pesanteur est la force qui sollicite tous les corps vers le centre de la terre. Comme en toute force, on doit y distinguer la direction, le point d'application et l'intensité.

La direction de la pesanteur est la *verticale*. Elle est donnée par

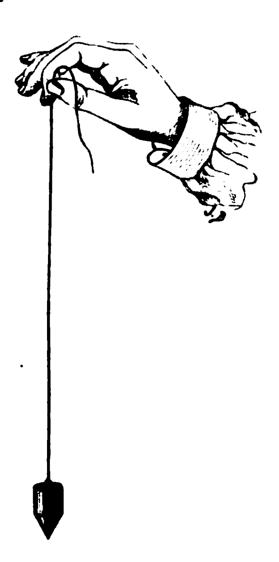


Fig. 88

le fil à plomb: la pesanteur étant la seule force qui agisse sur le corps suspendu au fil, il ne peut y avoir équilibre que si la

direction du fil, supposé parfaitement flexible, est la directi même de la force.

La verticale est, en chaque point, perpendiculaire à la surfa des eaux tranquilles. On le constate au moyen d'un fil de soie t fin sans torsion, rabattu à sa partie supérieure sur un support ho zontal et muni à sa partie inférieure d'un petit poids en plati plongeant dans un liquide opaque, eau noircie ou mercure. (

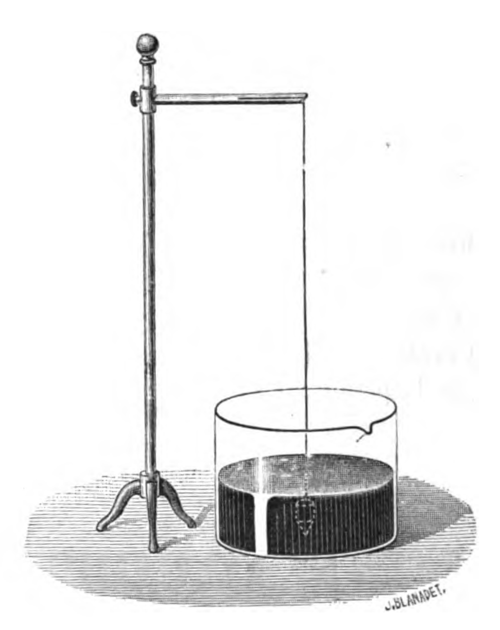


Fig. 89

dirige un rayon visuel selon le fil et l'on voit celui-ci exactement prolongé par son image dans le liquide. D'après les lois de la réflexion, ce résultat ne peut s'expliquer que si le fil est normal à la surface du liquide.

La surface des eaux tranquilles considérée sur une grande étendue étant convexe, et le fil à plomb étant en chaque point normal à cette surface, les verticales de deux lieux un peu éloignés l'un de l'autre ne sont pas parallèles; mais en deux points voisins les verticales peuvent être regardées comme parallèles.

76. Centre de gravité. — *Définition du centre de gravité.* —

'n corps étant divisé en parties aussi petites que l'on voudra, chaune de ces parties est sollicitée par la pesanteur; toutes ces actions ont parallèles, elles ont donc une résultante, qui se nomme le *oids* du corps, égale à leur somme, parallèle à leur direction commune et dont le point d'application, ou centre des forces parallèles, appelle le *centre de gravité* du corps. Le centre de gravité d'un orps est donc le point d'application de la résultante des actions élémentaires de la pesanteur sur le corps. Si on fixe ce point, le corps st en équilibre dans toutes les positions sous l'action de la pesanteur.

Détermination du centre de gravité d'un corps homogène. — Le centre des forces parallèles étant invariable, 1° quand on change a direction commune des forces, sans modifier les intensités, 2° quand on fait varier toutes les intensités des forces dans un même rapport, le centre de gravité reste invariable, soit que l'on change l'orientation du corps, soit qu'on le transporte en divers lieux où l'intensité de la pesanteur est différente.

Si le corps est homogène, le poids d'un élément quelconque est proportionnel à son volume, la détermination du centre de gravité peut donc se faire géométriquement. Si le corps homogène est liquide ou gazeux, on supposera des liaisons fixes entre ses diverses parties, ce qui ne troublera pas l'équilibre, mais permettra de composer les forces appliquées à ces parties et de déterminer la position du centre de gravité du corps, sous sa forme actuelle, comme s'il s'agissait d'un corps solide.

Si l'on considère un prisme homogène ayant pour base une surface quelconque et qu'on suppose la hauteur de ce prisme diminuant indéfiniment, son centre de gravité approchera de plus en plus du centre d'un système de forces parallèles proportionnelles aux aires des différents éléments de la surface. Ce point s'appelle le centre de gravité de la surface.

De même, en réduisant indéfiniment la section d'un fil très mince, on obtient une ligne pesante dont on pourra déterminer le centre de gravité.

Tout corps homogène qui a un plan diamétral a son centre de gravité dans ce plan.

Tout corps homogène qui a un axe de symétrie a son centre de gravité sur cet axe.

Tout corps homogène qui a un centre de figure a son centre de gravité en ce point.

L'application de ces principes évidents permettra de déterminer le centre de gravité d'un solide géométrique quelconque ; ainsi on reconnaîtra sans peine que : le centre de gravité d'un prisme triangulaire se trouve au milieu de la droite qui joint les points de rencontre des médianes des deux bases ; le centre de gravité d'un tétraèdre est situé sur la droite qui joint un sommet au point de rencontre des médianes de la face opposée, et au quart de cette droite à partir de la face, etc.

Analytiquement, on déterminera la position du centre de gravité d'un corps quelconque en appliquant le théorème des moments à chacun des plans coordonnés (38). Partageons le corps en une infinité de tranches par une série de plans perpendiculaires à l'axe des x; coupons-le par une deuxième série de plans perpendiculaires à l'axe des y, et enfin par une troisième série de plans perpendiculaires à l'axe des z. Le corps sera ainsi divisé en une infinité d'éléments parallélipipèdes rectangles : $dxdydz$ est le volume d'un de ces éléments ; $pdxdydz$ est le poids de cet élément, p étant le poids de l'unité de volume ou le poids spécifique du corps. Si donc nous appelons P le poids total du corps ; X, Y, Z, les coordonnées du centre de gravité, nous aurons :

$$\mathrm{PX} = \iiint pxdxdydz,$$

$$\mathrm{PY} = \iiint pydxdydz,$$

$$\mathrm{PZ} = \iiint pzdxdydz,$$

chacune des intégrations étant faite entre les limites marquées par la surface extérieure du corps.

Équilibre d'un corps soumis à la seule action de la pesanteur. — La considération du centre de gravité permet de formuler très simplement les conditions d'équilibre d'un corps pesant.

Si le corps est suspendu par un point, la résultante des actions de la pesanteur sur le corps ne sera détruite par la résistance du point fixe que si la direction de la résultante passe par ce point : donc la ver-

ticale du centre de gravité du corps devra passer par le point de suspension. De là un moyen pratique de déterminer la position du centre de gravité d'un corps de forme quelconque n'ayant pas une masse trop considérable. On le suspend par un de ses points à un fil flexible et on le laisse se mettre en équilibre, alors la direction du fil passe par le centre de gravité du corps. On répète la même opération

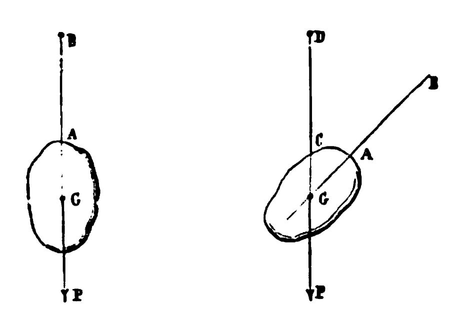


Fig. 90

en suspendant le corps par un autre point, le centre de gravité est au point de rencontre des deux directions du fil, lesquelles se coupent nécessairement, puisqu'elles passent toutes les deux par le centre de gravité.

Si un corps pesant est mobile autour d'un axe, pour l'équilibre il faut et il suffit que le centre de gravité du corps soit dans le plan vertical de l'axe. On utilise cette remarque pour déterminer expérimentalement le centre de gravité d'un corps de grande masse. On cherche à le mettre en équilibre sur l'arête d'un fort couteau en acier; lorsqu'on y est parvenu, le plan vertical passant par cette arête contient le centre de gravité. On répète la même expérience dans deux autres positions, le point d'intersection des trois plans est le centre de gravité cherché.

Quand le corps repose sur un obstacle, un plan horizontal par exemple, s'il touche le plan par un point seulement ou par deux points de sa surface, les conditions d'équilibre rentrent dans celles que nous venons d'examiner. L'équilibre pourra d'ailleurs être stable, instable ou indifférent. Il sera stable si le corps légèrement écarté de sa position d'équilibre tend à y revenir : exemple,

un ellipsoïde reposant par l'une des extrémités du petit axe. L'équilibre sera instable si, le corps étant incliné d'une très petite quantité, son poids tend à l'écarter davantage de sa position première ; cet équilibre est pratiquement irréalisable, le moindre dérangement du corps amenant la rupture de l'équilibre théorique : exemple, un ellipsoïde reposant par l'extrémité du grand axe, un cône posé sur son sommet, etc. Une sphère placée sur un plan horizontal est dans un état d'équilibre indifférent.

Quand le corps touche le plan par plusieurs points, il faut, pour qu'il y ait équilibre, que la verticale menée par le centre de gravité passe dans l'intérieur du polygone que l'on obtient en joignant par des lignes droites les points de contact extérieurs et que l'on nomme *polygone de sustentation.*

Soit g la projection du centre de gravité sur le plan d'appui, ce point g doit être à l'intérieur du polygone de sustentation ABCDEF.

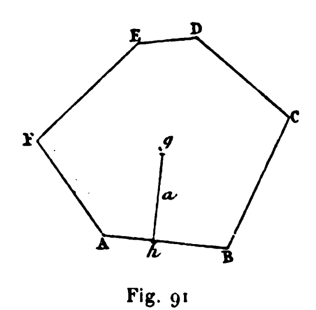


Fig. 91

De g abaissons gh perpendiculaire sur AB ; au point h nous pouvons supposer appliquées deux forces contraires P, $-$P égales toutes deux en valeur absolue au poids du corps ; on a alors une force P appliquée au point h et un couple P, $-$P de bras de levier gh ou a. Si donc le corps bascule autour de AB, la force étant détruite par la résistance de l'axe AB, il reste le couple pour ramener le corps dans sa position d'équilibre ; le moment Pa de ce couple s'appelle le *moment de stabilité* du corps *par rapport à l'axe* AB.

La stabilité a en effet pour mesure le travail qu'il faut dépenser pour amener le corps à basculer. Faisons dans le corps une coupe

verticale suivant gh. Soit G le centre de gravité auquel est appliqué

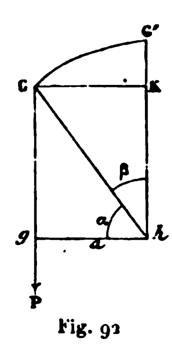


Fig. 92

le poids P du corps. Pour amener ce point en G' au-dessus de AB, il faut un travail

$$T_0^1 = P.G'K = Pa(\sec\alpha - \text{tg}\,\alpha),$$

ou, en introduisant l'angle $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$,

$$T_0^1 = Pa\,\text{tg}\,\frac{\beta}{2} = \text{moment de stabilité} \times \text{tg}\,\frac{\beta}{2},$$

expression qui, toutes choses égales d'ailleurs, est maximum pour $\beta = 90$, et qui pour une valeur déterminée de β est d'autant plus grande que le moment de stabilité est lui-même plus grand. De là le nom donné à ce moment.

D'une manière générale, la stabilité est maximum lorsque le centre de gravité est situé le plus bas possible (70).

On trouve dans les cabinets de physique plusieurs appareils où la tendance du centre de gravité à se placer le plus bas possible se ma-

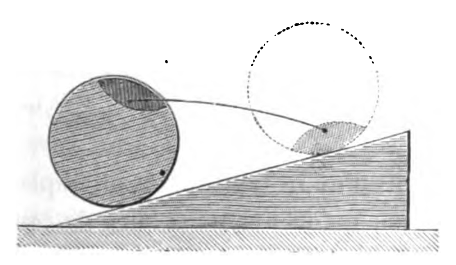


Fig. 93

nifeste d'une manière très nette. Tel est le disque de bois portant

latéralement une masse de plomb : si on le pose sur un plan légè rement incliné de manière que la verticale du centre de gravit tombe un peu en avant du point de contact, on le verra remonter l plan incliné. Tel est encore le double cône homogène que l'o

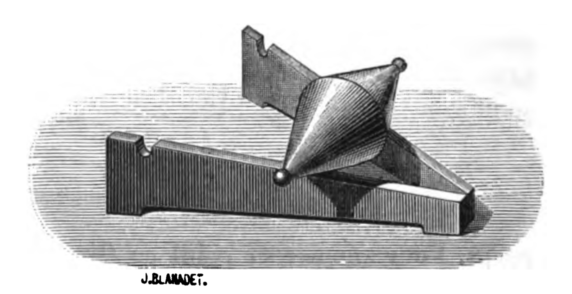


Fig. 94

place sur deux règles inclinées réunies à leur sommet par une char nière permettant de les écarter plus ou moins : si l'angle de ce deux lames a une valeur convenable, le double cône roule ver la partie la plus haute des lames inclinées et paraît remonter tandis qu'en réalité son centre de gravité ne fait que descendre. En

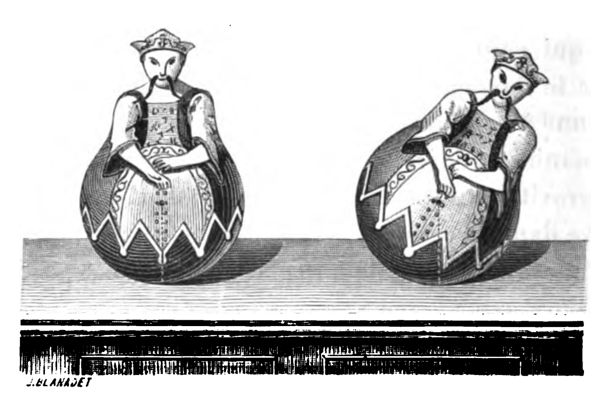


Fig. 95

alourdissant les pieds d'un instrument de physique, on lui donnera de la stabilité, parce qu'on amènera ainsi le centre de gravité à être très bas, comme dans les poussahs.

77. Lois de la chute des corps. — Une force est déterminée

quand on connaît le mouvement qu'elle communique à un corps soumis à son action (44). Pour trouver l'intensité de la pesanteur, nous chercherons donc d'abord les lois expérimentales de la chute des corps. Elles ont été établies par Galilée [1].

78. La pesanteur agit également sur tous les corps. — Le premier fait constaté est celui-ci : tous les corps, quelles qu'en soient la masse et la nature, tombent avec la même vitesse. Des faits d'observation courante ne paraissent point vérifier cette proposition ; lorsque les corps tombent dans l'air, ils tombent avec des vitesses différentes ; mais ce phénomène est dû à la résistance variable que l'air leur oppose selon leur différent volume. Galilée, du temps (1589-1592) où il était professeur de mathématiques à Pise [2], démontra par des expériences répétées, faites du haut de la Tour penchée, que des corps de poids différents tombent avec la même vitesse, contrairement à l'opinion alors universellement admise d'Aristote qui soutenait que les corps tombent d'autant plus vite qu'ils sont plus pesants [3].

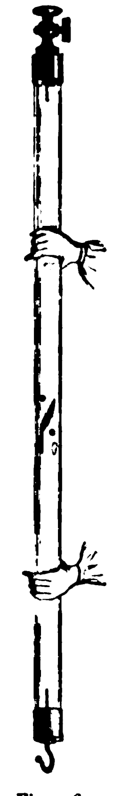


Fig. 96

Frenicle, puis Mariotte, refirent en France ces expériences ; en Angleterre, Desaguliers les reproduisit du haut du dôme de Saint-Paul, en présence de Newton qui imagina alors de donner une preuve plus concluante en opérant dans le vide. C'est à Newton que l'on doit en effet l'expérience du tube au moyen duquel on montre facilement que des corps de nature très différente (plomb, papier, plume, etc.), tombent également vite dans le vide. Si on laisse peu à peu rentrer l'air dans le *tube de Newton*, les corps légers éprouvent des retards qui vont en augmentant graduellement.

La résistance de l'air au mouvement d'un corps qui tombe se fait différemment sentir suivant la surface par laquelle le corps agit

[1] Galilée, né à Pise en 1564, mort à Arcetri, près Florence, en 1642; *Œuvres complètes*, édition Alberi, 16 vol.; Florence, 1842-1856.

[2] Voir Thurot, *Journal de Physique*, III, 160; 1874.

[3] Stévin, contemporain de Galilée, avait de son côté réfuté l'erreur des

lui-même sur l'air. Une feuille de papier tombe lentement : froi sons-la de manière à en réduire la surface, elle tombera beaucou plus vite. Deux feuilles de papier tombant, l'une à plat, l'autre d champ, auront des vitesses très différentes. On réalise un effet to semblable avec le double moulinet figuré ci-contre. Les ailes d l'une des roues B sont orientées dans des plans passant par l'axe d rotation; celles de l'autre A sont toutes dans un même plan perpen diculaire à l'axe. On communique une même vitesse initiale au

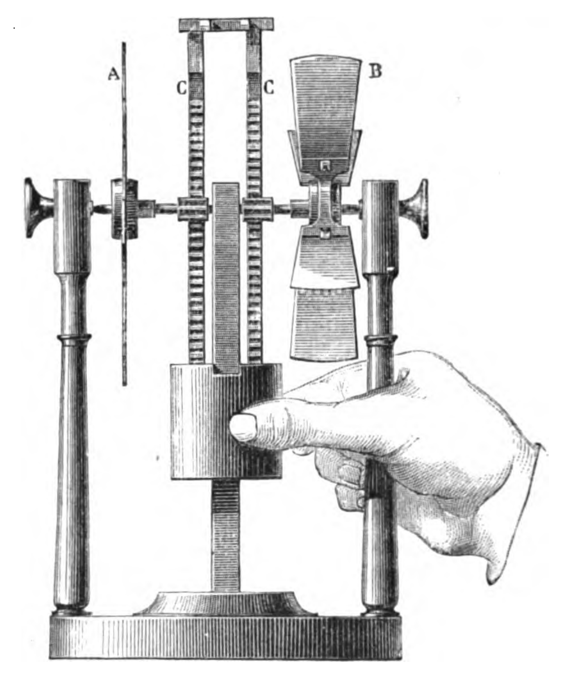


Fig. 97

deux moulinets en laissant tomber un poids adapté à l'appareil. Ce poids entraîne deux crémaillères qui engrènent sur des pignons fixés aux moulinets. Quand le poids arrive en bas, les deux crémaillères quittent les pignons qui peuvent tourner librement dans les échancrures CC. Les deux petits moulins ont ainsi reçu même im-

péripatéticiens en laissant tomber en même temps sur une planche de bois deux boules de plomb dont l'une était dix fois aussi pesante que l'autre et en montrant qu'il n'y avait pas de différence appréciable dans les temps de chute.

ulsion : B s'arrête bien avant A. Si on répète l'expérience sous le écipient d'une machine pneumatique, les deux moulinets se meuvent exactement pendant le même temps.

A surface égale, la résistance de l'air retarde beaucoup plus les corps les plus légers. Prenons, par exemple, une pièce d'argent et un disque de papier de même diamètre et d'épaisseur négligeable ; laissons-les tomber séparément : la pièce d'argent tombera plus vite que le disque de papier. Considérons en effet la chute pendant un temps assez court pour que l'on puisse regarder les forces agissantes comme constantes : soient g l'accélération que le poids P de la pièce d'argent communiquerait à cette pièce dans le vide, et g' l'accélération que la pièce prend dans l'air opposant une résistance r. D'après le principe de la proportionnalité des accélérations aux forces agissant sur une même masse (42, III), on a :

$$\frac{g'}{g}=\frac{P-r}{P},$$

d'où

$$g'=g\left(1-\frac{r}{P}\right).$$

Dans le vide, le disque de papier de poids p recevrait de cette force p la même accélération g que la pièce d'argent reçoit de son poids P ; dans l'air, le papier, ayant même surface que la pièce, éprouve la même résistance r, et l'accélération g'' de son mouvement dans l'air est

$$g''=g\left(1-\frac{r}{p}\right);$$

mais $\frac{r}{p}$ est beaucoup plus grand que $\frac{r}{P}$, g'' sera donc très inférieur à g' : le papier tombera beaucoup plus lentement que l'argent. Si nous plaçons le papier sur la pièce de monnaie, les deux rondelles arriveront au sol en même temps. Elles ne forment plus alors en effet qu'un seul corps tombant avec l'accélération

$$g'''=g\left(1-\frac{r}{P+p}\right).$$

On observe un fait analogue et plus curieux encore dans le *marteau d'eau*. C'est un tube de verre épais, terminé à sa partie supérieure par une boule d'une capacité suffisante pour contenir toute l'eau renfermée dans l'appareil. Avant de sceller le tube, on a eu soin d'y faire longuement bouillir l'eau de façon à chasser complètement l'air. Si, après avoir fait passer toute l'eau dans la boule, on retourne ensuite brusquement l'appareil, l'eau tombe en un bloc, comme un corps solide, et vient frapper avec bruit, à la façon d'un marteau, le fond du tube que l'on a particulièrement épaissi afin qu'il ne se brise pas sous le choc. Ainsi les gouttes d'eau, qui se séparent dans l'air, sont ici restées unies : d'où l'on conclut que, dans le vide, ces gouttes tombent toutes avec la même vitesse.

Fig. 98

79. Plan incliné de Galilée. — La recherche des lois de la chute des corps par Galilée est un modèle de la vraie méthode des sciences physiques, telle qu'il l'a créée et pratiquée lui-même avec bonheur (¹). Ayant d'abord établi que la pesanteur agit également sur tous les corps, Galilée part de cette hypothèse, qu'elle est une force continue et constante. Sous l'action d'une telle force, la vitesse croît proportionnellement au temps (42). Mais comment mesurer la vitesse? Galilée tourne la difficulté en transformant la question : il démontre géométriquement que les espaces parcourus par un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré, sont proportionnels aux carrés des temps. Il suffira donc de mesurer les espaces parcourus dans des temps différents et connus, pour reconnaître si l'idée que l'on s'est faite *a priori* de la pesanteur est exacte. Mais les corps tombent très vite en chute libre, et la mesure directe de l'espace parcouru dans un temps donné sera peu exacte. Galilée transforme encore une fois mathématiquement la question pour la ramener à la mesure de quantités facilement mesurables, prouvant ainsi combien il avait raison de dire que pour être bon physicien il faut d'abord être ma-

(¹) Voir à ce sujet TH. HENRI MARTIN, *Galilée*. Paris, Didier, 1868; et TURBOT, *loc. cit.*

thématicien : il démontre qu' « un corps pesant descend suivant la verticale avec une force qui est plus grande que celle avec laquelle il descend suivant un plan incliné, dans la proportion où la ligne de plus grande pente du plan est plus longue que la verticale. » Le mouvement suivant un plan incliné sera donc le mouvement vertical retardé dans un rapport connu et que l'on règlera à son gré. L'expérience est dès lors facile, et l'hypothèse posée au début va pouvoir être soumise au seul vrai criterium en physique, au contrôle de mesures exactes.

Soit donc un plan incliné dont la ligne de plus grande pente AB fait un angle α avec l'horizontale BC, et soit sur ce plan un mobile que l'on peut toujours supposer réduit à son centre de gravité. A

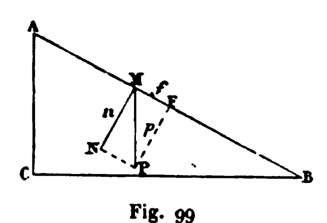


Fig. 99

ce point M est appliqué le poids p du corps, agissant suivant la verticale. Cette force MP peut être remplacée par deux autres, l'une n normale au plan, l'autre f dirigée suivant AB : en menant, par le point P, PN et PF respectivement parallèles à AB et à la normale MN au plan, on forme un rectangle PMNF dont les côtés MN et MF déterminent les intensités des deux composantes n et f. Mais la force $n = \text{MN}$, normale au plan, est détruite par la résistance du plan; il reste donc seulement comme force efficace la composante f dont l'intensité MF est facile à calculer. L'angle MPF est en effet égal à l'angle $\text{ABC} = \alpha$, comme ayant ses côtés PM,PF, respectivement perpendiculaires aux côtés BC,BA de l'angle ABC ; on a donc

$$f = p \frac{\text{AC}}{\text{AB}}.$$

Ainsi, la composante efficace f est égale au poids p réduit dans le rapport de la hauteur AC du plan à sa longueur AB comptée suivant

la ligne de plus grande pente. Pour connaître le mouvement produit par le poids p, il suffira donc d'étudier celui qui s'effectue sous l'action de la force f, et dont la lenteur rend les mesures faciles en même temps qu'elle diminue singulièrement l'effet de la résistance de l'air.

Loi des espaces. — Pour cette étude, « on prenait une barre de bois longue d'environ 12 brasses ($7^m,20$) (1) et large d'un côté d'une 1/2 brasse ($0^m,30$), de l'autre de 3 doigts ($0^m,075$) (2) : sur ce dernier côté, on avait creusé un canal d'un peu plus de 1 doigt ($0^m,025$) de largeur. Après s'être assuré que le canal était bien droit, et l'avoir convenablement poli et lissé et recouvert de parchemin aussi lustré que possible, on y introduisait une boule de bronze très dure, exactement arrondie et polie; élevant ensuite l'une des extrémités de la barre de 1 brasse ou 2 à volonté, on faisait descendre la boule dans le canal, en notant le temps qu'elle mettait à le parcourir entièrement : on recommençait l'expérience plusieurs fois pour bien s'assurer de ce temps. Ensuite on faisait descendre la boule seulement jusqu'au quart du canal, et en mesurant le temps, on constatait qu'il était exactement la moitié du premier. En comparant ainsi le temps que la boule mettait à parcourir la barre dans toute sa longueur avec celui qu'elle mettait à en parcourir la moitié, les $\frac{2}{3}$, les $\frac{3}{4}$, n'importe quelle autre fraction, on trouvait toujours que les espaces parcourus étaient comme les carrés des temps, et cela quelle que fût l'inclinaison de la barre. Pour mesurer le temps, on élevait un grand seau plein d'eau, muni au fond d'un petit robinet, par lequel coulait un mince filet d'eau qu'on recueillait dans un gobelet pendant tout le temps que la boule descendait (3); l'eau ainsi recueillie était pesée à une balance très exacte; les différences et les proportions des diverses pesées donnaient les différences et les proportions des temps, et

(1) En prenant la brasse de Florence égale à $0^m,60$. D'après Mersenne (*Cogitata physico mathematica*; Paris, 1647, III, 218), elle serait *satis præcise* de 23 pouces de France, soit $0^m,62$; de Prony, dans son évaluation des mesures linéaires (*Annuaire du Bureau des longitudes pour* 1846, p. 62), donne $0^m,59$.

(2) Selon Mersenne, le doigt était *forte* le $\frac{1}{24}$ de la brasse.

(3) Le seau étant grand, le niveau du liquide restait sensiblement invariable.

ela avec une telle justesse, que les opérations répétées un grand nombre de fois, n'offraient pas de variations appréciables (1). » Ainsi, quelle que soit l'inclinaison du plan, et par conséquent en chute libre, les *espaces parcourus par un corps qui tombe sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir.*

Soient g l'accélération de ce mouvement, e l'espace parcouru dans le temps t,

$$e = \frac{1}{2} g t^2,$$

la constante g pouvant se déduire des mesures précédentes. En effet, la composante efficace le long du plan incliné est

$$f = p \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}},$$

ou

$$f = p \sin \alpha;$$

mais les accélérations communiquées par deux forces différentes f et p à une même masse sont proportionnelles aux forces; si donc nous appelons g' l'accélération du mouvement suivant le plan incliné,

$$g' = g \sin \alpha;$$

la mesure de g' et celle de $\sin \alpha$ donnent donc g.

Si 1 représente l'espace parcouru par un mobile qui tombe pendant un certain temps, l'espace parcouru pendant un temps double sera 4, l'espace parcouru pendant un temps triple sera 9, et ainsi de suite. Si au contraire nous considérons les espaces parcourus pendant des temps successifs égaux, ces espaces seront entre eux comme la série des nombres impairs, 1, 3, 5... On vérifie quelquefois la loi sous cette dernière forme, à l'aide de l'appareil ci-contre : la boule A, après avoir parcouru le $\frac{1}{4}$ du plan incliné EF, dégage la boule B en soulevant le système mn ; les deux boules partent donc au même instant, l'une de B sans vitesse initiale, l'autre de D ayant

(1) THUROT, *loc. cit.*

déjà parcouru le chemin ED; elles descendent sur les deux pla
également inclinés BC,EF et viennent frapper au même instant l

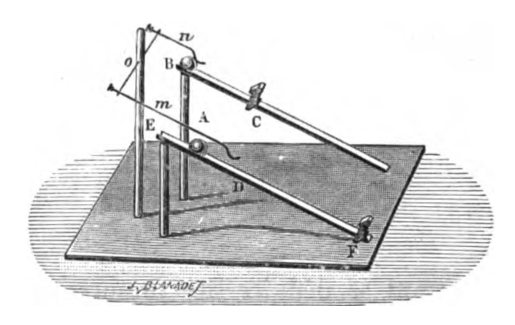


Fig. 100

arrêts C et F placés, le premier en regard du point D et le deuxièm
à une distance DF=3ED.

Donc le *mouvement produit par la pesanteur est un mouvemen uniformément accéléré.*

Loi des vitesses. — Bien que la nature du mouvement soit ain parfaitement établie par la seule loi des espaces, il n'est pas inutil de chercher directement par l'expérience la loi des vitesses : ce ser une nouvelle démonstration de la conclusion à laquelle nous a con duits la mesure des espaces. *Les vitesses sont proportionnelles au temps employés à les acquérir,*

$$v=gt,$$

telle est la loi des vitesses dans un mouvement uniformément accé léré et par conséquent dans le mouvement dû à la pesanteur. Galile n'aborda point cette loi directement, mais il la vérifia dans une d ses conséquences immédiates et curieuses relativement au plan in cliné : il établit que la vitesse acquise par un corps qui tombe n dépend pas de sa hauteur de chute. « On fixe à une muraille un clou A auquel est suspendue à une distance de 2 doigts ($0^m,05$) environ de la muraille, par un fil AB long de 2 à 3 brasses ($1^m,20$ à $1^m,80$), une boule de 1 once ou 2 (30^{gr} à 60^{gr}). On trace sur la muraille la ligne CD coupant à angle droit la perpendiculaire AB; puis on transporte AB en AC et on le laisse en liberté : B parcourra

arc CB et remontera presque jusqu'en D (il y remonterait exac-ment sans l'empêchement causé par l'air et par le fil). Ainsi l'élan e la boule en B est tel qu'il lui fait encore décrire l'arc BD. Main-enant enfonçons dans la muraille, en E ou en F, un clou long de ou 6 doigts. Le fil AB reporté en AC et laissé en liberté rencon-

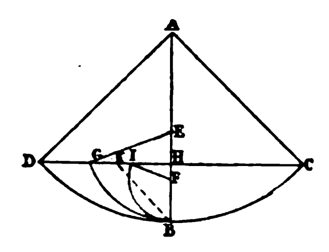


Fig. 101

trera en arrivant en AB le clou E, la boule B décrira l'arc de cercle BG dont le centre est en E et remontera presqu'en G, au niveau DC; si le clou est en F, la boule décrira l'arc de cercle BI dont le centre est en F et atteindra encore sensiblement le même niveau DC au point I. Or, la vitesse acquise en B dans la descente de CB peut faire remonter au mobile l'arc BD = BC; et en général la vitesse acquise en descendant un arc de cercle quelconque est égale à celle qui peut faire remonter au même mobile le même arc. Mais toutes les vitesses qui font remonter les arcs BD, BG, BI, sont égales puisqu'elles proviennent toujours de la descente suivant le même arc CB. Donc toutes les vitesses acquises en descendant les arcs DB, GB, IB, sont égales (1). » Galilée va plus loin et admet que la vitesse en B d'un mobile descendu du même niveau DC, suivant un plan incliné quelconque KB, est encore la même, la même par conséquent que si le mobile était tombé en chute libre de la hauteur HB.

Il est aisé de voir qu'il doit effectivement en être ainsi. En effet, l'accélération g' du mouvement suivant le plan incliné étant

$$g' = g \sin \alpha,$$

(1) Thurot, *loc. cit.*

les formules de ce mouvement sont

$$e = \frac{1}{2} g \sin\alpha . t^2,$$
$$v = g \sin\alpha . t.$$

Pour avoir la relation entre la vitesse et l'espace parcouru, élir
nons t entre ces deux équations ; il vient

$$v^2 = 2ge \sin\alpha.$$

Si le mobile a descendu de A en B,

$$e = AB, \quad e \sin\alpha = h,$$

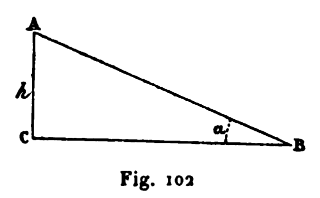


Fig. 102

h étant la hauteur du plan incliné, et l'on a

$$v^2 = 2gh,$$

ou

$$v = \sqrt{2gh},$$

c'est-à-dire que la vitesse au bas du plan incliné est en grandeu
(mais non en direction) indépendante de l'inclinaison du plan sui
l'horizon.

Appareil de cours. — Pour répéter dans un cours les expérien
ces du plan incliné, on se sert avantageusement d'un simple fil d
soie tendu obliquement, le long duquel on fait descendre un petil
équipage très mobile, formé de deux poulies portant un poids dis-
posé de façon que le centre de gravité de tout le système soit au-des-
sous des points d'appui, condition nécessaire à la stabilité de l'équi-
page. La loi des espaces se vérifie sans peine; et en faisant varier

inclinaison du plan, on peut reconnaître que l'accélération varie roportionnellement à $\sin \alpha$. Pour vérifier la loi des vitesses, on

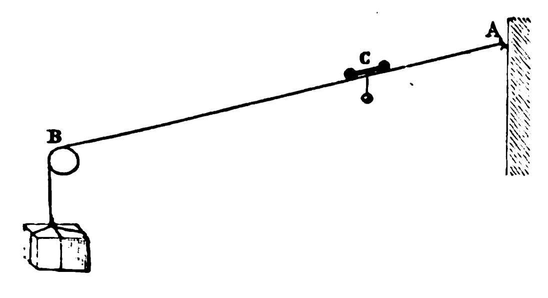


Fig. 103

edresse le fil horizontalement à partir d'un certain point B, de nanière à supprimer l'action de la pesanteur sur le mobile au lelà de ce point. Si alors on laisse tomber le mobile à partir d'un oint *a* tel que l'espace *a*B soit parcouru en 1 seconde, le mobile

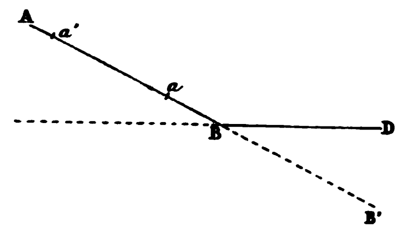


Fig. 104

continuera sa route suivant BD, se mouvant à partir de B d'un mouvement rectiligne uniforme dont la vitesse sera sensiblement proportionnelle à celle qu'il possédait au moment où l'on a supprimé la force [1] : il suffira donc de mesurer l'espace parcouru en 1ˢ suivant BD pour avoir approximativement la vitesse du mobile sur le plan incliné après 1ˢ de chute. Répétant l'expérience à partir d'un point *a'* tel que *a'*B soit parcouru en 2ˢ et mesurant sur BD l'espace parcouru d'un mouvement uniforme en 1ˢ, on aura approximativement la vitesse sur le plan incliné après 2ˢ de chute, et ainsi de

[1] S'il n'y avait pas de choc à la brisure, la vitesse suivant BD serait la projection de la vitesse suivant BB'. Mais, en général, le choc altèrera profondément les résultats.

suite. Ces vitesses approximatives seront *grosso modo* proportionnelles aux temps employés à les acquérir.

Théorèmes relatifs au plan incliné. — Nous avons établi qu'au bas d'un plan incliné la vitesse est

$$v=\sqrt{2gh}$$

h étant la hauteur verticale dont est descendu le mobile. La proposition est générale et reste vraie quelle que soit la trajectoire suivie par le mobile pour aller de A en B : la vitesse en B est toujours $\sqrt{2gh}$, d'après le théorème du travail (47).

Quant au temps employé pour arriver au bas du plan incliné, il dépend essentiellement de l'inclinaison du plan. On reconnaît facilement qu'une série de mobiles partis au même instant d'un même point A sur des plans différemment inclinés issus du point A

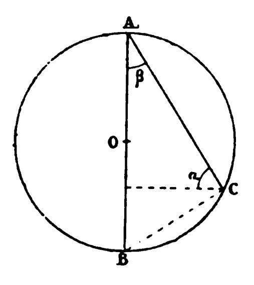


Fig. 105

sont à une même époque sur une sphère ayant pour diamètre le chemin AB parcouru à l'époque considérée par le mobile qui a descendu en chute libre suivant la verticale. L'espace

$$AC=\frac{1}{2}g\sin\alpha.t^2,$$

$$=\frac{1}{2}gt^2.\cos\beta,$$

parcouru sur un plan quelconque AC au temps t, est en effet la projection de

$$AB=\frac{1}{2}gt^2$$

sur la direction AC ; et par conséquent le lieu du point C est la sphère décrite sur AB comme diamètre. La même proposition peut s'énoncer sous cette autre forme : toutes les cordes BE, BF,

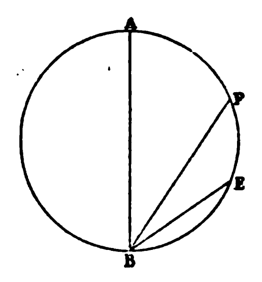


Fig. 106

BA, menées par le point le plus bas d'un cercle, sont parcourues dans le même temps par des mobiles partant sur chacune d'elles de l'autre point où elle coupe la circonférence. C'est ce

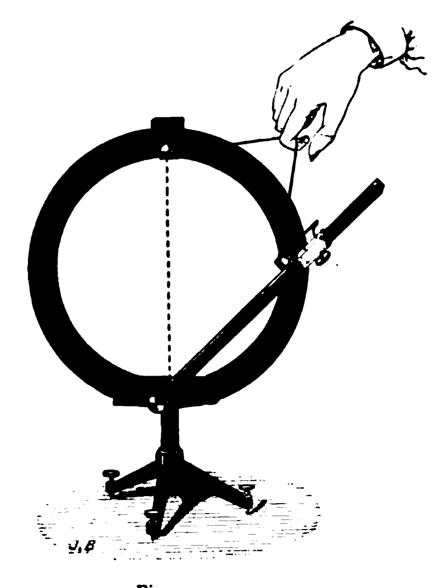


Fig. 107

que l'on peut vérifier à l'aide de l'appareil ci-contre : deux billes placées sur le cercle, l'une au point le plus haut, l'autre en un point quelconque, et lâchées au même moment par une traction brusque sur le cordon qui commande les deux arrêts, arrivent au même

instant en bas, quelle que soit l'inclinaison de la rigole le long de laquelle descend la seconde bille.

80. Machine d'Atwood. — L'appareil le plus commode pour démontrer dans un cours les lois du mouvement d'un corps qui tombe est la machine d'Atwood [1]. Elle se compose essentiellement d'une poulie, très légère et très mobile, sur laquelle passe un fil, parfaitement flexible, inextensible, portant à ses extrémités deux poids égaux, de P grammes chacun. Ce système est en équilibre quelle que soit la hauteur des poids P, le poids du fil étant négligeable. Élevons l'un des poids P jusque près de la poulie, plaçons sur ce poids une surcharge p et abandonnons l'appareil à lui-même: le système tout entier se met en mouvement et ce mouvement est dû uniquement à la force p. Mais cette force p, qui agit ici sur une masse $\frac{2P+p}{g}$ (nous négligeons la masse de la poulie et celle du fil), si elle agissait sur la masse $\frac{p}{g}$ seule, lui communiquerait l'accélération g. Une même force p communiquant à deux masses différentes $\frac{p}{g}$ et $\frac{2P+p}{g}$ des accélérations g et g' inversement proportionnelles aux masses, l'accélération g' du système $2P+p$ sera

p
P
P

Fig. 108

$$g' = g\frac{p}{2P+p}.$$

Le mouvement aura encore lieu suivant les mêmes lois qu'en chute libre, mais il sera retardé dans un rapport connu, au double profit de la facilité des mesures et de l'atténuation de l'erreur due à la résistance de l'air.

Voyons maintenant comment l'appareil réalise ces conditions théoriques. La poulie A, que l'on construit avantageusement aujourd'hui

[1] ATWOOD, professeur à Cambridge, *On the rectilinear motion and rotation of bodies*; 1784.

en aluminium, repose par son axe sur les jantes croisées de quatre roues B,B,B,B ; le frottement de l'axe s'exerce ainsi non plus sur des coussinets fixes, mais sur des pièces mobiles qui se laissent entraîner et bien que de nouveaux frottements se produisent aux points d'appui des nouveaux axes, on conçoit que, sous certaines conditions que nous examinerons plus loin, ce mécanisme puisse diminuer

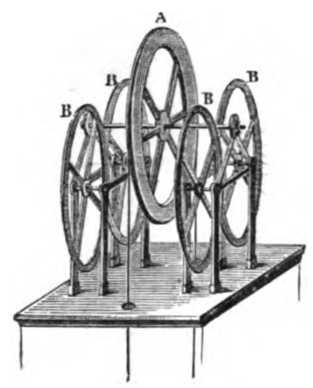


Fig. 109

considérablement la résistance qu'éprouve la poulie. Si, en effet, on donne une légère impulsion à la poulie ainsi suspendue, on voit le mouvement se continuer pendant un temps très long sans ralentissement sensible.

Ce système est placé au sommet d'une colonne en bois montée sur un large pied muni de vis calantes. Un mince cordonnet de soie passant sur la poulie porte à ses extrémités deux poids égaux. En face de l'un des poids est disposée une règle divisée verticale, maintenue par la colonne, et sur laquelle on peut faire glisser des curseurs que l'on fixe au point voulu au moyen d'une vis de pression : parmi ces curseurs les uns sont des plates-formes pleines, destinées à arrêter le mouvement du poids qui descend; d'autres ont une forme annulaire, de façon à laisser passer le poids mais à retenir la surcharge allongée à cet effet. Un pendule compte-secondes est joint à l'appareil.

Pour constater la loi des *espaces*, on place sur le poids faisant face à la règle un léger poids additionnel, on remonte le tout au zéro de la règle et on l'y maintient à l'aide d'une petite plate-forme. Autrefois on tenait cette plate-forme à la main et on la retirait à

un battement du pendule, de manière que la chute commençâ en même temps qu'une seconde. Dans les appareils modernes, l plate-forme est fixée à la colonne et s'abaisse automatiquement a

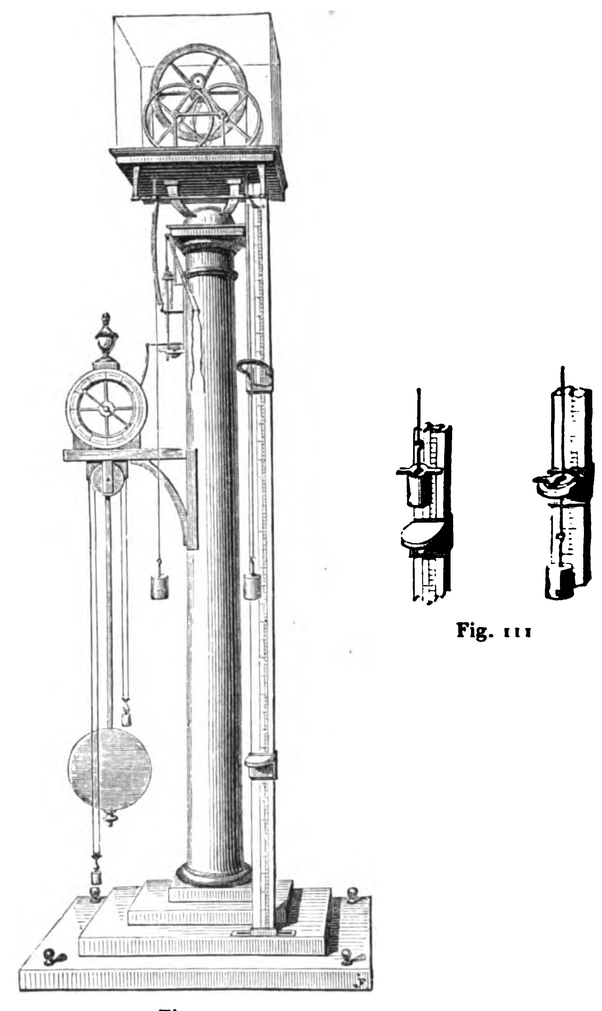


Fig. 111

Fig. 110

premier battement de chaque minute. On peut d'ailleurs, en tirant sur un cordon disposé à cet effet, provoquer le départ du poids au commencement d'une autre seconde si on le préfère. Le poids surchargé descend. Par tâtonnemer's, on cherche à placer un curseur plein, de manière que le choc du poids contre

ce curseur coïncide avec le battement suivant du balancier. Supposons ce résultat obtenu : la distance du curseur à la plate-forme supérieure donne le chemin parcouru par le poids en 1ˢ. On recommence l'expérience en disposant le curseur de façon que le choc du

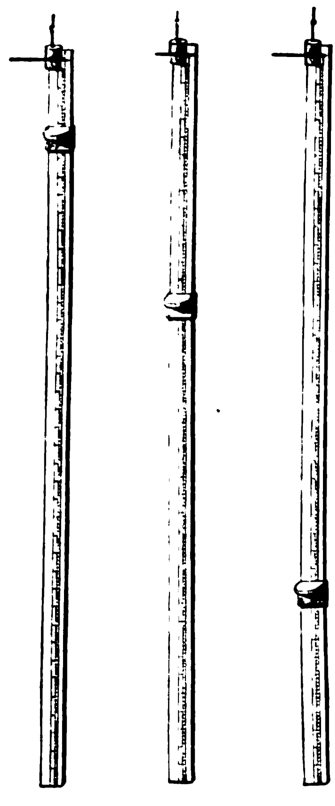


Fig. 112

poids coïncide avec le deuxième battement suivant du pendule : on a l'espace parcouru en 2ˢ; et ainsi de suite. On trouve par exemple pour une certaine combinaison de masses :

Temps.	*Espaces.*	
1ˢ	16 divisions	$= 16.1^2$
2	64	$= 16.2^2$
3	144	$= 16.3^2$
4	256	$= 16.4^2$
⋮	⋮	⋮

donc les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temp employés à les parcourir.

Le même appareil permet de mesurer les *vitesses*. La force es ici le poids p de la masse additionnelle ; si, à un moment donné, o supprime cette force, le système continuera à se mouvoir d'u mouvement uniforme avec une vitesse constante qui sera précisé

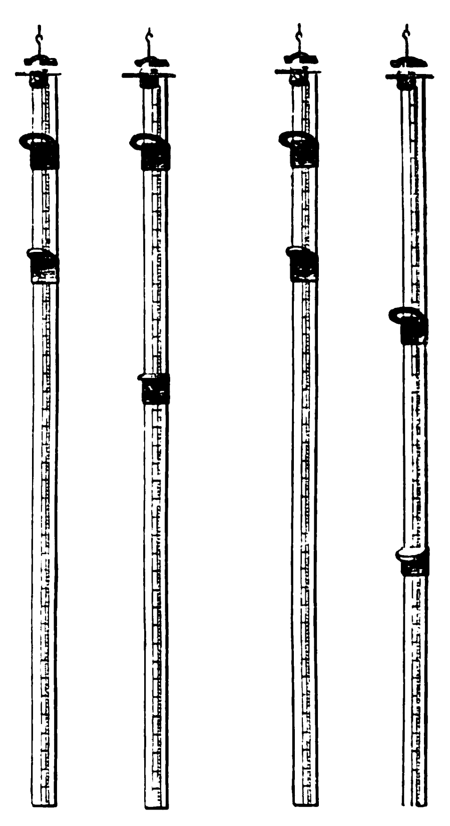


Fig. 113

ment la vitesse qu'il possédait à l'instant où l'on a supprimé la force. Pour faire l'expérience, on place un curseur annulaire à la division que le poids surchargé atteint au bout de 1ˢ; on laisse descendre le poids; après 1ˢ de chute il est débarrassé de la masse additionnelle et continue à descendre; en plaçant sur son chemin un curseur plein à une distance convenable, on mesure l'espace parcouru dans la seconde suivante : on a ainsi la vitesse après 1ˢ de chute. Si,

laissant encore agir la surcharge pendant 1ˢ seulement, on cherche le chemin parcouru pendant 2ˢ après la suppression de la masse additionnelle, on le trouve double du précédent, ce qui vérifie que, la force étant supprimée, le mouvement devient uniforme; l'espace parcouru pendant 1ˢ dans ce mouvement en mesure donc la vitesse, c'est-à-dire la vitesse du mouvement primitif au bout de 1ˢ. On détermine de même la vitesse après 2ˢ de chute, pour cela on place le curseur annulaire à la division qu'atteint le poids avec sa surcharge après 2ˢ de chute, et on mesure l'espace parcouru dans la troisième seconde par le poids allégé de la masse additionnelle; cet espace représente la vitesse après 2ˢ de chute; et ainsi de suite. La seule précaution à prendre est de placer chaque fois le curseur annulaire de façon que la surcharge soit enlevée quand la base du poids atteint la division au niveau de laquelle on veut supprimer la force; c'est en effet la base du poids qui sert à évaluer les espaces parcourus, puisque c'est elle qui part du zéro de la division et dont l'arrivée est constatée par le choc sur le curseur plein. On trouvera ainsi, avec les masses choisies :

Temps.	*Vitesses.*
1ˢ	32 divisions
2	64
3	96
4	128
⋮	⋮

Les vitesses sont donc proportionnelles aux temps nécessaires à les acquérir.

On voit en outre que la vitesse après 1ˢ de chute est le double de l'espace parcouru dans cette première seconde, conformément aux formules

$$e=\frac{1}{2}g't^2,$$

$$v=g't,$$

qui, pour $t=1$, donnent

$$e_1=\frac{1}{2}g',$$

$$v_1=g'.$$

L'unité de temps étant arbitraire, si l'on supprime la force à u instant quelconque, l'espace parcouru d'un mouvement uniforn pendant un temps égal à celui durant lequel s'est produit le mot vement uniformément accéléré est double de l'espace parcour dans ce mouvement accéléré.

On vérifie ainsi très exactement les deux lois de la chute des corp: Cependant il y a dans la machine une petite complication au prin cipe qu'elle réalise, complication due à l'*influence de la masse de l poulie* et qui deviendra sensible si on fait l'expérience suivante Après avoir procédé à une première série de mesures avec la com binaison de poids P et $P+p$ qui réduisait la vitesse de la chut dans le rapport

$$\frac{p}{2P+p},$$

prenons la combinaison $\left(P+\frac{p}{4}\right)$ et $\left(P+\frac{p}{4}\right)+\frac{p}{2}$, la vitesse sera réduite dans le rapport

$$\frac{\frac{p}{2}}{2\left(P+\frac{p}{4}\right)+\frac{p}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2P+p};$$

elle devra donc être exactement moitié de ce qu'elle était précédemment : l'expérience ne vérifie point cette conclusion. C'est qu'en effet la masse à mouvoir ne se compose pas uniquement des poids agissant aux deux extrémités du fil, mais du fil lui-même dont la masse est en général négligeable, et de la poulie dont la masse, au contraire, ne peut pas être négligée.

Si nous supposons cette masse concentrée tout entière sur la circonférence (ce qui le plus souvent est à très peu près conforme à la réalité), la masse de la poulie s'ajoute simplement aux masses des poids, de sorte qu'avec la combinaison P et $P+p$ le mouvement est en réalité ralenti dans le rapport

$$\frac{p}{2P+p+a},$$

a étant une constante pour un appareil donné.

On peut toujours d'ailleurs tenir compte de l'influence de la poulie par une constante a ajoutée aux masses à mouvoir. En effet, appliquons le théorème des moments des quantités de mouvement (58). La dérivée par rapport au temps du moment de la quantité de mouvement des poids relativement à l'axe de la poulie est

$$\frac{2P+p}{g}\frac{dv}{dt}R,$$

R étant le rayon extérieur de la poulie.

La dérivée par rapport au temps du moment de la quantité de mouvement de la poulie relativement au même axe est

$$MK^2\frac{d\omega}{dt}=\frac{MK^2}{R}\frac{dv}{dt},$$

MK^2 étant le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe, et $v=\omega R$ étant la vitesse à la circonférence.

La force agissante p a pour moment pR.

On a donc :

$$\left(\frac{2P+p}{g}R+\frac{MK^2}{R}\right)\frac{dv}{dt}=pR$$

ou, en désignant toujours par $g'=\frac{dv}{dt}$ l'accélération du poids qui descend,

$$g'=g\frac{p}{2P+p+g\frac{MK^2}{R^2}}.$$

L'action de la poulie se traduit donc par une quantité constante $g\frac{MK^2}{R^2}=a$ s'ajoutant aux poids à mouvoir $2P+p$. Si la poulie a une forme telle que l'on puisse supposer toute sa masse condensée sur

sa circonférence, cette quantité a est simplement le poids de la poulie. En tous cas, on pourra aisément déterminer a par l'expérience en mesurant successivement les espaces parcourus pendant des temps égaux avec deux combinaisons différentes. Le rapport de ces espaces, égal au rapport des accélérations, étant ainsi déterminé et égal à q, je suppose, l'équation

$$q = \frac{p}{2P+p+a} : \frac{p'}{2P'+p'+a}$$

donnera a (1).

On connaîtra alors exactement le rapport dans lequel le mouvement observé avec la machine d'Atwood est retardé, abstraction faite des frottements qui sont très faibles dans une machine bien construite; et de la valeur de g' observée on pourra conclure la valeur de g, c'est-à-dire de l'accélération en chute libre. On trouvera ainsi à très peu près $g = 9^m,81$, ou, en unités C.G.S.,

$$g = 981.$$

81. Appareil de Morin. — Les lois de la chute des corps ont encore été contrôlées à l'aide d'un troisième appareil dont l'invention marque une date importante dans l'histoire de la science, comme ayant offert la première réalisation exacte de cette méthode d'enregistrement si fréquemment employée aujourd'hui dans toutes les sciences d'observation. Forcer un phénomène à s'inscrire lui-même, à fournir un *diagramme* ou *graphique* sur lequel l'expérimentateur puisse lire et étudier à son aise toutes les circonstances du phénomène, tel est le but de cette méthode féconde dont la première idée paraît due aux observations météorologiques (2).

On trouve en effet dans les Mémoires de l'Académie des sciences

(1) Dans certains appareils, pour éviter de tenir compte de cette quantité a, les constructeurs ont marqué à faux les poids P: un poids valant en réalité P est marqué $P + \frac{a}{2}$; la masse de la poulie semble alors ne pas intervenir.

(2) Voir Marey, *Du mouvement dans les fonctions de la vie*. Paris, Masson, 1868; 112.

pour l'année 1734, p. 123, la « description d'un anémomètre qui marque de lui-même sur le papier non seulement les vents qu'il a fait pendant les vingt-quatre heures et à quelle heure chacun a commencé et fini, mais aussi leurs différentes vitesses ou forces relatives, par le marquis d'Ons-en-Bray (¹). »

En mécanique, le premier appareil enregistreur fut le fameux indicateur de Watt (²), dans lequel la vapeur marque sa pression sur un cylindre animé d'un mouvement alternatif concordant avec le mouvement du piston de la machine. Peu après, Eytelwein (³) étudiant le mouvement d'une soupape du bélier hydraulique forçait celle-ci à tracer sur une bande de papier mise en mouvement à la main, une courbe dont les ordonnées étaient les espaces parcourus par la soupape et dont les abscisses étaient à peu près proportionnelles aux temps.

La même idée de combiner un mouvement uniforme connu avec le mouvement à déterminer, de manière à obtenir un tracé dont on puisse déduire les circonstances de ce deuxième mouvement, constitue le principe de l'appareil construit sur les indications du général Poncelet par Morin, alors capitaine d'artillerie à Metz (⁴). Imaginons une feuille de papier animée d'un mouvement de translation horizontal uniforme et recevant l'empreinte d'un style fixé à un corps qui tombe en chute libre : ce style tracera une courbe dont les ordonnées seront les hauteurs de chute et dont les abscisses seront proportionnelles aux temps, de sorte que l'on pourra étudier sur cette courbe la nature du mouvement dû à la pesanteur. Au lieu de déplacer la feuille de papier parallèlement à

(¹) L'axe de la girouette, pour ne parler que de ce qui concernait la direction du vent, portait vingt-quatre crayons implantés à des hauteurs différentes dans vingt-quatre azimuths différents : ces crayons avaient tous même longueur, et pour chaque direction de la girouette il y en avait toujours un et un seul appuyant sur une bande de papier, entraînée horizontalement par un mouvement d'horlogerie; au bout des vingt-quatre heures, le papier portait donc une suite de traits parallèles dont la hauteur indiquait la direction du vent et dont la longueur était proportionnelle au temps pendant lequel il avait soufflé.

(²) Watt, brevets de 1782-85.

(³) Eytelwein, *Ueber die Wirkung und vortheilhafteste Anvendung des Stosshebers*. Berlin, 1805.

(⁴) Morin, *Expériences sur le frottement......, exécutées à Metz*, en 1833; dans *Mémoires des savants étrangers*, VI, 641; 1838; ou *Notions fondamentales de mécanique*, 2ᵉ éd.; Paris, 1855.

elle-même, on peut évidemment lui communiquer un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical : chaque verticale du papier viendra de même se présenter devant le style à l'instant voulu.

L'appareil se compose donc d'un grand cylindre vertical devant lequel est placé le corps dont on veut étudier la chute. Ce corps est une masse de fer pesante, de forme cylindro-conique, sur laquelle la résistance de l'air a peu de prise. A sa partie supérieure, il porte un crayon logé dans un petit tube métallique qu'un ressort à boudin repousse constamment vers le cylindre, et, au-dessus de ce crayon, un crochet s'appuyant sur une saillie offerte par un levier coudé qu'il suffira de faire basculer pour lâcher le poids. Quand la saillie soutient le crochet, une petite fourche fixée au levier, saisissant le tube porte-crayon, éloigne du cylindre la pointe qui s'userait inutilement pendant que le poids est en haut au repos. Si l'on tire sur un cordon attaché à l'extrémité de la branche horizontale du levier, le levier bascule, la saillie se dérobe sous le crochet en même temps que la fourche lâche le porte-crayon ; et le poids tombe, le crayon appuyant sur le cylindre. De ce contact résulte un frottement qui, lorsque le cylindre tourne, pourrait dévier le corps de la verticale suivant laquelle l'entraîne la pesanteur; on le guide donc dans sa chute au moyen de deux fils de fer verticaux le long desquels glissent sans frottement sensible quatre oreilles soudées latéralement au corps. Le cylindre a plus de 2 mètres de hauteur et $0^m,125$ de diamètre : il est maintenu par deux pivots implantés suivant son axe, et peut être mis en rotation par un dispositif analogue à celui du tournebroche. Un poids moteur est suspendu à une corde qui s'enroule sur un treuil; ce treuil entraîne dans son mouvement une roue dentée dont les dents inclinées à 45° engrènent d'un côté avec l'axe du cylindre, de l'autre avec une vis sans fin verticale surmontée d'un volant à ailettes. Le poids moteur en tombant tend à produire un mouvement uniformément accéléré; mais les résistances passives, et particulièrement la résistance de l'air sur les ailettes, croissant avec la vitesse, équilibrent bientôt la force motrice : le mouvement devient alors uniforme, ce que l'on reconnaît aisément au bruit que fait entendre une mince lame de baleine *a* heurtée suc-

cessivement par chaque ailette du volant (¹). Comme on a d'ailleurs la facilité de faire varier le poids moteur et d'incliner plus ou moins

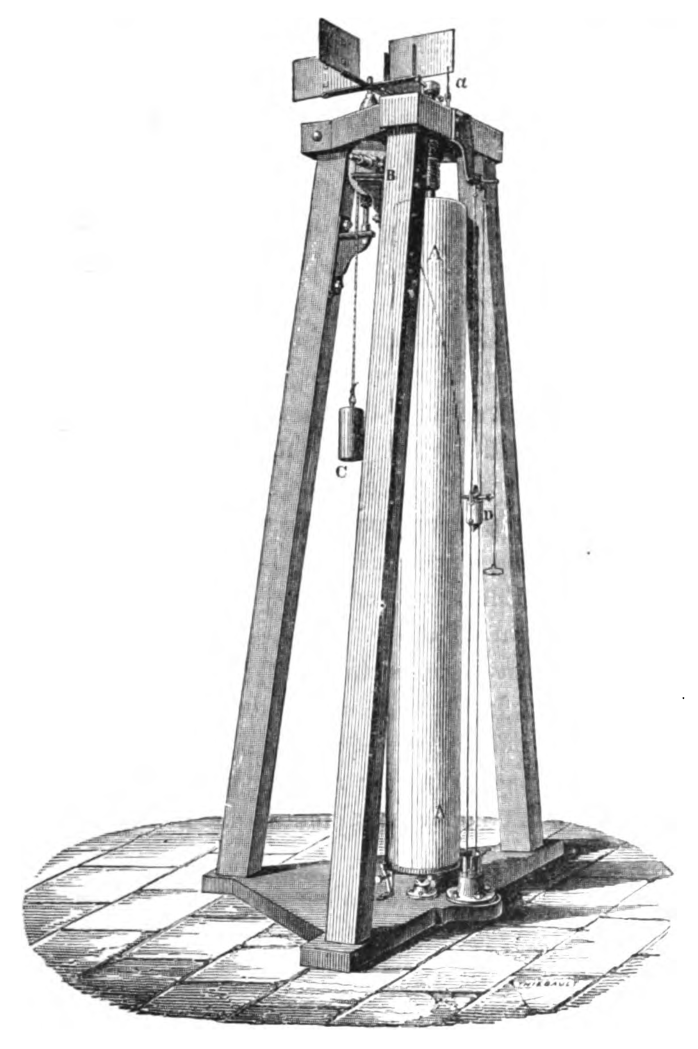


Fig. 114

les ailettes pour accroître ou diminuer la résistance de l'air, on obtient aisément la vitesse convenable d'environ un tour par seconde.

(¹) Le mouvement ne se régularisant que graduellement, le poids moteur aura

Avant chaque expérience, on colle sur le cylindre une feuille de papier blanc ordinaire, sur laquelle on trace une série de génératrices équidistantes : à cet effet, sur le bâtis de l'appareil on dispose une règle en bois parallèlement aux génératrices du cylindre et près de sa surface. Suivant cette règle, on trace une première génératrice; puis on fait tourner à la main le cylindre d'une des dents du cercle fixé à sa partie inférieure : on trace une deuxième génératrice, et l'on continue ainsi; un cliquet s'engage successivement dans chacune des entailles équidistantes du cercle d'arrêt pour fixer le cylindre pendant qu'on trace la génératrice correspondante ([1]).

Le corps dont on veut étudier la chute étant maintenu en haut de l'appareil, on laisse le crayon appuyer sur le papier pendant qu'on tourne le cylindre; on obtient ainsi un cercle sur lequel se trouvera le point de départ de la chute. On retire le crayon en arrière, laissant le corps en place, et on met le cylindre en mouvement à l'aide du poids moteur; quand la rotation est devenue régulière, on tire vivement sur le levier qui retient le corps : le corps tombe verticalement et le crayon trace sur le papier une courbe qu'il s'agit maintenant d'étudier.

Remarquons d'abord que la chute n'ayant duré en tout qu'une fraction de seconde, la vitesse, bien qu'elle n'ait pas été ici réduite comme dans les appareils précédents, a toujours été faible et par conséquent la résistance de l'air n'a pas modifié sensiblement le mouvement. Si donc on fend la feuille de papier suivant une

alors déjà parcouru les $\frac{2}{3}$ ou les $\frac{3}{4}$ de sa course; mais il reste encore plus de temps qu'il n'en faut pour opérer.

([1]) Dans le modèle du Conservatoire des arts et métiers, modèle plus complet dans lequel le cylindre a $3^{m},10$ de hauteur, 1 mètre de circonférence, et fait exactement et uniformément un tour par seconde, le cercle à dents d'arrêt porte 100 dents : on trace donc 100 génératrices équidistantes partageant chaque base en 100 parties égales. Chacune de ces parties correspond à $\frac{1}{100}$ de révolution ou à $\frac{1}{100}$ de seconde, et comme on peut aisément évaluer le 1/10 de ces parties (lequel vaut un millimètre), on voit que l'appareil donne le moyen de mesurer le temps à $\frac{1}{1000}$ de seconde et constitue en réalité un chronomètre très sensible.

génératrice et qu'on l'enlève du cylindre, les distances des divers points de la courbe au cercle d'origine rectifié, représenteront les espaces parcourus verticalement par le corps sous l'action de la pesanteur. Les temps seront mesurés par les longueurs comptées sur le cercle de départ rectifié à partir du point initial. Or, en comparant directement les espaces parcourus aux temps employés

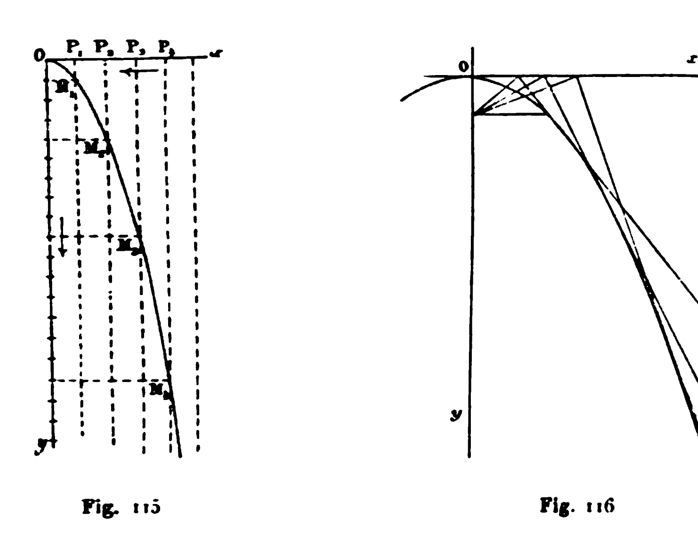


Fig. 115 Fig. 116

à les parcourir, on reconnaît immédiatement que les espaces sont proportionnels aux carrés des temps. Graphiquement cela signifie que la courbe est une parabole. On profitera de ce fait pour fixer exactement l'origine que l'on a prise d'abord à vue, ce qui laisse toujours quelque incertitude. Avec une règle on mènera une série de tangentes à la parabole jusqu'à leur rencontre avec la tangente au sommet (qui n'est autre que le cercle de départ rectifié) ; en ces points de rencontre, on mènera une perpendiculaire à chacune de ces tangentes, toutes ces perpendiculaires se couperont en un même point qui est le foyer de la parabole : la perpendiculaire abaissée de ce point sur la tangente au sommet déterminera exactement ce sommet, c'est-à-dire l'origine de la courbe. La vérification de la loi des espaces se fera alors d'une manière très précise.

La loi des vitesses peut aussi se déduire de la courbe. Soient en effet M et M′ deux points voisins de la courbe marqués par le

crayon aux époques t et $t+\Delta t$; l'espace parcouru par le corps dans sa chute pendant le temps Δt est M'N et ce temps Δt est lui-même mesuré par la longueur PP' : la vitesse moyenne v_1 pendant le temps

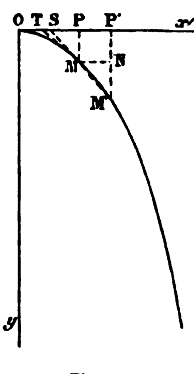


Fig. 117

Δt a donc été $\frac{NM'}{PP'} = \text{tg NMM}' = \text{tg PSM}$. Si Δt tend vers zéro, le point M' se rapproche indéfiniment du point M, la vitesse moyenne v_1 devient la vitesse v du corps au temps t, tandis que la sécante MM' se confond avec la tangente à la courbe au point M. L'égalité

$$v_1 = \text{tg PSM}$$

subsistant toujours devient à la limite

$$v = \text{tg PTM},$$

c'est-à-dire que la vitesse du mobile au moment où il marque le point M est mesurée par la tangente trigonométrique de l'angle que fait la tangente à la courbe au point M avec la tangente au sommet. On vérifiera facilement que cette tangente trigonométrique, mesurée par le rapport $\frac{PM}{PT}$, est proportionnelle au temps OP. De là encore il résulte que la courbe est une parabole ; géométriquement en effet le résultat obtenu signifie que le coefficient angulaire de la

tangente en un point de la courbe relativement à l'axe des x est proportionnel à l'abscisse de ce point ; si donc $\frac{1}{p}$ désigne un coefficient constant, on a :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{p}x,$$

ou

$$2pdy=2xdx;$$

et, en intégrant,

$$x^2=2py,$$

ce qui est bien l'équation d'une parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet.

On vérifie donc ainsi par la mesure des espaces et par celle des vitesses que le mouvement dû à la pesanteur est uniformément accéléré.

L'accélération de ce mouvement est égale à $\frac{1}{p}$. L'appareil de Poncelet et Morin fournit donc une mesure directe de g.

82. Autres appareils. — Depuis l'époque où elle fut pour la première fois employée d'une manière rigoureuse, la méthode d'enregistrement a fait des progrès considérables. La mesure du temps a été rendue beaucoup plus précise par deux procédés distincts. Le premier en date consiste à contrôler la marche toujours un peu incertaine du cylindre par l'inscription, en même temps que du mouvement à étudier, d'un mouvement parfaitement régulier et connu, le mouvement d'un diapason par exemple. Ce procédé, que nous nous bornons à indiquer ici, a été imaginé par Thomas Young; Duhamel l'appliqua à l'étude expérimentale des cordes vibrantes et en montra toute la fécondité : il est aujourd'hui d'un usage continuel en physiologie aussi bien qu'en physique. Le deuxième procédé repose sur l'emploi de régulateurs maintenant le mouvement uniforme malgré les variations des résistances passives : les régulateurs de Foucault et de Villarceau résolvent complètement ce difficile problème.

On a naturellement cherché à utiliser ces perfectionnements dans la construction des appareils destinés à étudier la chute des corps.

C'est ainsi, pour parler seulement de ce qui a trait au premier procédé, que l'on a substitué au poids cylindro-conique de Morin une lame vibrante (Pfaundler) (1), ou un diapason (Lebourg) (2). De même on a fixé à l'axe de la machine d'Atwood un cylindre enregistrant le mouvement d'une lame vibrante (Bourbouze) (3). On obtient alors un tracé sinueux dont chaque boucle représente une même durée, la largeur variable de la boucle mesurant l'espace parcouru. Les figures ci-contre, représentant des graphiques obtenus avec la ma-

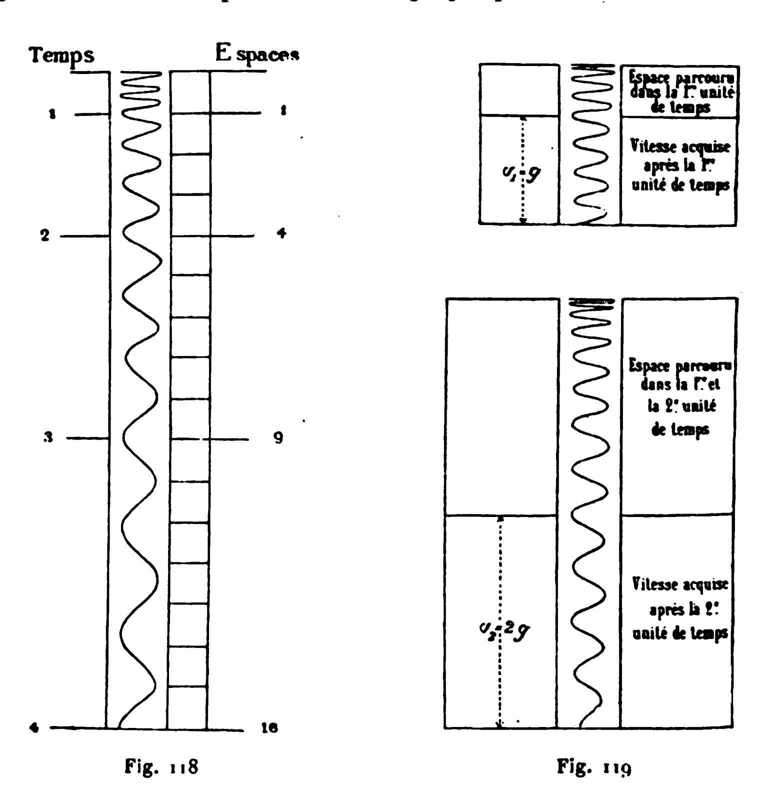


Fig. 118

Fig. 119

chine de Bourbouze, montrent clairement le fonctionnement du système enregistreur. La figure 120 est une vue d'ensemble de l'instrument : A est le cylindre enregistreur, L la lame vibrante. Un petit

(1) Pfaundler, Muller-Pouillet's *Physik*, I, 276.
(2) Lebourg, *Journal de physique*, VII, 44 ; 1877.
(3) Bourbouze, C. R., LIV ; 1862.

électro-aimant E', placé devant la lame, la maintient écartée de la position d'équilibre ; un autre électro-aimant, traversé par le même

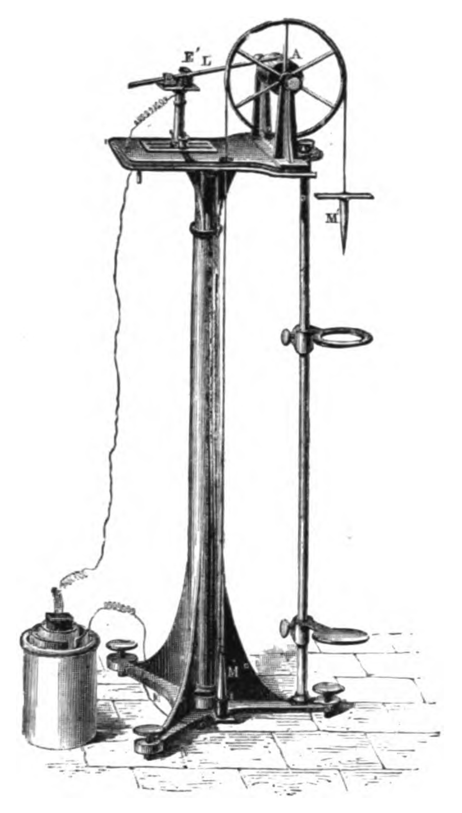


Fig. 120

courant que le premier, retient le poids inférieur M. Vient-on à rompre le courant, le mouvement de rotation du cylindre et le mouvement vibratoire de la lame commencent au même instant.

83. Conclusion : La pesanteur est une force constante. Nous avons ainsi établi pour la pesanteur les deux lois suivantes :

1° La pesanteur agit également sur tous les corps;

2° Le mouvement qu'elle leur communique est un mouvement uniformément accéléré.

La pesanteur est donc une force constante dont l'intensité est définie par l'accélération g du mouvement qu'elle produit : g est la

force même pour une masse égale à 1. Bien que les diverses expériences indiquées précédemment fournissent chacune, théoriquement au moins, un moyen de mesurer g, nous ne prendrons que comme une première approximation la valeur de g qui en résulte, le pendule seul pouvant nous donner la mesure exacte de g.

84. Mouvement des projectiles dans le vide. — Mais avant de passer à la question du pendule, il est naturel de compléter cette étude de la chute des corps par quelques mots sur le mouvement des projectiles dans le vide.

Considérons d'abord le cas d'un projectile lancé suivant la verticale avec une vitesse initiale v_0.

Soit le projectile lancé de haut en bas avec cette vitesse initiale v_0. Imaginons un système de points animés d'un mouvement de translation avec la vitesse v_0 et, dans ce système, le projectile soumis seul à l'action de la pesanteur. D'après le principe des mouvements relatifs, le mouvement du projectile dans ce système est le même que si le système était en repos (41). Superposant les deux mouvements de même direction, nous aurons le mouvement résultant

$$v = v_0 + gt,$$
$$e = v_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

mouvement uniformément accéléré, les vitesses et les espaces étant toujours comptés positivement vers le bas.

Ces formules s'appliquent parfaitement avec la convention ordinaire sur les signes, au cas où le mobile est lancé de bas en haut suivant la verticale. Il est préférable toutefois de mettre en évidence dans les formules le retard apporté à chaque instant par la pesanteur à un mouvement qui sans elle serait uniforme : on comptera donc positivement les espaces et les vitesses dans le sens de la vitesse initiale, c'est-à-dire de bas en haut. Les formules seront alors

$$v = v_0 - gt,$$
$$e = v_0 t - \frac{gt^2}{2}:$$

le mouvement est uniformément retardé.

La vitesse devient nulle

$$o = v_0 - gt$$

à l'époque

$$t = \frac{v_0}{g};$$

le mobile est alors parvenu à la hauteur

$$h = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_0^2}{g^2},$$
$$= \frac{v_0^2}{2g}.$$

De cette hauteur, il redescend en chute libre sans vitesse initiale, et il arrivera au sol, comme nous le savons (79), avec la vitesse $v_1 = \sqrt{2gh}$, c'est-à-dire avec une vitesse v_1 égale et de sens contraire à la vitesse v_0 avec laquelle on l'avait lancé. On peut encore énoncer ce résultat en disant qu'un projectile, lancé de bas en haut suivant la verticale, s'élèvera précisément à la hauteur h dont il devrait tomber pour acquérir la vitesse qu'on lui communique au départ.

Pour revenir au sol, il faudra au mobile un temps t déterminé par l'équation

$$h = \frac{1}{2} g t^2,$$

ou, en mettant pour h la valeur trouvée plus haut,

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{1}{2} g t^2,$$

c'est-à-dire un temps

$$t = \frac{v_0}{g}$$

égal au temps qu'il a employé à monter.

Comme rien évidemment ne distingue le sol d'un autre niveau,

on voit que, d'une manière générale, le mobile a des vitesses égales et de signe contraire aux deux époques où il passe en un même point de la verticale, et que ces deux époques sont également distantes de l'instant où il atteint le point culminant de sa course.

Il est clair que les formules doivent suivre le mobile dans cette deuxième phase de son mouvement, où il se comporte comme un corps tombant en chute libre à partir du point où il est arrivé avec une vitesse nulle. Comptons en effet les temps à partir de l'instant où le mobile a cette vitesse nulle : soit t' le temps ainsi compté,

$$t' = t - \frac{v_0}{g};$$

et les formules deviennent

$$v = v_0 - g\left(t' + \frac{v_0}{g}\right) = -gt',$$

$$e = v_0\left(t' + \frac{v_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(t' + \frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gt'^2}{2} = h - \frac{gt'^2}{2}.$$

Le mobile descend donc en chute libre à partir de la hauteur h : on se souvient que le signe — indique ici des vitesses et des espaces comptés vers le bas. Les formules montrent en outre qu'à deux époques $-t'$ et $+t'$, également distantes de l'instant de vitesse nulle, le mobile est à une même distance du point le plus élevé de sa course et avec des vitesses égales dans les deux cas, mais de signe contraire.

Tous ces résultats sont vrais dans l'air pour les faibles vitesses. On peut les vérifier assez bien au moyen de la machine d'Atwood. Les poids P étant dans une position quelconque, on place vis-à-vis de la partie supérieure de chacun d'eux un curseur annulaire (on a à cet effet un curseur annulaire porté par un bras assez long pour l'amener dans la verticale du poids le plus éloigné de la règle). On met sur chaque curseur une masse additionnelle allongée p. On soulève l'un des poids avec sa masse additionnelle à une hauteur quelconque, l'autre masse additionnelle restant sur son curseur, on abandonne le poids soulevé, et le système $2P + p$ descend, sous l'action de la force p, jusqu'aux curseurs annulaires. A ce mo-

ment la force p est supprimée et l'autre masse additionnelle se place sur son poids ; le système conserve donc une masse $2P+p$ et peut être regardé comme lancé de bas en haut avec une certaine vitesse. On vérifie qu'il s'élève précisément à la hauteur d'où on l'avait laissé

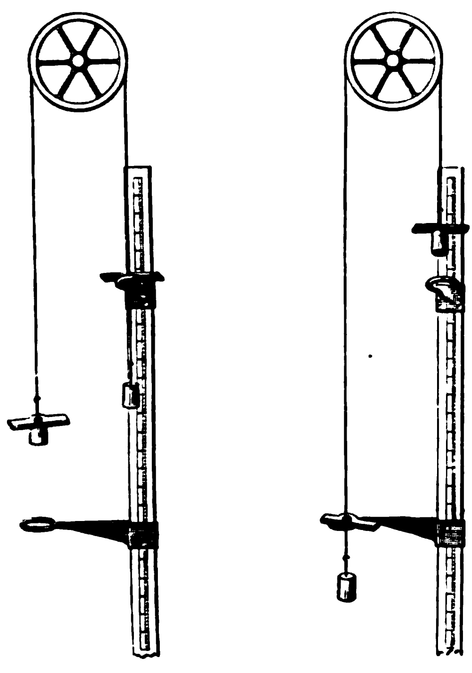


Fig. 121

tomber pour lui communiquer cette vitesse, car le premier poids continue à descendre d'un mouvement retardé jusqu'à une distance de son curseur égale à celle dont on l'avait primitivement soulevé au-dessus de ce curseur. Puis la vitesse devient nulle, le mouvement change de sens ; et ainsi de suite.

La machine de Morin permet une étude très complète des lois du mouvement uniformément retardé. A cet effet, le mobile placé en bas du cylindre est lancé verticalement au moyen d'une arbalète : il s'élève à une certaine hauteur, puis retombe, traçant sur le cylindre une courbe dont la parfaite symétrie par rapport à l'ordonnée du point le plus haut atteste immédiatement la symétrie que nous avons établie entre le mouvement de descente et le mouvement d'ascension du projectile. Il suffit donc de constater cette

symétrie pour en conclure toutes les circonstances du mouvement proposé.

Dans cette dernière expérience, le papier se meut uniformément sous le crayon qui tombe. Nous ne changerons évidemment rien au mouvement relatif du crayon et du papier si nous communiquons à tout le système une vitesse uniforme de translation u_0, égale et de signe contraire à la vitesse actuelle quelconque du papier. Mais alors le pa-

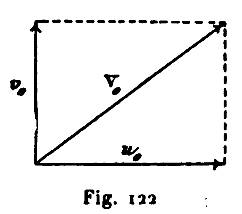


Fig. 122

pier sera en repos, le corps tombera animé de la vitesse horizontale que nous venons de lui communiquer et de la vitesse verticale v_0 qu'il possédait déjà, animé par conséquent d'une vitesse V_0 quelconque, et comme la courbe qu'il tracera sur le papier immobile sera la même, nous en conclurons qu'un corps, lancé sous un angle quelconque, décrit une parabole dans l'espace.

Cette proposition importante peut s'établir directement.

Un mobile est lancé du point O avec la vitesse v_0 dirigée suivant Ox_1; il est soumis à l'action de la pesanteur : trouver son mouve-

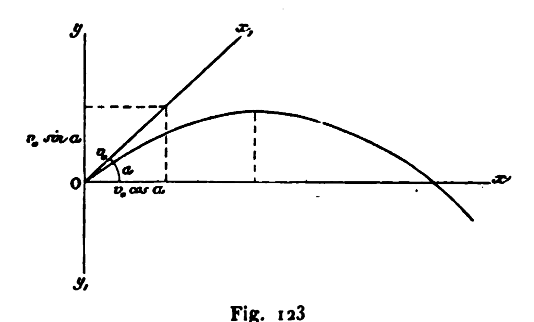


Fig. 123

ment. En raisonnant comme précédemment, on voit immédiatement que le mouvement cherché s'obtiendra en composant un mouvement uniforme de vitesse v_0 dirigé suivant Ox_1 et le mouvement uniformément accéléré que la pesanteur seule communiquerait

u corps suivant Oy_1. Si donc on prend pour axes les directions Ox_1 et Oy_1, les équations du mouvement sont

$$x_1 = v_0 t$$

et

$$y_1 = \frac{gt^2}{2};$$

et l'équation de la trajectoire, que l'on obtiendra en éliminant t entre ces deux équations, est

$$y_1 = \frac{gx_1^2}{2v_0^2},$$

ce qui représente une parabole rapportée à une tangente et au diamètre conjugué : la trajectoire est donc une parabole tangente à la direction de la vitesse initiale et ayant son axe vertical.

Mais, pour discuter les conditions du mouvement, il nous sera plus commode de le rapporter à des axes rectangulaires : prenons donc pour axes l'horizontale Ox menée par l'origine dans le plan x_1Oy_1 et la verticale Oy tracée vers le haut. Soit α l'angle de la vitesse initiale avec l'horizon, cette vitesse initiale v_0 peut être décomposée en deux autres, l'une horizontale $v_0 \cos\alpha$, l'autre verticale $v_0 \sin\alpha$; et le mouvement cherché est la résultante du mouvement uniforme dirigé suivant Ox avec la vitesse $v_0 \cos\alpha$, et du mouvement uniformément retardé dirigé suivant la verticale avec la vitesse initiale $v_0 \sin\alpha$ et l'accélération $-g$ due à la pesanteur. Les équations du mouvement sont donc

$$x = v_0 \cos\alpha . t,$$
$$y = v_0 \sin\alpha . t - \frac{gt^2}{2},$$

entre lesquelles l'élimination de t donne l'équation de la trajectoire

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha}.$$

C'est une parabole dont l'axe est vertical.



Le sommet, dont on déterminerait facilement les coordonnées en transportant les axes de manière à faire disparaître le terme du premier degré, s'obtiendra plus simplement encore si l'on remarque que c'est le point où la vitesse verticale du mobile devient nulle.

Or les composantes de la vitesse v du mobile à un instant quelconque sont, en désignant par θ l'inclinaison de cette vitesse sur Ox.

$$v\cos\theta = v_0\cos\alpha,$$
$$v\sin\theta = v_0\sin\alpha - gt;$$

la vitesse verticale $v\sin\theta$ est donc nulle à l'époque

$$t = \frac{v_0\sin\alpha}{g};$$

en portant cette valeur de t dans les expressions générales de x et de y, on a les coordonnées du sommet

$$\xi = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g},$$
$$\eta = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Le mobile s'élève donc à la hauteur $\eta = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$ et descend ensuite suivant une branche symétrique de celle qu'il a suivie en montant.

La vitesse du mobile est, sauf le signe, la même à la même hauteur, en montant et en descendant. En effet, la composante horizontale de cette vitesse est constante et égale à $v_0\cos\alpha$; la composante verticale $v\sin\theta = v_0\sin\alpha - gt$ peut s'écrire, en éliminant t entre cette expression et celle de y,

$$v\sin\theta = \pm\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha - 2gy}:$$

elle redevient la même, au signe près, quand y repasse par la même



valeur; la vitesse totale du mobile est la somme géométrique de ces deux vitesses :

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 \cos^2\alpha + v_0^2 \sin^2\alpha - 2gy \\ &= v_0^2 - 2gy : \end{aligned}$$

le mobile reprend la même vitesse quand il repasse au même niveau.

Il arrive donc au sol avec la vitesse v_0 dirigée en sens contraire.

Le point où il rencontre le sol a pour abscisse (posons $y = 0$, ou doublons l'abscisse du sommet)

$$a = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Cette longueur a se nomme l'*amplitude* du jet.

On voit que, v_0 étant constant, a est maximum pour $\alpha = 45°$. C'est donc sous l'angle de 45° qu'il faut tirer pour atteindre le plus loin possible; on obtient alors l'amplitude maximum $\frac{v_0^2}{g}$, double de la hauteur qu'atteindrait le projectile lancé verticalement avec la même vitesse v_0. On voit aussi que l'amplitude du jet est la même pour deux valeurs de α également distantes de 45° ; on pourra donc en général atteindre un point du sol par deux paraboles différentes, l'une battante et l'autre écrasante. Ce résultat s'applique évidemment à un point pris à un niveau quelconque.

Soit M (x', y') le point à atteindre; il faut que la parabole passe par ce point: on devra donc tirer sous l'angle α défini par l'équation

$$y' = x' \operatorname{tg}\alpha - \frac{gx'^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha},$$

ou, en remplaçant $\cos^2\alpha$ par $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ et en ordonnant par rapport à $\operatorname{tg}\alpha$,

$$\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{2v_0^2}{gx'} \operatorname{tg}\alpha + \frac{2v_0^2 y'}{gx'^2} + 1 = 0.$$

Pour que le problème soit possible, il faut que cette équation a

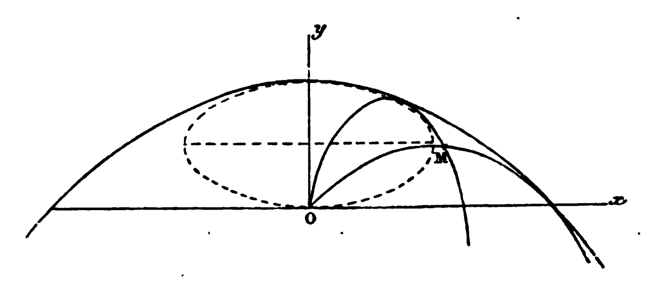


Fig. 124

ses racines réelles, c'est-à-dire que

$$\frac{v_0^4}{g^2 x'^2} - \frac{2v_0^2 y'}{g x'^2} - 1 > 0,$$

ou que

$$y' < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x'^2}{2 v_0^2},$$

ce qui signifie que le point donné doit être à l'intérieur de la parabole

$$y' = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x'^2}{2 v_0^2},$$

dont le sommet est sur l'axe Oy, à une hauteur $\frac{v_0^2}{2g}$ égale à celle qu'atteint le mobile lancé verticalement de bas en haut avec la vitesse v_0 c'est la *parabole de sûreté*, enfermant toutes les paraboles correspondant à cette vitesse initiale.

En dehors de cette courbe, on est à l'abri. Les points situés sur la courbe même ne peuvent être atteints que par une seule trajectoire menée sous l'angle défini par

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{g x'}$$

et tangente à la parabole de sûreté. Pour les points intérieurs, on a deux trajectoires distinctes.

On verrait facilement que le lieu des sommets de toutes ces trajectoires est l'ellipse

$$\frac{gx_1^2}{v_0^2}+\frac{4gy_1^2}{v_0^2}-2y_1=0,$$

ayant pour petit axe $\frac{v_0^2}{2g}$ et pour grand axe une longueur double. Les points situés en dehors de cette ellipse ne peuvent être atteints que par les branches descendantes des trajectoires : le projectile les frappera nécessairement en descendant, quelle que soit celle des deux paraboles qu'il suive, l'angle du choc étant seul différent dans les deux cas. Pour les points situés à l'intérieur de l'ellipse, l'une des trajectoires sera montante, l'autre descendante. Les points situés sur l'ellipse pourront être battus horizontalement ou par une parabole écrasante.

Pratiquement, la résistance de l'air que nous avons négligée ici modifiera beaucoup ces résultats théoriques, si l'on opère avec de grandes vitesses.

II. — PENDULE.

85. Découverte de Galilée : isochronisme des petites oscillations. — « Un jour (vers 1583) que Galilée, alors âgé d'une vingtaine d'années, assistait, peu attentif, il faut le croire, à une cérémonie religieuse dans la cathédrale de Pise, ses regards s'arrêtèrent sur une lampe de bronze, chef-d'œuvre de Benvenuto Cellini, qui, suspendue à une longue corde, oscillait lentement devant l'autel. » Guidé par les battements de son pouls, Galilée reconnut avec étonnement que la lampe, bien que s'arrêtant peu à peu, battait elle aussi toujours la même mesure. La durée de l'oscillation est donc indépendante de l'amplitude. Galilée entrevit aussitôt les conséquences de cette constante uniformité. « La première application à laquelle il songea lui fut inspirée par ses études actuelles de médecine. On tâtait depuis longtemps le pouls aux malades, mais on ne mesurait pas la durée exacte d'une pulsation. Galilée se servit à cet effet du pendule : une disposition facile à imaginer

permettait d'allonger ou de raccourcir le fil de suspension de façon à établir l'accord entre les oscillations du pendule et les battements du pouls; lorsqu'un malade avait la fièvre, au lieu de dire comme aujourd'hui : son pouls bat 140 pulsations par minute, on disait : il marque 6 pouces 3 lignes au *pulsiloque*. »

« La théorie mathématique du mouvement était trop peu avancée pour conduire à la loi précise de l'oscillation. C'est à Huyghens qu'était réservé l'honneur de la découvrir en la rattachant aux principes de Galilée sur la chute des corps. L'illustre Italien se borna à montrer expérimentalement que la durée de l'oscillation croît comme la racine carrée de la longueur de la corde, et il en conclut la possibilité de mesurer la hauteur d'un édifice d'après le temps de l'oscillation d'une corde attachée à la partie supérieure [1]. »

Plus tard, Galilée utilisa le pendule pour établir expérimentalement que les vitesses acquises par un même mobile sur différents plans inclinés sont égales si la hauteur de ces plans est la même (79). Enfin, dans les dernières années de sa vie, il fut encore ramené à cette question par d'autres problèmes, et il s'occupa alors de l'importante application du pendule aux horloges : il décrivit nettement le mécanisme propre à entretenir le mouvement en le transmettant aux aiguilles sans en altérer l'uniformité. Ce fut Huyghens toutefois qui, conduit au même problème par ses études sur les mouvements oscillatoires, construisit la première horloge réglée par un pendule ; il la présenta aux États généraux de Hollande en 1657, et l'usage de ces horloges ou *pendules* se répandit promptement en tous pays.

86. Pendule simple. — On appelle pendule simple un point matériel suspendu à un fil inextensible et sans masse attaché à un point fixe. Le point matériel se place de lui-même en équilibre dans la verticale du point fixe. Si on l'en écarte, son poids MP se décompose en deux forces, l'une ME, dirigée suivant le prolongement du fil et qui a pour unique effet de tendre le fil, l'autre tangentielle MD qui entraîne le point matériel sur l'arc de cercle BA, et tend à le ramener en A.

(1) Bertrand, *Les fondateurs de l'astronomie moderne*. Paris, Hetzel, 1860; article Galilée, *passim*.

Supposons que nous ayons amené le point matériel en B l'angle écart initial AOB étant égal à α, et que nous l'abandonnions à

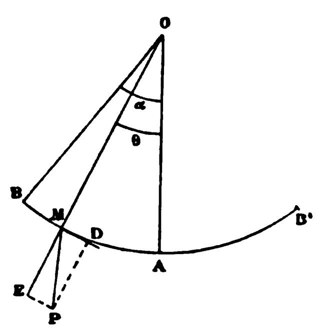


Fig. 125

lui-même, il redescend le long de l'arc BA et si nous le considérons en un point quelconque M de sa course, à une distance BM $= s$ du point B (distance comptée sur l'arc), la composante tangentielle MD du poids mg est $mg \sin\theta$, θ étant l'angle AOM, et l'on a

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \sin\theta.$$

Mais

$$s = l(\alpha - \theta),$$

et par suite

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -l\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

On a donc

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta. \qquad (1)$$

Cas des petites oscillations. — Supposons d'abord θ très petit, on pourra alors confondre le sinus avec l'arc et écrire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta. \qquad (2)$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$\theta = A\cos t\sqrt{\frac{g}{l}} + B\sin t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

A et B étant deux constantes à déterminer par les conditions initiales. Or on a

$$\frac{d\theta}{dt} = -A\sqrt{\frac{g}{l}}\sin t\sqrt{\frac{g}{l}} + B\sqrt{\frac{g}{l}}\cos t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Pour $t = o$, on doit avoir $\theta = \alpha$ et $\frac{d\theta}{dt} = o$, ce qui donne

$$A = \alpha, \qquad B = o.$$

On a donc

$$\theta = \alpha \cos t\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{3}$$

Le mobile part de B, arrive en A à l'époque définie par la relation $o = \alpha \cos t\sqrt{\frac{g}{l}}$, c'est-à-dire $t\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{\pi}{2}$, il arrive donc en A à l'époque $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$. Pendant ce temps la vitesse a été en croissant constamment en valeur absolue; on a en effet

$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

en A la vitesse est $-\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Le mobile remonte ensuite l'arc AB′ et arrive au point B′, symétrique de B, à l'époque $t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; la vitesse a été en décroissant de A en B′ et elle est nulle en B′. Le mobile se trouve donc en B′, exactement dans les mêmes conditions qu'en B; il va donc osciller indéfiniment entre ces deux points. Ces oscillations seront isochrones, chose évidente *a priori* et qu'il ne faut pas confondre avec le phénomène découvert par Galilée.

Nous appellerons *oscillation complète* l'aller de B en B′ et le

retour de B′ en B ; l'aller seul de B en B′ sera une demi-oscillation. La durée d'une demi-oscillation est

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (4)$$

durée indépendante de l'amplitude. Donc *la durée des petites oscillations du pendule est indépendante de leur amplitude :* c'est là ce que l'on appelle l'isochronisme, il serait plus correct de dire le *tautochronisme* des petites oscillations du pendule.

La formule montre en outre que, conformément encore aux mesures de Galilée, la durée de l'oscillation est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule.

Il n'est pas inutile de remarquer que les équations du mouvement du pendule simple exécutant des oscillations infiniment petites, sont identiques à celles que l'on obtiendrait en projetant sur

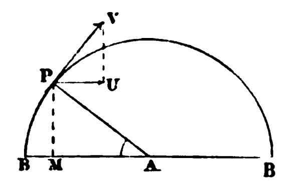


Fig. 126

le diamètre d'un cercle de rayon α le mouvement d'un mobile P décrivant ce cercle avec une vitesse PV constante et égale à $\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}$:

$$\text{AM ou } \theta=\alpha\cos t\sqrt{\frac{g}{l}},$$

$$-\text{PU ou } \frac{d\theta}{dt}=-\alpha\sqrt{\frac{g}{l}}\sin t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Cette remarque a été souvent utilisée pour établir d'une manière simple, mais indirecte, la formule du pendule dans le cas des petites oscillations. On en déduit aussi une représentation du mouvement du pendule sur son arc infiniment petit : c'est le mouvement du

clou d'une roue vue de champ à grande distance et tournant uniformément.

Généralisation de la formule du pendule. — La formule

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

conviendra évidemment dans tous les cas où l'on aura

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta, \qquad (2)$$

c'est-à-dire :

1° Lorsqu'un mobile soumis à l'action d'une force constante en grandeur et en direction exécutera des oscillations infiniment petites de part et d'autre de sa position d'équilibre. Peu importe, en effet, au point de vue analytique, que la force qui agit soit la pesanteur ou toute autre force constante en grandeur et en direction ;

2° Lorsqu'un mobile, écarté d'une quantité quelconque de sa position d'équilibre, tendra à y revenir sous l'action d'une force proportionnelle à la distance. Si en effet on désigne la distance par θ, la force étant représentée par $\frac{g}{l}\theta$, on retombe identiquement sur l'équation (2).

Cas général. — Supposons maintenant θ quelconque :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta. \qquad (1)$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $2d\theta$

$$2d\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2\frac{g}{l}\sin\theta\, d\theta\,;$$

et intégrons

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + \text{const.}$$

La constante se déterminera par les conditions initiales : pour $t = 0$,

on doit avoir $\theta = \alpha$ et $\frac{d\theta}{dt} = 0$; on a donc l'équation de condition

$$0 = \frac{2g}{l}\cos\alpha + \text{const.}$$

Remplaçons la constante par sa valeur :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha),$$

ou

$$\frac{d\theta}{dt} = \mp\sqrt{\frac{2g}{l}}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha};$$

d'où

$$dt = \mp\sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}, \qquad (5)$$

le signe — convenant au mouvement de B en B′, et le signe + au mouvement de B′ en B.

Les variables sont séparées ; mais nous transformerons le second membre par un changement de variable.

Or

$$\cos\theta - \cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right).$$

Par suite

$$dt = \mp\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}}.$$

Posons

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi,$$

et différencions

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi\,d\varphi,$$

ou

$$\frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{d\theta}{\cos\varphi}=\frac{d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}};$$

d'où

$$dt=\mp\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}} \qquad (6)$$

et l'expression du temps se trouve ainsi ramenée à une intégrale elliptique de première espèce.

Le temps employé par le pendule pour aller de B en A sera égal à la valeur de cette intégrale entre les limites correspondant aux valeurs de θ : α et o, et par conséquent aux valeurs de φ : $\frac{\pi}{2}$ et o, ce qui donne, en changeant les limites à cause du signe —,

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}.$$

Développons en série

$$\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi+\cdots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\sin^{2n}\frac{\alpha}{2}\sin^{2n}\varphi.$$

D'ailleurs

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\,d\varphi=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{\pi}{2}.$$

On a donc pour la demi-oscillation :

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2}+\cdots+\left(\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\right)^2\sin^{2n}\frac{\alpha}{2}+\cdots\right.$$

Telle est la formule complète.

Si α est assez petit pour que l'on puisse négliger les termes en $\sin^4\frac{\alpha}{2}$ et confondre $\sin\frac{\alpha}{2}$ avec $\frac{\alpha}{2}$, on aura

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right), \tag{8}$$

formule souvent employée.

Effet de la résistance de l'air supposée proportionnelle à la vitesse. Jusqu'ici nous avons supposé le mouvement s'effectuant dans le vide; considérons maintenant un pendule oscillant à l'air libre, et cherchons l'effet produit par la résistance de l'air.

La loi de cette résistance est complexe et mal connue; mais pour de faibles vitesses la résistance peut être regardée comme proportionnelle à la vitesse. Adoptons donc d'abord avec Poisson cette hypothèse qui conviendra aux oscillations très lentes.

La vitesse, prise positivement dans le sens BA, est

$$v=-l\frac{d\theta}{dt};$$

la résistance de l'air est égale à v multipliée par un facteur constant très petit que nous représenterons par $\frac{g}{k}$; la résistance sera donc

$$-\frac{gl}{k}\frac{d\theta}{dt}.$$

L'accélération est $-l\frac{d^2\theta}{dt^2}$; les forces sont la composante efficace de la pesanteur $g\sin\theta$ et la résistance de l'air qui, agissant en sens contraire, doit être retranchée de $g\sin\theta$; on a donc pour l'équation du mouvement

$$-l\frac{d^2\theta}{dt^2}=g\sin\theta+\frac{gl}{k}\frac{d\theta}{dt}. \tag{9}$$

Bornons-nous au cas des petites oscillations et par conséquent

remplaçons le sinus par l'arc : nous avons, en divisant par

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{k}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\theta=0, \qquad (10)$$

équation différentielle linéaire du deuxième ordre sans second membre, que l'on intègrera par la méthode ordinaire, en résolvant d'abord l'équation

$$r^2+\frac{g}{k}r+\frac{g}{l}=0,$$

qui donne

$$r=-\frac{g}{2k}\pm\sqrt{\frac{g^2}{4k^2}-\frac{g}{l}}$$

$$=-\frac{g}{2k}\pm\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1-\frac{gl}{4k^2}}\sqrt{-1}$$

$$=-\frac{g}{2k}\pm\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{-1},$$

si l'on pose

$$\gamma^2=1-\frac{gl}{4k^2}.$$

L'intégrale cherchée est donc

$$\theta=e^{-\frac{gt}{2k}}\left(A\sin\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t+B\cos\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t\right),$$

avec deux constantes arbitraires A et B.

Différencions

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{g}{2k}e^{-\frac{gt}{2k}}\left(A\sin\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t+B\cos\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

$$+\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}e^{-\frac{gt}{2k}}\left(A\cos\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t-B\sin\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t\right),$$

et nous déterminerons les deux constantes par les conditions ini-

tiales : pour $t=0$, nous devons toujours avoir $\theta=\alpha$ et $\frac{d\theta}{dt}=0$; il en résulte

$$B=\alpha,\quad A=\frac{\alpha\sqrt{gl}}{2k\gamma};$$

et l'on a

$$\theta=\alpha e^{-\frac{gt}{2k}}\left(\cos\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t+\frac{\sqrt{gl}}{2k\gamma}\sin\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) \qquad (11)$$

et

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\frac{g}{l}}e^{-\frac{gt}{2k}}\sin\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t.$$

Ces deux formules résolvent entièrement la question.

$\frac{d\theta}{dt}$ s'annule pour les valeurs de t telles que

$$\gamma\sqrt{\frac{g}{l}}t=n\pi,$$

n étant un nombre entier quelconque ; la vitesse devient donc nulle aux époques

$$t=n\frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{l}{g}};$$

en d'autres termes, le mouvement est isochrone et la durée d'une demi-oscillation est

$$t=\frac{1}{\gamma}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (12)$$

égale à la durée d'une demi-oscillation dans le vide (4) multipliée par $\frac{1}{\gamma}$, un peu plus grande par conséquent que dans le vide, γ étant plus petit que 1. Ainsi, l'isochronisme persiste, la durée de l'oscillation étant simplement un peu augmentée.

Si dans l'expression générale de θ nous donnons à t les valeurs pour lesquelles la vitesse devient nulle, nous aurons les valeurs de θ correspondant aux points extrêmes de la demi-oscillation

$$\theta=\pm\alpha e^{-n\frac{\pi\sqrt{gl}}{2k\gamma}},$$

le signe ± convenant à n pair ou impair. Les valeurs de θ correspondant aux points extrêmes décroissent donc en progression géométrique, quand n et par suite les temps varient en progression arithmétique.

Dans ses expériences, Borda a trouvé que l'amplitude, après 1800 oscillations, était encore égale aux $\frac{2}{3}$ de l'amplitude primitive. Nous aurons donc pour ces expériences de Borda

$$\frac{2}{3}=e^{-\frac{1800\,\pi\sqrt{gl}}{2k\gamma}}.$$

Passons aux logarithmes népériens et élevons au carré,

$$\left(\operatorname{Log}\frac{2}{3}\right)^2=\frac{(1800)^2\pi^2 gl}{4k^2\gamma^2},$$

puis remplaçons $\frac{gl}{4k^2}$ par sa valeur tirée de l'équation qui définit γ

$$\gamma^2=1-\frac{gl}{4k^2},$$

il vient

$$\frac{1}{\gamma^2}=1+\frac{\left(\operatorname{Log}\frac{2}{3}\right)^2}{(1800)^2\pi^2}.$$

Extrayons la racine carrée, en remarquant que $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}$ quand x est très petit, comme cela a lieu ici ; et nous avons

$$\frac{1}{\gamma}=1+\frac{\left(\operatorname{Log}\frac{2}{3}\right)^2}{2(1800)^2\pi^2}$$
$$=1,000\,000\,002\,57.$$

La durée de l'oscillation du pendule de Borda dans l'air était

onc égale à la durée de l'oscillation dans le vide multipliée par

$$1,00000000257.$$

Nous avons vu que les amplitudes des oscillations décroissent n progression géométrique. Par conséquent, le pendule parti de B n'arrive pas en B′ symétrique de B, mais en un point C situé un peu u-dessous de B, le temps total de la demi-oscillation étant à très

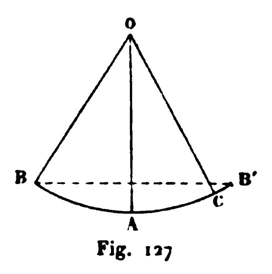


Fig. 127

peu près le même que dans le vide ; mais les deux temps employés à la descente et à la montée ne sont plus égaux. Cherchons en effet les époques t' auxquelles le pendule passe dans la verticale, c'est-à-dire les époques pour lesquelles $\theta = 0$; alors

$$\operatorname{Cot} \gamma \sqrt{\frac{g}{l}}\, t' = -\frac{\sqrt{gl}}{2k\gamma}.$$

Un arc dont la cotangente est < 0 est $> \frac{\pi}{2}$; le premier arc satisfaisant à l'équation sera donc

$$\gamma \sqrt{\frac{g}{l}}\, t' = \frac{\pi}{2} + \delta,$$

δ étant une quantité > 0, définie par la relation $\operatorname{tg} \delta = \frac{\sqrt{gl}}{2k\gamma}$; par suite

$$t' = \frac{1}{\gamma}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{\delta}{\gamma}\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (13)$$

t' étant le temps nécessaire pour aller de B en A : on voit qu'il est plus de la moitié du temps total de la demi-oscillation. Si donc la durée entière est à peine changée, le temps de la descente est augmenté

et le temps de la montée diminué. Il n'y a plus symétrie de pa et d'autre de la verticale. Néanmoins les petites oscillatio conservent leur isochronisme, et presque la même durée qu dans le vide.

Pendule cycloïdal. — La cycloïde est la courbe engendré par un point M d'un cercle C qui roule sans glisser sur un

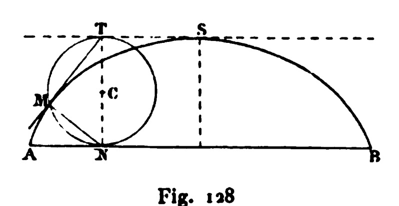


Fig. 128

droite AB. Soit A la position initiale du point M ; lorsque le cercle est venu en C, on a par définition

$$\text{arc de cercle } MN = AN.$$

Il résulte du mode de génération de la courbe que MN est la normale en M : car le premier mouvement élémentaire du cercle, à partir de sa position actuelle C, pourra être considéré comme une rotation autour de son point d'appui N ; par conséquent, MT est la tangente. AB se nomme la base de la cycloïde dont S est le sommet.

Considérons une deuxième cycloïde égale à la première, mais

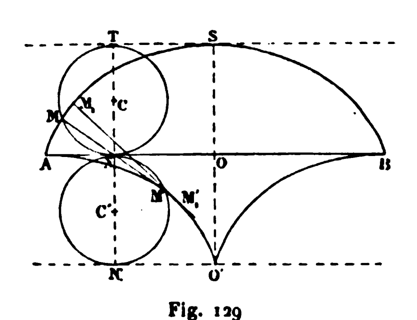


Fig. 129

ayant son sommet en A ; prenons le cercle générateur de cette

deuxième cycloïde dans la position C′ symétrique de C par rapport à AB; soit M′ le point correspondant de la courbe,

$$\text{arc de cercle } M'N' = O'N'.$$

Tirons NM′, nous avons la tangente en M′. Or je dis que NM′ est le prolongement de MN; en effet, puisque

$$\text{arc de cercle } MN = AN,$$

on a

$$\text{arc de cercle } MT = ON;$$

et les angles MNT, N′NM′, ayant même mesure, sont égaux. Ainsi, la normale en M à la cycloïde proposée ASB est tangente en M′ à la deuxième cycloïde AO′B. La normale à la cycloïde ASB en un point M_1 infiniment voisin du point M sera tangente à la cycloïde AO′B en un point M'_1 infiniment voisin du point M′, et le point d'intersection des deux normales infiniment voisines, MM′, $M_1M'_1$, sera lui-même infiniment voisin de M′; M′ est donc le centre de courbure de la première cycloïde : le lieu des centres de courbure de la cycloïde ASB est la cycloïde égale AO′B.

Si nous remarquons de plus que MN = M′N′ comme cordes sous-tendant des arcs de cercle égaux, nous voyons que le rayon de courbure M′M en un point M est 2MN, et nous en déduirons facile-

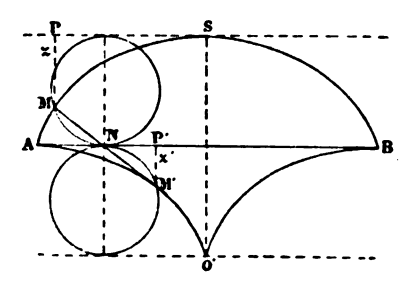


Fig. 130

ment une expression de l'arc de cycloïde SM. Prenons sur la dé-

veloppée l'arc correspondant AM' : soit r le rayon du cercle générateur, et soit $z'=\text{M'P'}$, on a

$$\text{arc AM'} = \text{MM'} = 2\text{M'N} = 2\sqrt{2rz'} = \sqrt{8rz'}$$
$$= \sqrt{2lz'},$$

en posant

$$l = 4r = \text{O'S}.$$

Si donc on désigne par s l'arc de cycloïde SM et par z la distance du point M à la tangente PS au sommet, on a

$$s^2 = 2lz.$$

Ces propriétés de la cycloïde rappelées, cherchons le mouvement d'un point pesant sur la cycloïde.

Supposons un mobile descendant sur l'arc de cycloïde AS dans

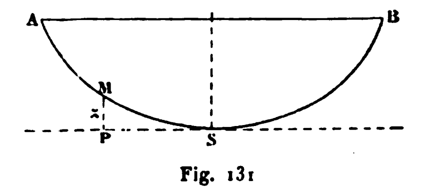


Fig. 131

le vide. Désignant, comme plus haut, l'arc SM par s et la hauteur MP du point M au-dessus de l'horizontale PS par z, on a

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\frac{dz}{ds}$$

ou, puisque, d'après l'équation $s^2 = 2lz$, $\frac{dz}{ds} = \frac{s}{l}$,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l}s, \qquad (14)$$

équation remarquable en ce qu'elle reproduit celle du pendule

imple dans le cas des oscillations infiniment petites. Le temps néessaire pour arriver au point S sera donc

$$\frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}},$$

ndépendant de l'arc s_0. Quel que soit le point de départ sur l'arc AS, le mobile mettra le même temps pour arriver en S : la cycloïde st donc *tautochrone* d'une manière absolue. La propriété que nous vons rencontrée dans le pendule circulaire pour les très petits rcs est toujours vraie ici, comme Huyghens l'a reconnu le premier.

De l'équation précédente il résulte que la cycloïde est tautochrone en montant et en descendant. Un corps placé sans vitesse en M arrive en S dans un temps indépendant de SM. En S, il possède une vitesse quelconque (dépendant uniquement de la hauteur z) et s'élève sur SB pendant un certain temps indépendant de cette vitesse et toujours identique.

La même propriété appartient à toutes les courbes que l'on obtient en repliant la cycloïde sur des cylindres à arêtes verticales. Mais dans le plan vertical, il n'y a pas d'autre tautochrone que la cycloïde. Soit, en effet, une tautochrone sur laquelle le mobile s'élève de S jusqu'à un point quelconque M dans un temps constant $\frac{t}{2}$. Traçons la cycloïde $\left(\text{de paramètre } l=\frac{t^2g}{\pi^2}\right)$ suivant laquelle

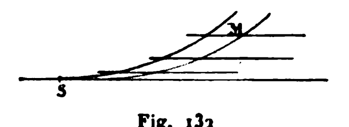


Fig. 132

un mobile mettra précisément ce temps $\frac{t}{2}$ pour s'élever de S en M. Dans un certain intervalle au-dessus de S, l'une des deux courbes sera nécessairement au-dessus de l'autre et les tangentes aux points des deux courbes situés aux mêmes niveaux feront des angles différents avec l'horizon. Or, les deux mobiles arrivant au même niveau

sur les deux courbes avec des vitesses égales, si les éléments à pa courir sont de longueur inégale, les temps employés à les parcou seront nécessairement différents et, dans cette région, la courbe pr posée sera parcourue plus rapidement ou plus lentement que la c cloïde : elle ne sera donc pas tautochrone.

On appliquera facilement à la cycloïde l'étude précédemme faite de l'influence due à la résistance de l'air. Les propositions qu nous avons établies pour le pendule circulaire ne décrivant que d arcs très petits conviennent ici à des arcs quelconques. Le taut chronisme persiste absolu dans l'air.

Pour réaliser un point mobile sur une cycloïde, il suffit, d'aprè ce que nous avons vu plus haut, de le suspendre à un fil de lon gueur $l = 4r$ et de placer à droite et à gauche du point d'appu deux pièces OE, OF taillées en arcs de cycloïdes égales : on

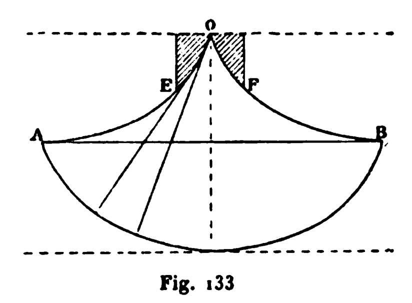


Fig. 133

aura ainsi le *pendule cycloïdal*, imaginé par Huyghens. La durée de la demi-oscillation

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

est alors absolument constante quelle que soit l'amplitude. Mais les difficultés d'exécution (frottements au point d'attache, défaut de flexibilité du fil) ont fait renoncer complètement à ce système.

87. Pendule composé. — On appelle *pendule composé* un corps quelconque pouvant osciller autour d'un axe horizontal qui ne passe pas par son centre de gravité.

Prenons pour axe des z cet axe fixe, pour axe des x la verticale

menée par un point quelconque O de Oz dans le sens de la pesanteur, et pour axe des y l'horizontale Oy perpendiculaire au plan zOx.

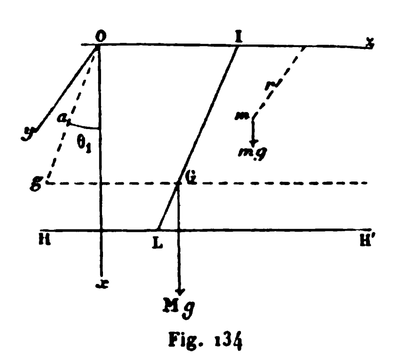


Fig. 134

En appliquant au mouvement autour de Oz le théorème des moments des quantités de mouvement (59), on a

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2 = \Sigma(xY - yX). \qquad (15)$$

L'unique force est la pesanteur sollicitant chaque particule avec une intensité mesurée par le poids de la particule ; pour chaque masse m

$$X = mg,$$
$$Y = 0;$$

et l'équation se réduit à

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2 = -\Sigma mgy.$$

Mai

$$\Sigma mgy = Mgy_1,$$

M étant la masse totale du corps et y_1 l'ordonnée du centre de gravité G ; l'équation peut donc s'écrire

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma mr^2 = -gMy_1. \qquad (16)$$

Soient a la distance G du centre de gravité à l'axe, et θ_1 l'angle que

fait à un instant donné IG ou sa projection Og sur le plan des x avec l'axe des x,

$$y_1 = a \sin \theta_1 ;$$

et, comme pour tout autre point du corps,

$$\omega = \frac{d\theta_1}{dt}.$$

On a donc

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} \Sigma mr^2 = -gMa \sin\theta_1, \tag{17}$$

équation qui détermine le mouvement du centre de gravité. On peut l'écrire sous une forme plus commode, en se rappelant (60) que le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe Oz, Σmr^2, est égal au moment d'inertie MK² par rapport à un axe Gg parallèle à Oz et mené par le centre de gravité, plus Ma^2 :

$$\Sigma mr^2 = M(K^2 + a^2);$$

et il vient

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{ga}{a^2 + K^2} \sin \theta_1,$$

ou

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{g}{a + \frac{K^2}{a}} \sin \theta_1. \tag{18}$$

Mais l'équation du mouvement du pendule simple (équation que l'on retrouverait immédiatement ici en faisant $a = l$ et $K = 0$) est

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta. \tag{1}$$

Le mouvement angulaire du pendule IG est donc identique à celui d'un pendule simple de longueur

$$l = a + \frac{K^2}{a}. \tag{19}$$

Ainsi, il existe toujours un pendule simple IL *synchrone* d'un pendule composé : l étant la longueur de ce pendule simple, la formule

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (4)$$

donne la durée d'une demi-oscillation du pendule composé.

La longueur du pendule simple synchrone $l = a + \frac{K^2}{a}$ est toujours plus grande que a, l'un ou l'autre des deux termes de la somme pouvant d'ailleurs prédominer beaucoup : l peut être à peine différent de a (petite sphère attachée à un long fil) ou au contraire incomparablement plus grand que a, ce qui arrive si a est extrêmement petit par rapport à K^2, de sorte qu'il est possible d'avoir un pendule composé très court battant cependant des oscillations très lentes (*métronome*).

Si par le point L, tel que $IL = a + \frac{K^2}{a}$, on mène la parallèle HH' à l'*axe de suspension* Oz, tous les points du corps situés sur cette parallèle oscilleront dans le même temps que s'ils étaient libres et reliés simplement à Oz par un fil inextensible et sans masse. Les autres points du corps, s'ils étaient isolés, oscilleraient les uns plus vite, les autres moins vite qu'ils n'oscillent en réalité dans le mouvement d'ensemble ; seuls les points situés sur HH' n'ont pas leur mouvement modifié par les liaisons qui les attachent aux autres points : HH' s'appelle l'*axe d'oscillation*.

De l'expression de la distance de ces deux axes

$$l = a + \frac{K^2}{a}$$

résulte une propriété importante découverte par Huyghens [1] : la *réciprocité des deux axes*. Prenons en effet HH' pour axe de suspension, la longueur du pendule simple, synchrone du pendule composé ainsi suspendu, est

$$l' = a' + \frac{K^2}{a'},$$

[1] HUYGHENS, *Horologium oscillatorium* ; Paris, 1673.

a' étant la nouvelle distance LG du centre de gravité à l'axe de suspension HH'; mais

$$a' = \frac{K^2}{a},$$

par suite

$$l' = \frac{K^2}{a} + a = l.$$

Donc le pendule suspendu par HH' a pour axe d'oscillation Oz : la longueur du pendule simple synchrone est restée la même, l'oscillation se fera dans le même temps.

Considérant le plan vertical mené par le centre de gravité perpendiculairement à Oz, on nomme souvent *centre de suspension* le point I de l'axe d'oscillation situé dans ce plan, et *centre d'oscillation* le point L situé dans le même plan à la distance $a + \frac{K^2}{a}$ du point I; la proposition que nous venons d'établir s'énonce alors *réciprocité du centre de suspension et du centre d'oscillation.*

Il est aisé de voir que, réciproquement, si deux axes situés dans un même plan contenant le centre de gravité sont tels que le corps suspendu successivement à chacun d'eux exécute dans les deux cas des oscillations de même durée, ils sont ou à des distances égales du centre de gravité ou à des distances de ce point telles que le produit en soit égal à K^2.

Si en effet

$$a + \frac{K^2}{a} = a' + \frac{K^2}{a'},$$

on a

$$a - a' = \frac{K^2(a - a')}{aa'};$$

et si $a - a'$ est $\gtrless 0$, on peut diviser par $a - a'$ les deux membres de cette égalité, ce qui donne

$$aa' = K^2:$$

la distance des deux axes est la longueur même du pendule simple

synchrone du pendule composé, d'où un moyen pratique de mesurer cette distance.

88. Application du pendule à la mesure des forces. L'équation

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2}\Sigma mr^2 = -gMa\sin\theta_1 \qquad (17)$$

peut s'écrire

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = -\frac{Fa}{Q}\sin\theta_1, \qquad (20)$$

si l'on pose $\Sigma mr^2 = Q$ et $Mg = F$, de sorte que Fa est le moment de la force agissante par rapport à l'axe de rotation, Q étant le moment d'inertie du corps relativement au même axe.

En comparant cette équation à celle du pendule simple

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta, \qquad (1)$$

on voit que le pendule composé oscille comme un pendule simple de longueur

$$l = \frac{Qg}{Fa}; \qquad (21)$$

la durée d'une demi-oscillation infiniment petite est donc

$$t = \pi\sqrt{\frac{Q}{Fa}}, \qquad (22)$$

formule immédiatement applicable à un corps qui exécute des oscillations infiniment petites sous l'action d'une force remplissant l'une des deux conditions indiquées plus haut (86).

De là un double moyen de mesurer une force :

1° La faire agir directement sur un pendule en plaçant le centre d'action assez loin pour que la force puisse être regardée comme constante en grandeur et en direction;

2° Équilibrer l'action de la force sur un pendule par celle d'une autre force $F\theta$ variant proportionnellement à l'écart θ et par consé-

quent directement mesurable à l'aide du pendule suivant la foı mule (22).

Ces deux méthodes sont l'une et l'autre d'un usage continuel e physique.

89. Démonstration de la première loi de la chute de corps. — Le pendule, oscillant sous l'action de la pesanteuı permet de donner une démonstration rigoureuse de la premièı loi de la chute des corps, à savoir que la pesanteur agit sur tou également. Il suffit de constater que la durée de l'oscillation es absolument indépendante de la nature du corps constituant le pen dule, ainsi que l'indique la formule (4). On assure même que ce fu l'observation de l'égalité de durée des oscillations de deux pendule également longs, mais différemment pesants, qui conduisit Ga lilée à la découverte de cette loi fondamentale de la pesanteur Newton expérimenta sur des corps très divers qu'il plaçait successivement dans une même boîte soutenue par un fil. Bessel fit des mesures précises : opérant avec un pendule de Borda, dont la boule était tour à tour constituée par les corps les plus différents (métaux, ivoire, pierres, etc.) et prenant toutes les précautions mentionnées plus loin, il trouva que les durées de l'oscillation différaient à peine de 0,00001 d'un corps à l'autre.

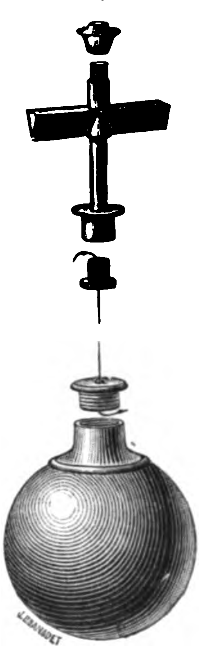
90. Mesure de g. — Ainsi que nous l'avons dit plus haut (83), et comme Huyghens [1] l'indiqua le premier, le pendule sert à obtenir la mesure exacte de g. Si, en effet, on se reporte à la formule (4), on voit que pour avoir la valeur de g, il suffira de mesurer : 1° la durée d'une oscillation ; 2° la longueur du pendule. L'amplitude des oscillations n'étant pas très petite, on devra en outre la déterminer afin d'en tenir compte dans le calcul.

91. Expériences de Borda. — Les premières mesures exactes de g au moyen du pendule sont dues à Borda [2]. Le pendule de Borda se compose essentiellement d'une sphère pesante en pla-

[1] Huyghens, *Horologium oscillatorium.*

[2] Borda, *Mémoire sur la mesure du pendule*, 1792, dans *Mesure de la méridienne.*

tine, suspendue à un fil métallique très fin. L'extrémité supérieure du fil est fixée à un couteau dont l'arête reposant sur un plan d'acier constitue l'axe de suspension du pendule. Le couteau, également en acier, est surmonté d'une vis sur laquelle peut tourner un écrou mobile, et porte en bas un prolongement dans lequel s'engage une petite vis traversée suivant son axe par le fil que retient un nœud. Une vis semblable attache l'extrémité inférieure du fil à une calotte métallique très mince s'adaptant exactement sur la sphère de platine; le seul contact des deux surfaces préalablement recouvertes d'une couche imperceptible de graisse maintient l'adhérence : la boule se trouve ainsi suspendue au fil.


Fig. 135

1° *Mesure de la durée d'une oscillation.* — Pour déterminer la durée d'une oscillation, le procédé qui s'offre immédiatement à l'esprit serait de compter le nombre des *passages* du pendule à une direction donnée (à la verticale par exemple) pendant un temps assez long, exactement mesuré par un chronomètre : le quotient de ce temps par le nombre des passages représenterait la durée d'une oscillation avec d'autant plus de rigueur que l'on aurait prolongé davantage l'expérience afin d'atténuer l'effet des incertitudes inévitables sur les instants précis où elle commence et où elle prend fin. Mais compter ainsi un grand nombre d'oscillations une à une serait chose fastidieuse et sujette à erreur. On évite ces inconvénients en recourant à la *méthode des coïncidences*, imaginée par de Mairan.

On dispose derrière le pendule une horloge dont le balancier batte à très peu près son oscillation dans le même temps que le pendule. A ce balancier on fixe un petit cercle de papier blanc sur lequel est tracé un trait noir vertical; et on s'arrange de manière que, le balancier et le pendule étant tous les deux au repos, ce trait soit exactement caché par le fil du pendule pour un observateur visant à distance avec une lunette immobile. Le pendule et

l'horloge sont enfermés dans une cage vitrée qui les protège contr les agitations de l'air extérieur et les changements brusques d température ([1]). On met le pendule et l'horloge en mouvement l'u

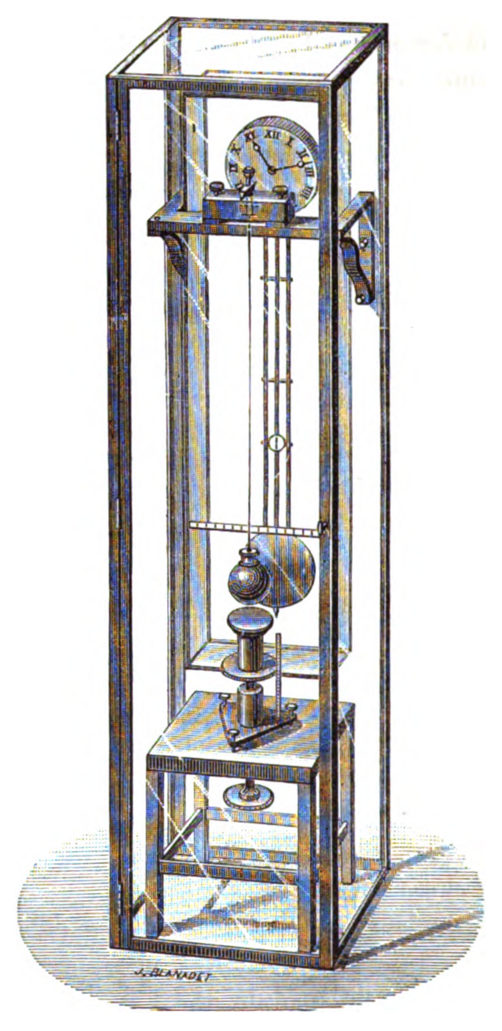


Fig. 136

et l'autre. Si, comme nous l'avons dit, les durées de leurs oscillations respectives sont très peu différentes, il arrivera un moment où les

([1]) Dans la figure 136 on a enveloppé l'horloge elle-même d'une deuxième cage de verre, comme le fit plus tard Biot (92).

deux pendules, en marchant dans le même sens, passeront ensemble à la verticale, ce qui constituera une *coïncidence*. Supposons, en effet, que, l'un des pendules A passant à la verticale, l'autre B soit en b et admettons que ce deuxième pendule aille plus vite. Lorsqu'ayant effectué une oscillation complète, A reviendra du même côté passer à la verticale, B aura accompli un peu

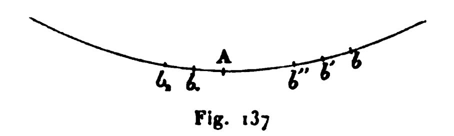


Fig. 137

plus d'une oscillation et sera en b'. Après une nouvelle oscillation complète de A, il sera en b'', etc., les arcs bb', $b'b''$..... étant par hypothèse extrêmement petits. A un certain instant il arrivera donc sur la verticale en même temps que le pendule A : il y aura coïncidence. Quand une nouvelle oscillation complète ramènera A dans la verticale, B sera en avance d'une petite quantité en b_1; à l'oscillation suivante, il sera en b_2,..... et l'avance de B sur A s'accusera de plus en plus. Au bout d'un certain temps elle atteindra une demi-oscillation : les deux pendules passeront alors ensemble à la verticale, mais en venant de côtés opposés; ce croisement est impossible à observer exactement. B continuera à prendre de l'avance sur A et, quand il aura gagné une oscillation complète, il repassera à la verticale en même temps que A et en marchant dans le même sens : on aura une nouvelle coïncidence. Si donc A est le balancier de l'horloge et B le pendule de Borda, comme l'horloge compte elle-même ses battements, il suffira d'augmenter de 1 le nombre des oscillations complètes du balancier pour avoir le nombre des oscillations du pendule. Ainsi, dans l'hypothèse de deux pendules ayant à très peu près même durée d'oscillation, on observera une série de coïncidences, indiquant chacune que l'avance du pendule le plus rapide s'est accrue d'une oscillation complète. Si les durées d'oscillation n'étaient pas infiniment peu différentes, il n'y aurait pas nécessairement coïncidence une première fois; et, en supposant cette première coïncidence qui entraînerait une série illimitée de coïncidences ultérieures, la différence entre les nombres

d'oscillations exécutées par les deux pendules dans l'intervalle de deux coïncidences consécutives serait p, p n'étant égal à 1 qu'en certains cas particuliers (¹). Mais dans les conditions pratiques de l'expérience de Borda, chaque fois que la différence des nombres d'oscillations des deux pendules s'accroît d'une unité, l'observateur éprouve au contraire l'effet de plusieurs coïncidences successives, parmi lesquelles il choisira évidemment la moyenne comme représentant avec le plus de probabilité la coïncidence réelle. On répète l'observation un grand nombre de fois, on prend la moyenne des résultats, et l'on a ainsi avec beaucoup d'exactitude le nombre n de secondes que bat l'horloge, tandis que le pendule exécute $n+1$ oscillations; la durée d'une oscillation est dès lors connue :

$$t=\frac{n}{n+1}\ (^2).$$

2° *Mesure de la longueur du pendule.* — Avant d'exposer comment on mesure la longueur du pendule, nous devons indiquer le procédé ingénieux par lequel Borda réussit à éliminer l'action du couteau. Au moyen de l'écrou supérieur, on règle le couteau de manière qu'il mette exactement le même temps à osciller seul que réuni au fil du pendule. Dans ces conditions, en effet, le couteau n'a aucune influence sur le mouvement du pendule : il est comme s'il n'existait pas. Borda vérifia le fait en répétant successivement la mesure de n avec deux couteaux de poids très différents, mais réglés de telle sorte que leurs oscillations isolées étaient de même durée que celles du pendule total ; et il trouva des nombres identiques dans les deux cas. On n'a donc à considérer que le système formé par le fil, la calotte et la sphère ; la question se réduit ainsi à mesurer pour ce système la distance a du centre de gravité au centre de suspension et le moment d'inertie MK^2 par rapport à un axe passant par le centre de gravité et parallèle à l'axe de suspension.

(¹) Bichat, *Journal de physique*, III, 369 ; 1875.

(²) Si le pendule allait moins vite que l'horloge, la durée d'une oscillation serait $t=\frac{n}{n-1}$, n désignant toujours le nombre de secondes battues par l'horloge entre deux coïncidences consécutives.

Pour avoir la distance a, on dispose sous la boule du pendule un petit plan d'acier bien horizontal que l'on peut élever ou abaisser au moyen d'une vis micrométrique de façon à ce qu'il vienne toucher la boule sans la soulever. On hausse lentement le plan jusqu'à ce que la lumière d'une bougie placée derrière le pendule et à distance disparaisse au point de contact : faisant alors osciller le pendule, on ne doit entendre qu'un léger frôlement contre le plan si la position cherchée n'a pas été dépassée. Cela fait, comme la présence de l'observateur a nécessairement modifié la température, on referme la cage de l'appareil et on s'en éloigne douze ou quinze minutes afin de lui laisser reprendre sa température normale. Revenant alors vérifier la position du plan, on trouve presque toujours que le contact n'a plus lieu ; on le rétablit, ce qui prend peu de temps. Une nouvelle vérification demande moins de temps encore ; et, après quelques essais, on obtient un contact permanent. On note alors la température. Si elle diffère de la température moyenne qu'avait eue la cage pendant les observations des coïncidences, une correction facile donnera la longueur exacte du système sur lequel ont réellement porté les mesures. On enlève le pendule ; on lui substitue une règle divisée suspendue de même par un couteau et munie à sa partie inférieure d'une languette mobile faisant vernier. La languette étant amenée au contact du petit plan d'acier, on lit au vernier la distance de ce plan au plan de suspension : c'est la longueur du fil augmentée du diamètre de la sphère. On pose alors la sphère sur le plan d'acier et, par des tâtonnements faciles, on amène la languette en contact avec l'extrémité supérieure du diamètre vertical. La lecture que l'on fait alors, retranchée de la première, donne le diamètre de la sphère. On en conclut la longueur λ du fil ; en y ajoutant le rayon r de la sphère, on a la distance a.



Fig. 138

Le moment d'inertie MK^2 du système se compose : 1° du moment d'inertie de la sphère (60), $\frac{2}{5}mr^2$, m étant la masse de la

sphère ; 2° du moment d'inertie du fil, qu'il serait facile de calculer ; 3° du moment d'inertie de la calotte dont l'évaluation présente au contraire assez de difficulté et peu de certitude. On n'a pas, en effet, comme pour la sphère ou le fil, de moyen de vérifier l'homogénéité sans laquelle les calculs sont illusoires. Pour le fil, il suffit de le couper en deux et de peser séparément chacune des moitiés : les deux poids doivent être égaux. Pour la sphère, on annule les défauts d'homogénéité en changeant le point de suspension, ce que permet facilement le mode d'attache. Il faut toujours avoir cette précaution au cours de chaque série d'expériences que l'on partagera, par exemple, en deux groupes, la boule étant dans le deuxième groupe suspendue par le point diamétralement opposé au point d'attache adopté dans le premier.

Si l'on ne considérait que la sphère, le moment d'inertie du pendule serait

$$MK^2 = \frac{2}{5} m r^2$$

et l'on aurait pour la longueur l du pendule

$$l = a + \frac{K^2}{a} = (\lambda + r) + \frac{\frac{2}{5} r^2}{\lambda + r}.$$

Mais, en tenant compte du fil et de la calotte, on doit apporter à cette valeur approximative une légère correction $-$ Q que nous supposerons calculée ([1]), de sorte que la longueur exacte du pendule simple synchrone du pendule composé est

$$l = \lambda + r + \frac{\frac{2}{5} r^2}{\lambda + r} - Q.$$

3° *Mesure et influence de l'amplitude des oscillations.* — Il faut enfin avoir égard à l'amplitude des oscillations, puisque celles-ci

([1]) Voir Biot, *Astronomie physique*, III ; Additions, 176 ; 1811.

ne sont pas infiniment petites. Les arcs décrits étant néanmoins peu considérables, la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right) \qquad (8)$$

suffira à représenter très exactement leur durée, à condition toutefois que l'on détermine α. A cette fin, on place derrière le pendule une échelle horizontale divisée en parties égales et on en mesure la distance au centre de suspension. En observant sur cette échelle les positions extrêmes du pendule, on calculera aisément la valeur correspondante de l'angle α.

Si la durée totale de l'expérience est courte, on mesurera α au commencement et à la fin des observations et on effectuera la correction avec l'arc moyen $\frac{\alpha + \alpha'}{2}$.

Mais si l'expérience se prolonge, la correction ne peut plus se faire aussi simplement. On partira alors de ce fait établi par Borda que l'amplitude des arcs décrits diminue en progression géométrique quand le temps croît en progression arithmétique ; et on calculera ainsi la correction d'amplitude d'après Biot : Soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$$

les amplitudes, et

$$t_1, t_2 \cdots t_n$$

les durées des oscillations successives du pendule, on a

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha_1^2}{16} \right),$$

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha_2^2}{16} \right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha_n^2}{16} \right).$$

Ajoutons toutes ces équations : T étant la durée totale de l'expé-

rience et n le nombre total des demi-oscillations du pendule (nombre donné par la méthode des coïncidences), il vient

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(n+\frac{\alpha_1^2}{16}+\frac{\alpha_2^2}{16}+\cdots\frac{\alpha_n^2}{16}\right).$$

Mais, d'après la loi de Borda,

$$\alpha_2=k\alpha_1,$$
$$\alpha_3=k^2\alpha_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_n=k^{n-1}\alpha_1.$$

On a donc, en désignant par Σ la somme des termes de correction,

$$\Sigma=\frac{1}{16}(\alpha_1^2+k^2\alpha_1^2+\cdots+k^{2(n-1)}\alpha_1^2)$$
$$=\frac{1}{16}\alpha_1^2\frac{k^{2n}-1}{k^2-1};$$

mais

$$k=\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

ou, très approximativement, puisque n est très grand,

$$k=\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^{\frac{1}{n}};$$

et par conséquent

$$\Sigma=\frac{1}{16}\alpha_1^2\frac{\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^2-1}{\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^{\frac{2}{n}}-1}=\frac{1}{16}\frac{\alpha_n^2-\alpha_1^2}{\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)^{\frac{2}{n}}-1},$$

ou, en développant le dénominateur d'après la formule connue du développement de a^x et en se bornant au terme du premier degré,

$$\Sigma=\frac{1}{16}\frac{\alpha_n^2-\alpha_1^2}{\left[1+\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{M}\cdot\log\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right]-1},$$

étant l'inverse du module des logarithmes vulgaires, ou 2,302 585.

Ainsi, l'on a

$$\Sigma = \frac{n}{32} \frac{(\alpha_n + \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_1)}{\frac{1}{M} \log \frac{\alpha_n}{\alpha_1}},$$

par suite

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}\, n \left(1 + \frac{1}{32} \frac{(\alpha_n + \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_1)}{\frac{1}{M} \log \frac{\alpha_n}{\alpha_1}}\right),$$

u, t désignant comme d'habitude la durée d'une demi-oscillaon,

$$t = \frac{T}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{32} \frac{(\alpha_n + \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_1)}{\frac{1}{M} \log \frac{\alpha_n}{\alpha_1}}\right),$$

ormule posée par Borda sans démonstration, et qui permettra de alculer g.

Résultats. — Les mesures faites par Borda à l'Observatoire de Paris, conjointement avec Cassini, et réduites au vide par la correction incomplète de Bouguer, donnent

$$g = 9^{m},808\,82.$$

Souvent on définit l'intensité de la pesanteur en un lieu par la longueur du pendule qui bat la seconde en ce lieu. Cette longueur

$$L = \frac{g}{\pi^2}$$

étant en effet proportionnelle à l'accélération g peut par conséquent servir à la mesurer.

D'après Borda, la longueur du pendule à Paris, dans l'air, est

$$L = 993^{mm},827.$$

92. Expériences de Biot. — Biot [1] reprit ces expériences,

[1] Biot, *loc. cit.*

et avec Arago, Mathieu et Bouvard, il mesura g en divers points de l'arc de la méridienne de Formentera à Dunkerque. A Paris, dans l'air, la longueur du pendule battant la seconde fut trouvée

$$L = 993^{mm},845.$$

Outre plusieurs perfectionnements de détail (emploi de plans d'appui en agate, substitution d'un fil non magnétique au fil de fer du pendule, séparation de la cage isolante en deux compartiments de manière que le pendule à observer et le balancier de l'horloge ne s'influencent pas réciproquement par l'intermédiaire de l'air de la cage), Biot, tout en conservant la méthode de Borda, en reprenant même la boule de platine dont celui-ci avait fait usage, s'est principalement attaché à mesurer exactement la longueur du pendule. A cet effet, il remplaça la mesure au moyen du vernier par une mesure au comparateur : le contact de la languette avec le petit plan d'acier une fois établi et vérifié, on serrait une vis d'arrêt immobilisant la languette, puis on portait le tout sur le comparateur, et on relevait la distance entre le couteau supérieur de la règle [1] et l'extrémité inférieure de la languette. Biot put ainsi réduire à environ 75 centimètres la longueur du pendule auquel Borda n'avait pas donné moins de 4 mètres : cette réduction était nécessaire pour rendre l'instrument portatif.

93. Pendule réversible de Kater. — Comme appareil de voyage, le pendule réversible du capitaine Kater [2] est beaucoup plus commode. Sa construction repose sur la réciprocité des centres

[1] Si Borda eut grandement raison d'adopter la suspension à couteau au lieu de la suspension à pince, « parce que dans celle-ci on a toujours quelque incertitude sur le vrai point autour duquel se font les oscillations », le tranchant d'un couteau ne peut cependant jamais être assez vif pour constituer une ligne mathématique. Il doit bien plutôt être considéré comme un petit cylindre dont l'axe est plus élevé que la ligne de contact, en sorte que le rayon de ce cylindre paraîtrait devoir s'ajouter à la longueur du pendule telle qu'on la mesure ordinairement. Laplace a soumis la question au calcul et il a trouvé que ce rayon, quel qu'il puisse être, doit au contraire se retrancher et non s'ajouter à la longueur mesurée (*Mémoires de l'Académie des sciences*, I, III; 1816). En tous cas il y a là une cause d'erreur qui n'est pas négligeable avec des pendules très courts.

[2] KATER, *Philosophical Transactions*; 1818.

e suspension et d'oscillation (87) que Bohnenberger [1] avait déjà herché à utiliser pour déterminer par tâtonnements la longueur u pendule. Sur une règle de laiton, portant à l'une de ses extrénités une lourde lentille, on a implanté deux couteaux n acier dont les arêtes se regardent et dont la distance est à très peu près telle que le pendule fasse dans e même temps un nombre égal d'oscillations autour le l'un ou de l'autre de ces couteaux. Il ne s'agit plus que de rendre l'égalité rigoureuse pour que la distance les deux couteaux soit la longueur l du pendule simple synchrone, le centre de gravité n'étant certainement pas au milieu de cette distance par suite de la présence de la lentille. On a donc disposé sur la règle de laiton entre les deux couteaux un chariot formé de deux pièces, l'une plus lourde munie d'une vis de pression, l'autre plus légère rattachée à la première par une vis de rappel : en déplaçant d'abord tout le système, puis en élevant ou abaissant insensiblement la petite pièce, tandis que la grande est immobilisée par sa vis de pression, on arrive à obtenir une durée de l'oscillation exactement la même quel que soit le couteau servant d'axe de suspension : l est alors rigoureusement connu. Pour mesurer t on emploiera toujours la méthode des coïncidences. A cet effet, le pendule est terminé à chaque extrémité par une longue aiguille effilée qui permet également d'évaluer α selon le procédé ordinaire.

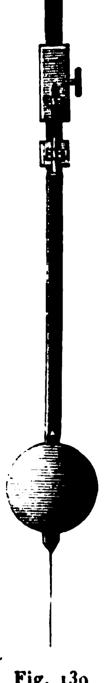


Fig. 139

Si de la mesure faite à Londres par Kater et des nombres obtenus avec son appareil sous différentes latitudes, nous déduisons la longueur du pendule à secondes pour Paris dans l'air, nous trouvons

$$L = 993^{\text{mm}},867.$$

94. Comparaison des résultats numériques des différentes mesures de g. — En rapprochant les nombres obtenus

[1] BOHNENBERGER, *Lehrbuch der Astronomie*; 1811.

par Borda, Biot et Kater, on a

Borda	L = 993^{mm},827,		
Biot	»	»	845,
Kater	»	»	867.

L'accord est remarquable. Il faut observer toutefois qu'aucun de ces nombres n'est corrigé de l'influence de l'air.

Influence de l'air. — Cette influence est multiple :

1° L'air agit sur le pendule, comme sur tout autre corps, en lui faisant éprouver une poussée égale au poids de l'air déplacé. Soient P le poids du pendule, D la densité relative de la matière dont il est formé, a la densité relative de l'air; la force réellement agissante sur le pendule dans l'air est

$$P\left(1-\frac{a}{D}\right).$$

Si donc nous appelons g l'accélération observée dans l'air et g' l'accélération dans le vide,

$$\frac{g'}{g}=\frac{P\left(1-\frac{a}{D}\right)}{P};$$

d'où

$$g'=g\frac{1}{1-\frac{a}{D}}:$$

c'est la correction de Bouguer.

Si le pendule était au repos, il n'y aurait pas d'autre action exercée par l'air. Mais le pendule est en mouvement.

2° L'air résiste à ce mouvement. Nous avons calculé l'effet de cette résistance (86), effet qui sera en général absolument négligeable;

3° L'air est dans une certaine mesure entraîné par le pendule : Bessel [1] a le premier montré qu'il fallait tenir compte de cette circonstance et, en opérant avec deux pendules de même volume,

[1] BESSEL, *Abhandlungen der Berliner Akademie*; 1828.

nais de masse différente, il a trouvé que l'on devait presque doubler e chiffre exprimant la perte de poids dans l'air. Peu de temps près, le capitaine Sabine [1], en Angleterre, fit varier la pression de 'air autour du pendule : ses mesures confirmèrent le fait établi par Bessel, en donnant toutefois une valeur un peu moindre (1,66 au ieu de 1,95) du facteur par lequel devait être multipliée la correction de perte de poids au repos pour représenter la correction pendant le mouvement. Étudiant la question au point de vue théorique, Poisson [2], dans son « mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant », montra que l'on peut en effet tenir compte de l'influence de l'air entraîné en multipliant le terme $P\frac{a}{D}$ [3] qui exprime la perte de poids au repos par un facteur f indépendant et du corps et du milieu, mais dépendant de la forme du pendule. Poisson attribue à ce facteur la valeur $\frac{3}{2}$ dans le cas du pendule de Borda ; les expériences, nécessairement un peu grossières, faites sur un même pendule oscillant successivement dans l'air et dans l'eau, confirment cette valeur de f.

4° Enfin l'air agit par sa *viscosité*. M. Stokes [4] a trouvé les formules permettant de tenir compte de ce nouvel élément, et en prenant la valeur de la viscosité donnée par Maxwell, on peut évaluer très approximativement l'effet produit sur un pendule formé d'une sphère suspendue à un fil, tel que celui de Borda.

De tout cela, comme le remarque M. Faye [5], il aurait fallu, dès l'observation de Bessel, conclure qu'on doit opérer dans le vide. De plus, « on a fini par reconnaître que les supports d'un lourd pendule sont entraînés par lui, en sorte que la pesanteur n'est pas seulement employée à faire osciller le pendule : une partie notable de cette force s'absorbe dans les oscillations communiquées aux

[1] SABINE, *Phil. Trans.*; 1829.

[2] POISSON, *Mémoires de l'Académie des sciences*, XI; 1832.

[3] On voit que de toute manière il est avantageux que le rapport $\frac{a}{D}$ soit le plus petit possible ; le platine est donc le métal qui convient le mieux pour la boule du pendule : $\frac{a}{D}$ est alors à peu près $\frac{0,0013}{21,5}$ ou 0,000065.

[4] STOKES, *Transactions of the Cambridge philosophical society*, IX; 1851.

[5] FAYE, C. R., XC, 1463; 1880.

supports. Il aurait fallu en conclure qu'on doit opérer avec un pendule très léger. »

Tout au contraire, on a donné au pendule une lourde masse pour lutter contre la résistance de l'air, et on a diminué la stabilité du support afin de rendre l'instrument transportable. C'est alors que la deuxième cause d'erreur, minime dans les expériences de Borda (les supports employés par Borda, si l'on en juge par sa description, offraient une grande solidité; d'autre part, la correction relative à l'oscillation des supports est en raison inverse de la longueur du pendule et celui de Borda était très long), a pris assez d'importance pour ne plus pouvoir échapper aux observateurs : M. Hirsch la rendit frappante par une amplification optique considérable; M. Plantamour, aidé de ce procédé, fit des expériences décisives; enfin MM. Célerier et Peirce, soumettant la question au calcul, parvinrent indépendamment l'un de l'autre à une formule de correction tout à fait pratique.

M. Peirce [1] a repris les excellentes observations de Borda et de Biot afin d'y appliquer les corrections qu'indique aujourd'hui la théorie en tenant compte, non seulement de la réduction correcte au vide, mais aussi de la viscosité de l'air et de l'ébranlement des piliers (sensible dans les expériences de Biot). Il a dû laisser de côté les observations de Kater dont le pendule n'avait pas une forme permettant un calcul exact de la réduction au vide. Mais il a refait une nouvelle détermination; si nous la mettons sur la même ligne que les observations de Borda et de Biot telles qu'il les a corrigées, nous avons :

	Longueur du pendule à Paris.			Altitude.
Borda	$L = 993^{mm},918$			67^m
Biot	»	»	913	74
Peirce	»	»	934	74

et la moyenne

$$L = 993^{mm},92$$

donne pour Paris, à l'altitude de 72^m environ, la longueur du pendule à seconde dans le vide, exacte sans doute à $\frac{1}{100}$ de millimètre près.

[1] Peirce, C. R., XC, 1401; 1880.

Il en résulte pour g une augmentation de $\frac{1}{10\,000}$ sur la valeur ordinairement adoptée.

Valeur de g à Paris. — On doit désormais prendre pour Paris $g = \pi^2 . 0{,}993\,92 = 9^m{,}8096$, ou, en unités C. G. S.,

$$g = 980{,}96.$$

Valeurs de g en différents points du globe au niveau de la mer. — Si l'on veut comparer les valeurs de g en divers points du globe, il ne suffit point de les ramener au vide, il faut encore les réduire au niveau de la mer, g décroissant avec l'altitude, comme nous le verrons plus loin (103).

Cette réduction faite, on a cherché à grouper en une seule formule les diverses valeurs obtenues pour g. De la loi de l'attraction universelle combinée avec la rotation de la terre il résulte que l'accélération g_λ à une latitude quelconque λ est liée à l'accélération g_{45} sous le parallèle de 45° par la formule

$$g_\lambda = g_{45}(1 - a \cos 2\lambda).$$

Les observations vérifient en général très exactement cette loi et donnent

$$a = 0{,}00259,$$

la valeur de g_{45} étant

$$g_{45} = 980{,}61.$$

95. Application du pendule à la régulation des horloges. — Dans une horloge, quel que soit le moteur, poids ou ressort, actionnant le système de rouages qui la constitue, il faut régulariser le mouvement produit par ce moteur. Cette régulation se fait au moyen d'un pendule. A l'extrémité du système de rouages, est disposé un mécanisme spécial qu'on appelle *échappement.* Soit par exemple l'échappement *à ancre :* une roue de rencontre, entraînée par le moteur, a ses dents, bien égales, toutes inclinées dans le même sens ; au dessus de cette roue est l'ancre, arc métallique pouvant pivoter autour d'un point fixe et terminé par deux saillies qui s'engagent alternativement entre les dents de la roue. L'ancre

occupant la position indiquée sur la figure, la roue est arrêt et tous les rouages immobilisés. Soulevons l'ancre en A de manière à dégager la dent f : la roue tourne jusqu'à ce que l'extrémité B arrête la dent g. La roue alors a franchi la moitié d

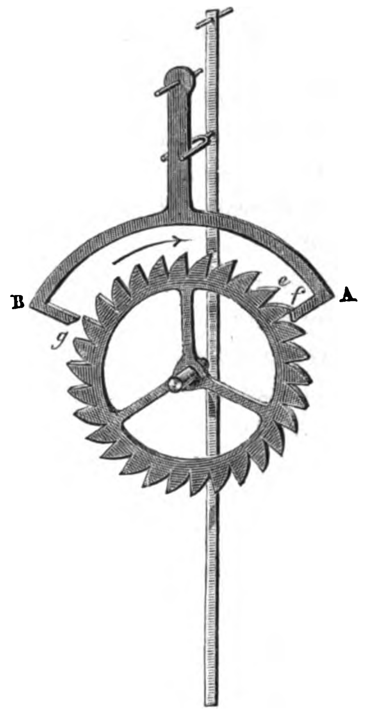


Fig. 140

la distance entre deux dents, et l'extrémité A est au milieu de l'intervalle des dents f et e. Imprimons à l'ancre un mouvement inverse : la dent g se dégage et la dent e vient heurter contre l'extrémité A. Si les mouvements alternatifs de l'ancre sont isochrones, la roue tournera d'arcs égaux dans des temps égaux : elle aura un mouvement intermittent, mais parfaitement régulier. Pour assurer cet isochronisme, on rattache l'ancre à un pendule qui l'entraîne dans son mouvement. Mais le pendule lui-même s'arrêterait bientôt si l'on n'avait soin de lui rendre, au moyen du moteur de l'horloge, la force vive constamment dépensée; à cette fin, chaque extrémité de l'ancre est taillée en biseau de sorte que la dent qui échappe

communique par son frottement sur le biseau une légère impulsion au pendule. Le moteur doit être réglé de manière à vaincre ce frottement et tous les autres, sans cependant tirer trop fort sur l'ancre à chaque arrêt. Les oscillations conservent ainsi toujours *à peu près* la même amplitude et restent *absolument* isochrones : la régularité est donc parfaite.

III. — BALANCE.

96. Théorie de la balance. — La *balance* est un instrument qui sert à peser les corps.

On appelle *poids* d'un corps la résultante des actions élémentaires de la pesanteur sur ce corps (76). Pour mesurer ce poids, on le compare à un autre poids pris pour unité, au poids d'un litre d'eau dans le vide et à 4°, par exemple; le rapport des deux poids, ou *poids relatif*, est indépendant de la valeur de g, les variations de g affectant également les deux termes du rapport. C'est ce nombre, absolument constant pour un corps donné, que l'on détermine avec la balance.

La balance se compose essentiellement d'un levier solide ou *fléau*, pouvant tourner autour de son milieu et portant à ses extrémités des *plateaux* dans lesquels on met les charges à comparer.

Considérons d'abord le fléau seul, il se placera de façon que son centre de gravité G soit sur la verticale du point de suspension C, c'est-à-dire de façon que la ligne CG soit verticale : l'axe AB du fléau sera alors horizontal si les deux bras de levier sont bien identiques. Accrochons aux deux extrémités du fléau des plateaux également pesants, le fléau restera horizontal. Plaçons dans ces plateaux des poids égaux, l'horizontalité du fléau subsistera. Pour faire une pesée, il suffit donc de mettre dans l'un des plateaux le corps à peser et dans l'autre des poids marqués jusqu'à ce que le fléau soit ramené à l'horizontale.

Si le centre de gravité G coïncidait avec le point d'appui C, le poids du fléau pourrait être regardé comme détruit par la résistance de ce point, et le fléau seul serait en équilibre sur l'appui

dans une position quelconque. Des poids égaux appliqués aux deux extrémités ne modifieraient en rien ces conditions ; il n'y aurait donc pas de position déterminée correspondant à l'équilibre du système : la balance serait *indifférente ;* mais la plus faible sur-

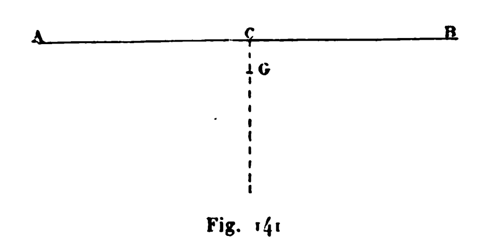


Fig. 141

charge, d'un côté ou de l'autre, ferait chavirer complètement du côté le plus lourd, le fléau tendant à se placer verticalement : l'appareil serait donc singulièrement incommode. Si le centre de gravité était au-dessus du point d'appui, il y aurait bien une position d'équilibre déterminée du fléau, soit seul, soit muni de poids égaux à ses extrémités, mais ce serait une position d'équilibre instable, par suite physiquement irréalisable : la balance est alors dite *folle*. En plaçant le centre de gravité au-dessous du point d'appui, on a toujours une position d'équilibre stable ; et le fléau s'incline d'autant plus que l'un des plateaux est plus surchargé, le poids propre du fléau agissant en sens contraire de la surcharge pour ramener le fléau à l'horizontale.

Soit donc AB un levier pesant dont le centre de gravité est en G, au-dessous du point d'appui C et sur la perpendiculaire CG à AB, si le fléau est symétrique par rapport au plan mené en C perpendiculairement à AB. Supposons d'abord les trois points A, B, C, points d'application des poids et point d'appui, en ligne droite ; et soient l la longueur de chacun des bras CA, CB du fléau, $d = CG$ la distance du centre de gravité au point d'appui, et ϖ le poids du fléau ; soient P et $P+p$ deux forces appliquées en A et B (P est le poids du plateau gauche et du corps qu'il supporte, de même $P+p$ comprend le poids du plateau droit) : le fléau s'incline en A'B' du côté de la surcharge ; mais son centre de gravité se relève en G', le poids ϖ tend à faire revenir le système en AB et l'équilibre s'établit, le fléau étant incliné d'un certain angle α. Les forces agissant sur le

fléau sont toutes situées dans un même plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Les conditions d'équilibre se réduisent donc à

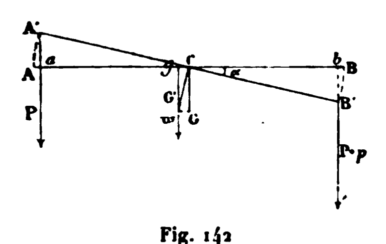


Fig. 142

une seule : la somme des moments des forces par rapport au point C doit être nulle ; ce qui donne

$$(P+p)\,Cb - P.Ca - \varpi.Cg = 0,$$

ou

$$pl\cos\alpha - \varpi d\sin\alpha = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{pl}{\varpi d}\ (^1).$$

La *sensibilité* d'une balance se mesure par l'angle dont elle s'incline pour une légère surcharge déterminée.

La formule montre que la sensibilité est proportionnelle à la longueur du fléau, en raison inverse de son poids et de la distance de son centre de gravité au point de suspension. On en tire aussi cette conclusion importante à noter, que *si les trois points* A, C, B *sont en ligne droite, la sensibilité est indépendante de la charge.*

Il n'en serait plus de même si les trois points A, C, B n'étaient pas en ligne droite. Dans ce cas, supposons encore le fléau symétrique par rapport au plan mené par l'axe C et le centre de gravité G du fléau, et soient

(¹) Si les bras de levier étaient inégaux, on aurait encore la même formule, l étant la longueur du bras qui se trouve du côté de la surcharge et p étant la surcharge ajoutée au poids P qu'équilibrait un poids P' tel que $P'l' = Pl$.

$l = CA = CB$,
$\beta = GCA = GCB$,
$d = CG$,
ϖ le poids du fléau,
P la force appliquée en A,
$P + p$ la force appliquée en B,
$\alpha = BCB'$ l'angle dont s'incline le fléau pour atteindre sa nouvelle position d'équilibre $A'CB'$.

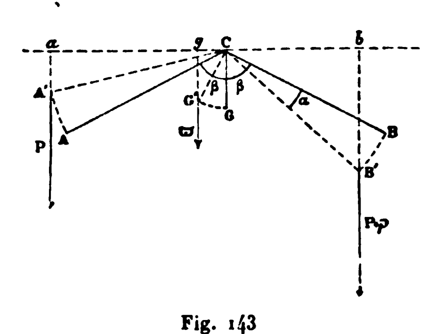


Fig. 143

L'équation des moments est alors

$$(P+p)\,l\sin(\beta-\alpha) - Pl\sin(\beta+\alpha) - \varpi d\sin\alpha = 0,$$

d'où l'on tire facilement

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{pl\sin\beta}{(2P+p)\,l\cos\beta + \varpi d}.$$

Deux cas sont à distinguer :

1° β *est aigu.* — La sensibilité diminue quand la charge augmente.

On voit d'ailleurs facilement que pour $d \geqslant 0$, c'est-à-dire pour toute position du centre de gravité au-dessous de l'axe ou en coïncidence avec lui, on a toujours une position d'équilibre puisque l'on a toujours $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$.

Pour $d < 0$, c'est-à-dire pour les positions du centre de gravité au-dessus de l'axe, α n'est inférieur à β que si

$$2Pl\cos\beta - \varpi d' > 0,$$

désignant la valeur absolue de d. Si l'on suppose que la distance d' aisse être modifiée, ϖ, l et β restant invariables, d'après la con-ition

$$d' < \frac{2Pl\cos\beta}{\varpi},$$

our qu'il y ait équilibre sous une charge P déterminée, d' devra tre inférieure à une certaine limite, passé laquelle la balance sera olle. La sensibilité étant d'ailleurs d'autant plus grande que le énominateur de $\operatorname{tg}\alpha$ est plus voisin de o, on aura tout avantage amener d' aussi près que possible de cette limite sans toutefois atteindre. Si l'on ne peut pas modifier d', les quantités ϖ, l et β restant toujours invariables, on voit que l'équilibre ne sera possible que pour les charges

$$P > \frac{\varpi d'}{2l\cos\beta},$$

au-dessous desquelles la balance sera folle.

2° β *est obtus*. — La sensibilité augmente avec la charge. Sous une charge donnée, pour qu'il y ait équilibre, il faut, si la distance d peut varier, qu'elle soit supérieure à une certaine limite au-dessous de laquelle la balance est folle, et au voisinage de laquelle est encore le maximum de sensibilité. Si d est invariable, la balance est folle pour toute charge supérieure à une limite déterminée.

En résumé, pour qu'une balance puisse utilement servir, le centre de gravité doit être distinct du centre de suspension et au-dessous de ce point ; pour qu'elle soit juste, les bras de levier doivent être égaux et invariables ; pour qu'elle soit sensible et d'une sensibilité constante, les points de suspension des plateaux et le point d'appui doivent être en ligne droite, les bras de levier doivent être longs, le fléau étant cependant léger tout en restant rigide, enfin la distance du centre de gravité au centre de suspension doit être la plus petite possible.

Voyons comment ces diverses conditions sont réalisées dans une balance de précision.

97. Balance de précision. — *Description.* — Le fléau es taillé dans une règle de bronze (¹) ayant la forme d'un losang très allongé, et pour concilier autant que faire se peut ces condition essentielles, en apparence contradictoires, de la légèreté unie à l longueur et à la rigidité, on le découpe à jour en y ménageant de traverses convenablement disposées. L'axe de suspension est const tué par l'arête inférieure d'un couteau en acier C implanté au milie du fléau, et dégagé sur toute la longueur de l'arête par une entail en cœur, dans laquelle pénètre le plan d'agate faisant office de su port. Ce plan est solidement fixé à une colonne verticale MN servan de pied à la balance. Il y a évidemment avantage à utiliser toute l longueur du couteau, la charge se répartissant sur l'étendue total de l'arête qui fatigue moins en chaque point. Le couteau lui-mêm permet de réaliser presque un axe mathématique et sans frotte ment (92, note).

Les axes de suspension des plateaux doivent être placés à de distances fixes (égales autant que possible) de l'axe de suspension d fléau et dans le même plan que lui. A cet effet, deux couteaux e acier sont encastrés dans le fléau, ayant leur arête dirigée vers l haut et située dans un même plan avec l'arête, dirigée vers le ba du couteau médian. Sur chacun de ces couteaux extrêmes repose u étrier renversé E, E′, dont la base portant sur le couteau est un pla ou plutôt un cylindre à faible courbure en agate. Cet étrier se ter mine par une pièce sur laquelle s'appuie un deuxième étrier *e*, *e* perpendiculaire au premier et soutenant le plateau. Il est aisé d voir que, grâce à ce mode de suspension, le plateau est mobile sa partie supérieure autour de deux axes rectangulaires; par con séquent il se placera toujours, quelle que soit la position des corp que l'on y mettra, de telle façon que la verticale du centre d gravité du système aille passer par l'arête du couteau extrême d fléau. La longueur du bras de levier sur lequel agit la charge e donc constante, quelle que soit la position de la charge dans le pla teau (²). Cette condition de la plus grande importance n'est bie

(¹) Le bronze d'aluminium convient parfaitement à cause de sa légèreté.

(²) On aura soin d'ailleurs à chaque pesée de placer les poids de telle ma nière que le plateau reprenne toujours exactement la même position au-dessu d'un repère marqué sur le plancher de la cage.

plie que par l'emploi de couteaux. Dans les balances ordinaires, double crochet et des cordons flexibles la réalisent à peu près lement.

Le fléau porte perpendiculairement à sa longueur vers le bas une gue aiguille *ab*, qui se meut devant un arc divisé et marque

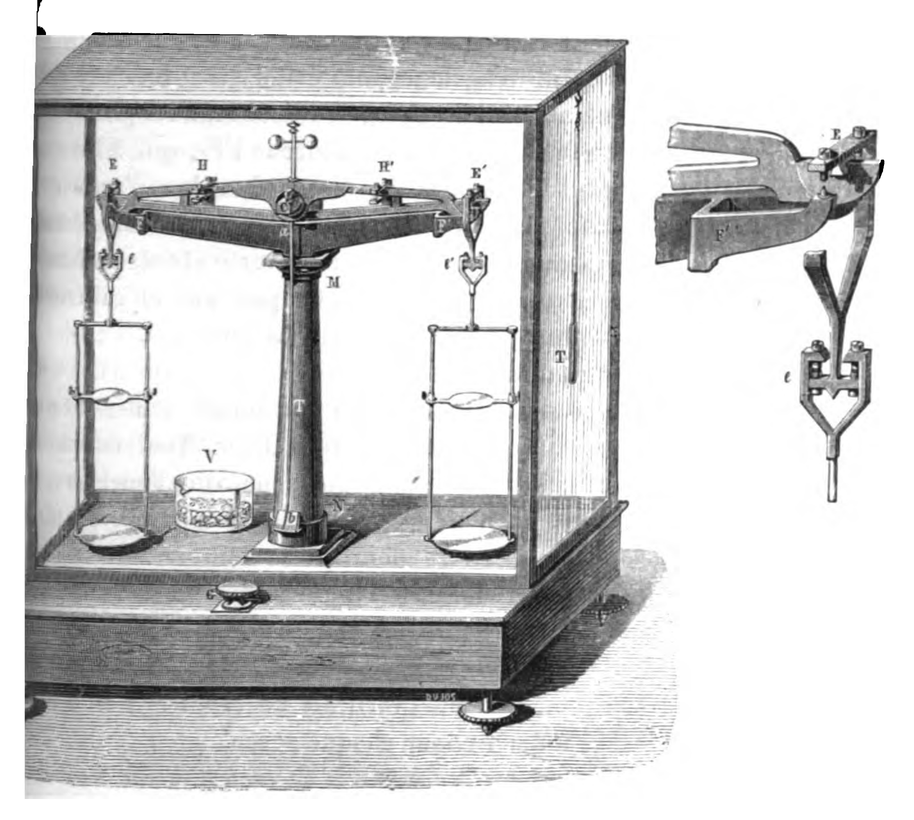


Fig. 144

exactement la moindre inclinaison. En haut, il est surmonté d'une tige filetée sur laquelle peuvent se déplacer deux écrous, l'un formé d'une masse excentrée et destiné à ramener exactement le centre de gravité du fléau sur la perpendiculaire à l'axe, tandis que l'autre sert à donner à la balance pour chaque pesée, toute sa sensibilité. L'utilité de ce dernier écrou est manifeste. Si en effet le constructeur a réussi à disposer les arêtes des trois couteaux strictement dans un même plan, cette condition ne restera pas rigoureuse-

ment remplie lorsqu'on aura mis dans les plateaux des charges so lesquelles le fléau subira inévitablement une certaine flexion. Po obtenir alors toute la sensibilité dont l'appareil est susceptibl on agit lentement sur l'écrou jusqu'à rendre la balance folle, pu par un léger déplacement en sens contraire on revient à l'équilib stable tout en restant très près de la limite d'instabilité.

Afin d'empêcher l'usure qui résulterait du contact continuel d couteaux avec les plans d'agate, et pour éviter aussi les chocs qui produiraient pendant que l'on charge ou décharge les plateaux. o a disposé sous le fléau une sorte de fourche FF', qui, à l'aide d pinces H, H', peut le soulever au-dessus du plan d'agate de l colonne, en même temps qu'elle élève les étriers des plateau au-dessus des couteaux extrêmes : la tige verticale de la fourch est logée à l'intérieur de la colonne et repose par un galet sur u excentrique que commande un bouton G fixé en avant et en deho de la cage renfermant la balance.

Cette cage est munie de portes que l'on ouvre seulement pou placer les corps sur les plateaux ou les retirer. Tout le reste d temps, on a soin de la laisser fermée, et on y maintient quelque subs tance propre à dessécher l'air qui environne l'appareil. Un ther momètre T et un hygromètre donnent la température et l'éta hygrométrique de cet air. La cage repose au moyen de vis calante sur une tablette solidement fixée à la muraille : un niveau circu laire établi sur le plancher de la cage sert à le rendre horizontal l'aiguille de la balance est alors verticale au repos et c'est à cett position qu'on la ramènera dans chaque pesée.

Méthode des doubles pesées; méthode de transposition. — Parm les nombreuses conditions que doit remplir une bonne balance l'une des plus difficiles à réaliser est l'égalité absolue des deux bra de levier; lors même qu'elle existerait exactement à une certaine température, rien ne la garantirait à une température différente; aussi n'y compte-t-on jamais et procède-t-on toujours par la méthode des *doubles pesées* de Borda ou par la méthode de *transposition*.

La méthode des doubles pesées, de beaucoup la plus employée. consiste, le corps étant mis dans un plateau, à lui faire équilibre dans l'autre avec de la grenaille de plomb, à enlever ensuite le corps

sans rien toucher à la tare, à rétablir l'équilibre avec des poids rqués placés sur le plateau où le corps était précédemment. Il est dent que les poids marqués, qui ont été ainsi substitués au corps ns le même plateau de manière à faire équilibre à une même e, exercent la même action à l'extrémité d'un même levier et r conséquent ont le même poids : les poids marqués donnent nc par double pesée le poids du corps.

Dans la méthode de transposition, après avoir établi une première s l'équilibre entre le corps et des poids marqués P, on change plateau le corps et les poids ; pour rétablir l'équilibre il faut en néral modifier un peu les poids qui deviennent P′ : le poids du rps est $\sqrt{PP'}$.

Poids. — Avant tout, il faut se munir de poids exacts, ceux que l'on ouve couramment dans le commerce manquant trop souvent de justesse. On peut d'ailleurs facilement fabriquer soi-même les subdivisions du gramme de la manière suivante : prenant un fil de platine d'un diamètre tel qu'un mètre de ce fil pèse un gramme environ, on ajuste une longueur pesant rigoureusement 1 gramme. On détermine exactement le $\frac{1}{10}$ de cette longueur et on la coupe en cinq morceaux valant respectivement $\frac{5}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{10}$ et pesant par conséquent 5, 2, 1, 1 et 1 décigrammes. On prend ce dernier bout, on le passe à la filière de façon à en décupler à peu près la longueur ; on en mesure exactement le $\frac{1}{10}$ et on divise le bout en cinq morceaux ayant pour longueurs respectives $\frac{5}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{10}$: on a ainsi les centigrammes. Le dernier centigramme est encore passé à la filière et amené à un mètre de long environ, puis partagé par le même procédé en quatre tronçons pesant respectivement 5, 2, 2 et 1 milligrammes. On plie tous ces bouts de fil suivant trois types différents, de sorte que leur forme distingue immédiatement les décigrammes, les centigrammes et les milligrammes. On a donc ainsi, comme dans les boîtes de poids, pour chaque série (sauf la dernière contenant les poids 5, 2, 2, 1) les poids 5, 2, 1, 1 qui permettent toutes les combinaisons de 1 à 9 dans chaque ordre d'unités. On se souviendra enfin que les poids sont censés étalonnés dans le vide, de sorte que les pesées opérées dans

l'air doivent de ce fait recevoir une correction sur laquelle nou reviendrons plus loin.

Pesée. — Pour faire une pesée, on s'assied devant la balance, o ouvre la cage, on place sur l'un des plateaux le corps à peser, sur l'autr de la tare, on arrête les oscillations des plateaux (un plateau qu oscille exerçant un effort plus considérable qu'au repos), on referm la cage et on fait descendre le fléau sur le plan d'agate central e même temps que l'on abaisse les étriers sur les couteaux extrême La balance penche dans un certain sens, on relève la fourche qu soulève le fléau et les étriers ; on ouvre une porte de la cage, o modifie la tare dans le sens voulu, on arrête les oscillations, on re ferme la cage afin d'empêcher les perturbations que causeraient le courants d'air extérieurs, on abaisse la fourche ; et ainsi de suit jusqu'à ce que, le fléau étant libre et portant les deux plateaux, l'ai guille soit au zéro ou plutôt exécute des oscillations égales de par et d'autre du zéro. La balance, en effet, n'est autre chose qu'un pendule composé dont le pendule simple synchrone est générale ment fort long. On n'a donc pas besoin d'attendre que l'aiguill s'arrête ; il suffit qu'elle oscille également de part et d'autre du zéro, pour que l'on soit assuré que sa position d'équilibre corres pond bien au zéro. On enlève alors le corps et on le remplace pa des poids marqués que l'on introduit méthodiquement dans l'ordre d'après lequel sont constituées les séries.

Pour les dernières fractions de gramme, on peut abréger en employant soit des *cavaliers mobiles* que l'on fait glisser sur l'un ou l'autre des bras de levier, soit une *aiguille mobile* dans un plan normal au fléau. Ces deux procédés sont faciles à comprendre.

Un petit cavalier mobile sur l'un des bras de levier exerce un effort proportionnel à sa distance à l'axe de suspension. Placé audessus du couteau extrême, ce cavalier pesant 1 centigramme, par exemple, agira comme s'il était dans le plateau ; placé à une distance moitié moindre, il produira un effort de 5 milligrammes, et ainsi de suite. En divisant donc le fléau en parties d'égale longueur, on pourra facilement avec le cavalier apprécier le milligramme et même une fraction assez faible de milligramme si la sensibilité de la balance le permet. Ces cavaliers se commandent du dehors au moyen de tiges latérales qui viennent les saisir par leur partie supérieure.

Une aiguille CE reliée en C au fléau, de manière à pouvoir tour-:r dans un plan horizontal, est sans effet quand elle est dirigée ivant le rayon CE perpendiculaire à AB. Amenée dans une direc-on CE′ telle que ECE′ $= \omega$, elle ajoute du côté CA son poids b ap-

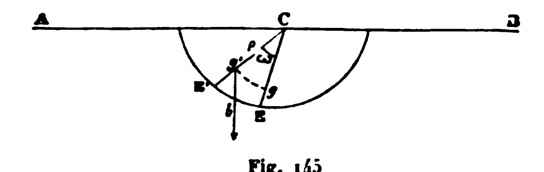


Fig. 145

liqué en g' à une distance ρ du point C et dont le moment, par apport à l'axe de suspension, est $b.\rho \sin \omega$. Si donc on marque ur le cercle, à partir de E, des divisions correspondant à rc $\sin \frac{1}{10}$, arc $\sin \frac{2}{10}$,..... l'aiguille placée en face de l'une de ces livisions produira le même effet qu'une surcharge de 1, 2... milli-grammes si $b.\rho = 1^{\text{centigr}}.l$.

Au lieu de chercher à obtenir l'égalité absolue des efforts sollici-tant les deux bras du fléau, il vaut mieux n'établir qu'une égalité approximative et mesurer la différence. A cet effet on emploie la *méthode des oscillations* : l'égalité étant à très peu près établie, on laisse osciller la balance, on note trois élongations successives l_1, l_2, l_3, la division

$$a = \frac{1}{4}(l_1 + 2l_2 + l_3)$$

est celle qui correspondrait à la position d'équilibre. On ajoute un milligramme dans le plateau des poids ; on détermine, comme précédemment, la division correspondant à la nouvelle position d'équilibre du fléau : on a dès lors la valeur en milligrammes d'une division de la balance pour la charge et l'époque considérées. On en conclut aisément le poids qu'il aurait fallu ajouter pour que dans la première expérience la position d'équilibre fût non pas a, mais o.

Degré de précision de la balance. — La balance est l'appareil de précision par excellence. Une balance sensible à un milligramme

sous une charge d'un kilogramme mesure ce poids à un millionième près de sa valeur. Or, de tels instruments sont de construction courante : les balances de précision sont habituellement sensibles à un milligramme, souvent même à un demi-milligramme sous une charge d'un demi-kilogramme, d'un kilogramme ou de deux kilogrammes, suivant le modèle. Deleuil a construit jadis pour Regnault une balance sensible à un milligramme sous une charge de dix kilogrammes.

Aujourd'hui on va beaucoup plus loin. En employant la méthode des oscillations, en multipliant les pesées et en notant chaque fois les conditions météorologiques de façon à éliminer leur influence sur l'appareil même (1), en se servant enfin de balances que l'on n'ouvre pas et que l'on observe à distance (2), on atteint le $\frac{1}{100}$ de milligramme : *on pèse un kilogramme à un cent millionième près.*

98. Balances de laboratoire. — A côté de la balance de précision type, nous mentionnerons quelques appareils que l'on rencontre souvent dans les laboratoires.

Le plus ancien modèle de balance de précision est la *balance de Fortin.* Elle présente un long fléau d'acier trempé, plein, et traversé en son milieu par un couteau qui s'appuie des portions extérieures de son arête sur deux plaques d'agate disposées dans un même plan horizontal ; aux deux extrémités sont fixés deux couteaux sur chacun desquels repose un double crochet portant un anneau auquel s'attache le bassin. Une fourche commandée par un bouton extérieur peut soulever le fléau et le supporte au repos. Cette balance doit être installée, munie de sa cage, perpendiculairement au plan du méridien magnétique pour éviter les perturbations qui résulteraient de l'action du magnétisme terrestre sur le fléau.

La *balance de laboratoire* construite par Deleuil et sensible à cinq milligrammes sous la charge de trois kilogrammes, remplace

(1) Deville et Mascart, *Annales de l'École normale supérieure* (2), VIII, 20 ; 1879. Une balance permettant d'opérer dans le vide offrirait un avantage énorme : quelques essais ont déjà été faits dans cette direction.

(2) Voir dans les *Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures*, I, D, 53, Marek, la description et l'usage d'une balance de Rueprecht avec mécanisme de transposition de Schorss, de Vienne.

avantageusement ce modèle : le fléau a la forme adoptée par Deleuil dans ses balances de précision ; les plateaux sont disposés de façon à recevoir des corps volumineux ou encombrants ; une roue située en avant de la balance et à l'extérieur de la cage qui l'enferme, permet d'élever ou d'abaisser un système de leviers soulevant les étriers au repos.

Dans la *balance de Bockoltz*, l'un des bras du fléau porte, au lieu de plateau, une tige sur laquelle sont enfilés une série de disques en laiton, constituant de ce côté une charge fixe. A l'autre bras sont attachés deux bassins, dont l'un reçoit le corps à peser, et l'autre une tare que l'on règle de manière à obtenir l'horizontalité du fléau. On remplace ensuite le corps par des poids marqués. Cette balance est donc à charge invariable et par suite à sensibilité rigoureusement constante.

Le *trébuchet* des chimistes est une petite balance dont le fléau long et léger, du type Fortin, s'appuie au repos sur une fourche fixe qui le maintient au-dessus du plan d'appui. Ce plan est porté par une tige verticale contenue à l'intérieur de la colonne qui forme le manche de la fourche ; un levier disposé en avant permet de soulever la tige et, par suite, d'amener le plan d'appui sous le couteau central : le fléau trébuche alors à droite ou à gauche, suivant que l'un ou l'autre des deux plateaux l'emporte ; on laisse retomber le fléau sur la fourche fixe, on modifie la charge dans le sens voulu ; et, après quelques trébuchements, on atteint rapidement l'équilibre. Ces petites balances sont facilement sensibles à un milligramme sous une charge de vingt ou trente grammes.

Pour obtenir une égalité parfaite des bras de levier, Berzélius terminait chaque extrémité du fléau par une lame d'acier courbée en forme d'U renversé : la branche extérieure de l'U présentait une fenêtre dont le bord inférieur taillé en tranchant recevait le crochet du plateau; une vis reliait les deux branches de l'U et permettait un réglage rigoureux. Cette disposition ne convient guère qu'aux balances légères, et même dans ce cas elle pèche au point de vue de la fixité des axes. Il est bien préférable d'avoir des couteaux invariablement encastrés et d'opérer par double pesée.

99. Balances d'usage courant. — Si maintenant no passons aux balances d'un usage courant dans le commerce, no trouvons d'abord, outre les balances rappelant plus ou moins l

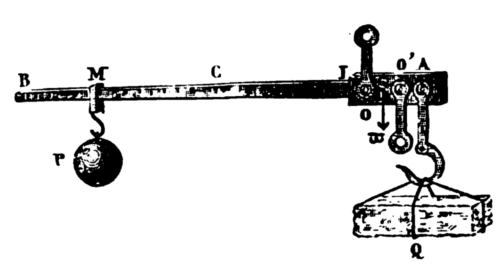


Fig. 146

balance de précision, la *romaine* qui n'exige qu'un seul poids, es d'un maniement rapide, mais ne comporte pas une grand précision. C'est un levier AB, à bras inégaux, soutenu en ((ou en O') par un couteau d'acier qui repose à l'intérieur d'un anneau supporté par un crochet fixe ; en A est un deuxième cou- teau tourné en sens contraire et portant le fardeau Q à peser. On amène le poids constant P en un point M, tel que le levier prenne la position horizontale. Soit ϖ le poids du fléau appliqué en G : la condition d'équilibre est

$$P.OM - Q.OA - \varpi.OG = 0.$$

Soit I le point où il faut placer le poids P pour que l'équilibre ait lieu à vide,

$$P.OI - \varpi.OG = 0.$$

Si l'on retranche cette relation de la précédente, on a

$$P.IM = Q.OA,$$

ou

$$Q = \frac{P}{OA} \cdot IM.$$

Le poids à évaluer Q est donc proportionnel à IM. Pour graduer l'instrument, on déterminera d'abord le point I, puis le point C correspondant à un poids Q connu, 10 kilogrammes, par exemple :

n partagera IC en 10 parties égales et on prolongera au delà de C s divisions que l'on subdivisera ensuite à son gré.

La *bascule de Quintenz* est fréquemment employée dans le com-

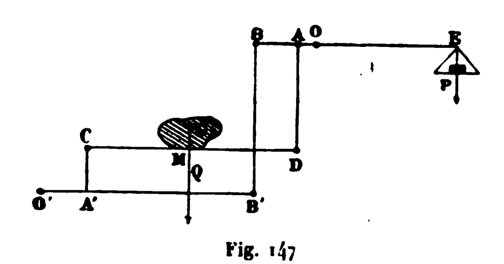


Fig. 147

merce pour peser les fardeaux considérables. Le tablier destiné à recevoir les corps à peser Q, repose sur un levier CD qui est mobile autour d'un axe horizontal C et qui est relié par une tige verticale DA au point A d'un deuxième levier BE mobile autour du point fixe O. L'axe C est porté par une tige CA' implantée perpendiculairement en A' sur un troisième levier O'B' mobile autour de l'axe fixe O' et relié au levier BE par la tige verticale B'B. Le poids Q, appliqué en M, peut se décomposer en deux autres, l'un $Q\cdot\frac{CM}{CD}$ appliqué en D et transmis en A par la tige verticale AD, l'autre $Q - Q\cdot\frac{CM}{CD} = Q'$ appliqué en C et transmis en A' par la tige CA'. Ce poids Q' se décompose lui-même en deux autres, l'un $Q'\cdot\frac{A'B'}{O'B'}$ appliqué en O' et détruit par la résistance de ce point fixe, l'autre $Q'\cdot\frac{O'A'}{O'B'}$ appliqué en B' et transmis en B par la tige verticale B'B. Nous avons donc, agissant sur le levier BE, en A le poids $Q.\frac{CM}{CD}$, en B le poids $Q'.\frac{O'A'}{O'B'}$ et en E le poids P. L'équation d'équilibre de ce levier sera donc

$$P.OE - Q.\frac{CM}{CD}.\,OA - Q'.\frac{O'A'}{O'B'}.OB = 0,$$

ou, si l'on remplace Q' par sa valeur,

$$P.OE - Q.\frac{O'A'}{O'B'}.\,OB + Q.\frac{CM}{CD}\left(\frac{O'A'}{O'B'}.\,OB - OA\right) = 0.$$

Il faut que la place du corps sur le tablier soit indifférente. CM étant dans l'équation la seule quantité variable avec la position du corps, la condition voulue sera remplie si

$$\frac{O'A'}{O'B'}OB - OA = o,$$

ou

$$\frac{O'A'}{O'B'} = \frac{OA}{OB};$$

et l'on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{O'A'}{O'B'} \cdot \frac{OB}{OE} = \frac{OA}{OE},$$

c'est-à-dire que le corps produira le même effet que s'il était directement attaché en A, ou que le poids marqué P nécessaire pour l'équilibre est une fraction constante $\frac{OA}{OE}$ du poids Q du corps. Si $\frac{OA}{OE} = \frac{1}{10}$, la bascule est dite au dixième : le poids Q est 10 fois plus grand que le poids B qui lui fait équilibre.

La *bascule romaine de Béranger* présente des perfectionnements importants qui l'ont fait adopter dans toutes les gares de chemins de fer. Le plateau CDC'D' porte sur quatre couteaux, *a*, *b*, *c*, *d*, disposés en rectangle sur deux leviers, l'un *e*I*f* mobile autour de l'axe horizontal *ef*, l'autre *g*I*h* mobile autour de l'axe horizontal *gh*. Ces deux leviers sont réunis l'un à l'autre par une bride verticale I, de sorte qu'ils ne peuvent osciller que d'un mouvement commun. Une barre horizontale IB relie le point I à une tringle verticale unique AB (tringle de puissance), attachée au fléau AE mobile autour de l'axe O. Ce fléau est placé parallèlement à la largeur et non plus en prolongement du tablier, ce qui réduit les dimensions de l'appareil; et pour qu'on puisse opérer rapidement, il porte un curseur V permettant de faire, comme avec une romaine, les pesées de 0 à 100 kilogrammes : au delà seulement il faut recourir à des poids marqués que reçoit le plateau P.

Une charge Q placée sur le tablier se partage, d'une manière que nous n'avons point à examiner ici, entre les quatre points d'appui *a*, *b*, *c*, *d*. Soit *q* la pression supportée par le point *a* : relativement à l'axe *ef*, elle équivaut à une charge $q.\frac{ae}{IK}$ appliquée en I. Les

autres pressions se comportent de même, de sorte qu'on peut les concevoir rassemblées toutes les quatre au point I où elles se composent en une seule égale à $Q.\frac{ae}{IK}$. Cette résultante agit par la barre IB sur la tringle AB qu'elle sollicite avec une force définie par la condition d'avoir encore même moment relativement à l'axe ef, c'est-à-dire avec une force $Q.\frac{ae}{IK}.\frac{IK}{Be}=Q.\frac{ae}{Be}$. Si donc le rapport

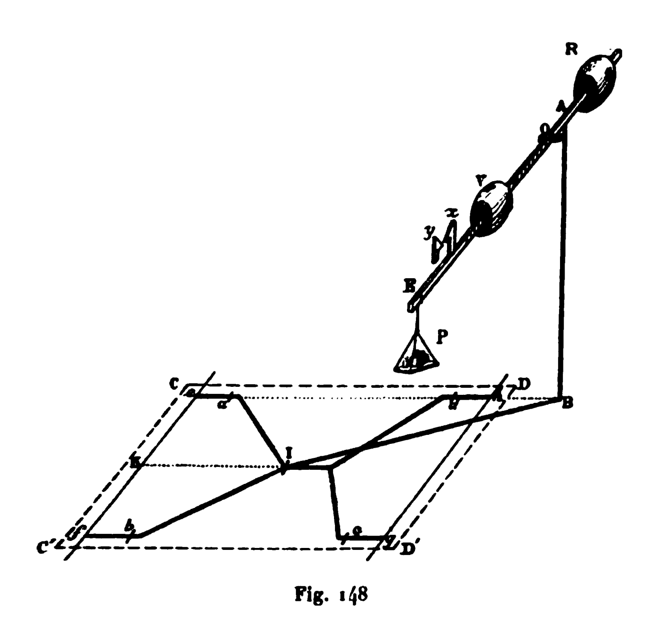


Fig. 148

$\frac{ae}{Be}=\frac{1}{10}$, tout se passe comme si la charge Q, réduite au $\frac{1}{10}$, était suspendue à la tringle AB. Le rapport $\frac{AO}{OE}$ étant lui-même égal à $\frac{1}{10}$, le poids P nécessaire pour maintenir le fléau horizontal est le $\frac{1}{100}$ du poids Q.

On comprend, sans qu'il soit nécessaire d'insister, comment au poids P agissant au point E on peut substituer le curseur V placé à une distance convenable de l'axe O. Le contre-poids R doit être réglé de telle sorte que le tablier CDC'D' et le plateau P étant vides, le curseur V soit au zéro de la graduation du fléau, l'index x étant en regard de l'index fixe y.

Bien construits, ces appareils peuvent rendre de grands ser-

vices dans un laboratoire. Sur les indications de M. Hervé Mangon, Rédier a appliqué à une bascule son système enregistreur HPR (Voir au chapitre du Baromètre) et il a obtenu un appareil qui permet de suivre à une fraction de gramme près sous une

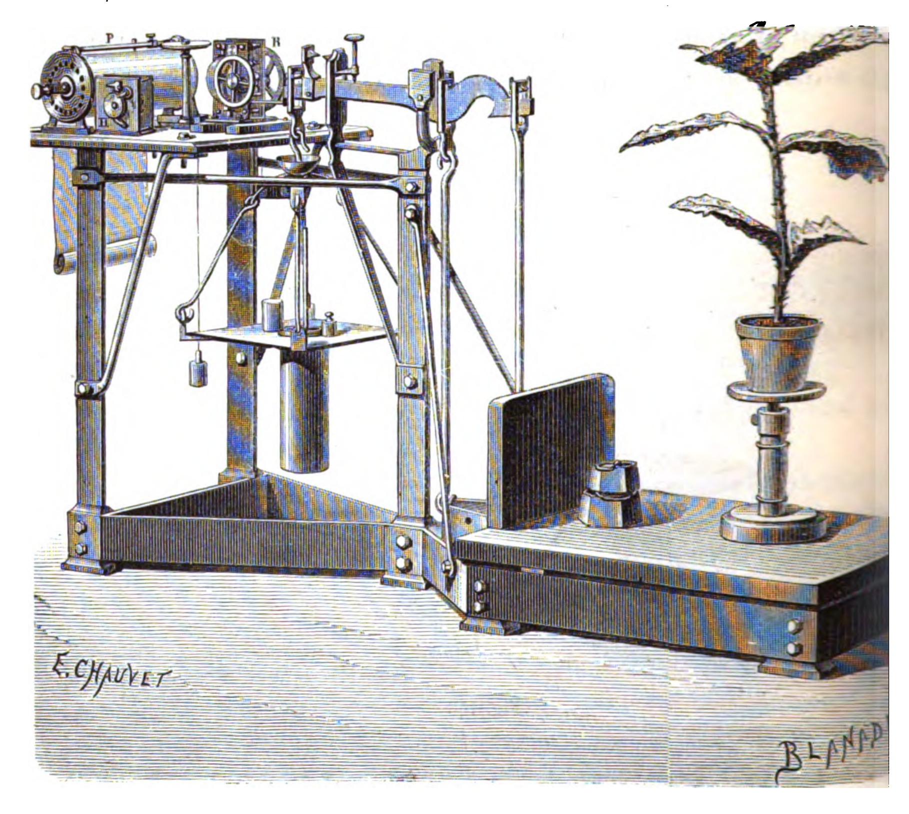


Fig. 149

charge de 300 kilogrammes, l'évaporation de l'eau dans un réservoir, la transpiration d'une plante, la combustion d'une bougie, etc.

Depuis quelques années on emploie beaucoup les *balances à plateaux supérieurs*, imaginées par Roberval.

La *balance de Roberval* se compose essentiellement de deux leviers égaux et parallèles AB, A'B', mobiles autour de leurs milieux O et O', et reliés par deux tiges verticales AA', BB' articulées en A, A', B, B'. Ces tiges se prolongent en haut et portent les plateaux. Si un poids P est placé en un point quelconque M sur l'un des plateaux,

il est aisé de voir que ce poids agit comme s'il était placé en C à l'extrémité de la tige BB'. Appliquons en C les deux forces égales et con-

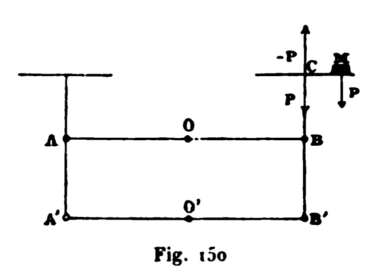


Fig. 150

traires P et — P; nous aurons alors un couple P, — P de bras de levier CM et une force P appliquée en C. Or, le couple est sans effet, le plateau étant solidaire de la tige BB'. Il reste seulement la force P

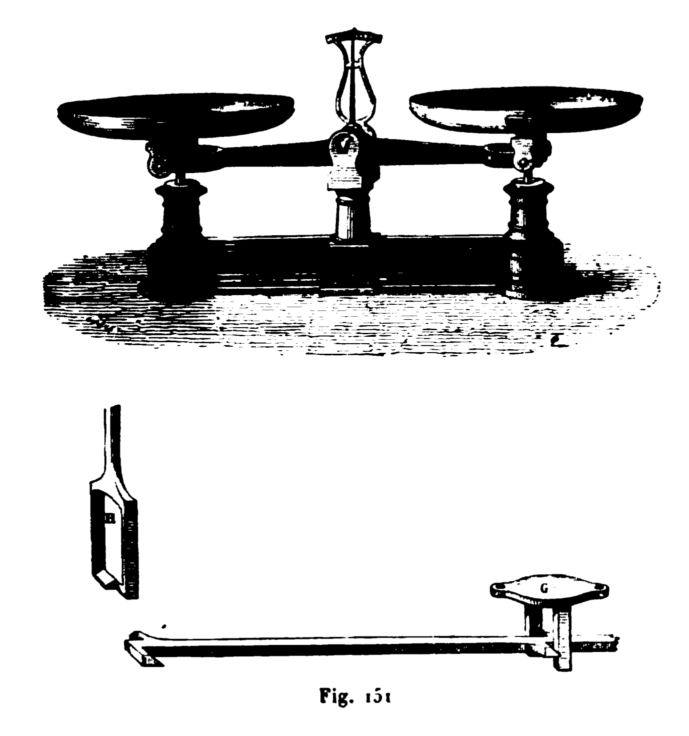


Fig. 151

appliquée en C. Tout se passera donc comme avec une balance ordinaire dont le fléau serait AB, et la formule générale est théoriquement applicable; mais pratiquement les frottements aux articulations

rendent illusoires les conditions de sensibilité que l'on en pourra déduire. Ci-contre est figurée une balance de Roberval. On a représenté à part une partie du levier inférieur A'B', ainsi que l'étrier par lequel se termine inférieurement chacune des tiges AA', BB', et l'étrier fixe G qui maintient l'axe O' immobile dans le plan horizontal.

En dépit de toutes les précautions prises pour assurer la mobilité du système, l'appareil est imparfait ; aussi lui préfère-t-on

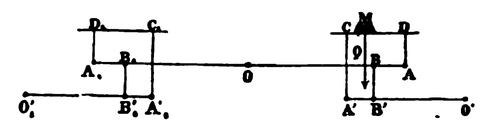


Fig. 152

généralement aujourd'hui la *balance Béranger*, qui n'est autre chose qu'une double bascule dans laquelle le corps, placé en un point quelconque du plateau, produit le même effet que s'il agissait directement sur le fléau au point A, à la condition que l'on ait

$$\frac{O'A'}{O'B'} = \frac{OA}{OB}.$$

La figure 153 représente le modèle construit actuellement par

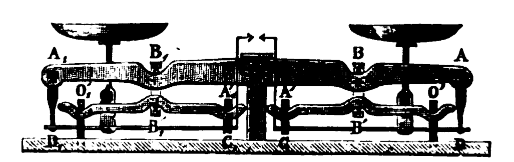


Fig. 153

Trayvou, et dont chaque articulation est constituée par un coussinet mobile dans la gorge duquel s'appuie le couteau.

Tout le monde connaît le *peson*, qui donne le poids par une simple lecture. M. Dujour, inspecteur principal au chemin de fer de Lyon, a eu récemment l'idée de l'appliquer à la pesée des colis dans les gares. D'après la formule générale établie plus haut, à des poids croissants correspondent des variations proportionnelles de la tangente de l'angle d'inclinaison et par conséquent des variations de plus en plus petites de cet angle même : sur

e cadran de l'appareil les divisions iront donc en se serrant de plus en lus, ce qui est un grave inconvénient. M. Dujour l'a évité en atta-

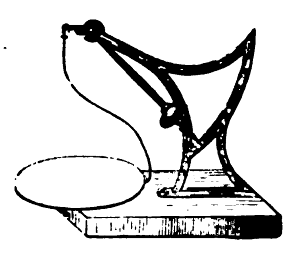


Fig. 154

chant le contre-poids P à un ruban d'acier appliqué contre l'extrémité AB du grand bras du fléau taillée en développante de cercle. Le petit bras, d'autre part, affecte la forme d'un secteur circulaire ayant

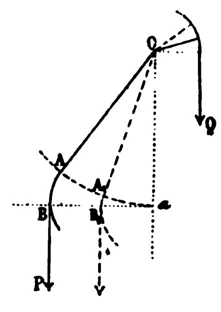


Fig. 155

son centre sur l'axe de rotation et auquel s'applique pareillement un ruban d'acier soutenant la tringle de puissance Q d'une bascule Béranger. Le fléau lui-même est porté par une chape oscillante sur le fond de laquelle il repose par un tourillon cylindrique. La forme circulaire du petit bras a pour effet de rendre constant le bras de levier de la puissance, quelle que soit la position du fléau, de sorte que de ce côté le moment est toujours proportionnel à la charge. De l'autre côté, le bras de levier du contre-poids varie proportionnellement à l'arc décrit par l'extrémité A de la portion rectiligne du grand bras [1]. La charge est donc mesurée par l'angle dont le

[1] AB étant une développante du cercle aA_1A, on a par définition $aB = \text{arc } Aa$.

fléau s'incline à partir de la position OA_1 qu'il prend à vide. Afin rendre la lecture de cet angle commode pour l'opérateur et p le public, on l'amplifie au moyen d'un secteur monté sur le t

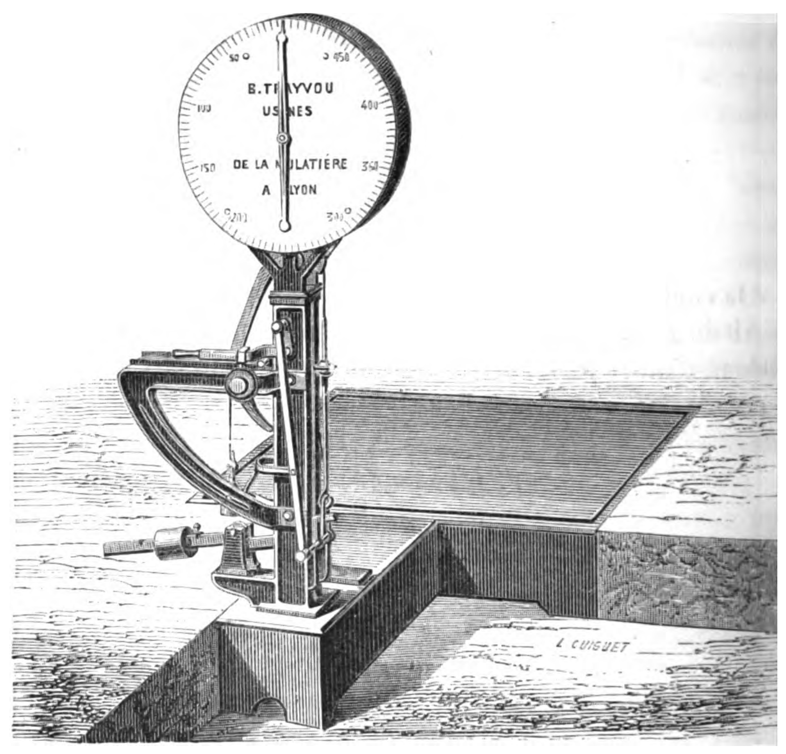


Fig. 156

rillon du fléau et d'un pignon denté, calé sur l'axe de l'aiguille ind catrice. On peut remarquer aussi que le ruban portant le contr poids se déplace horizontalement comme le curseur mobile d'un romaine ordinaire ; de là le nom de *romaine automatique* donn aussi à la balance Dujour.

Tous ces instruments, ainsi que nous l'avons dit, font co naître le poids relatif. Si on voulait avoir le poids absolu, il faudra employer un dynamomètre quelconque, un *peson à ressort* (32) pa exemple.

IV. — ATTRACTION UNIVERSELLE.

100. Découverte de l'attraction universelle. — A l'aide des observations patiemment et scrupuleusement accumulées pendant trente-cinq ans par Tycho-Brahé ([1]) et « après neuf années d'efforts poursuivis avec une application infatigable et une contention d'esprit qui parfois, dit-il, le tourmenta presque jusqu'à la démence », Képler ([2]) parvint à représenter le mouvement de Mars ([3]) par deux lois qui furent reconnues ensuite applicables aux autres planètes et que l'on peut formuler ainsi :

1° Les orbites des planètes sont planes, et le rayon vecteur mené du centre du soleil au centre de la planète décrit des aires proportionnelles aux temps.

2° Les orbites des planètes sont des ellipses dont un des foyers est occupé par le soleil.

« Ces grandes lois, éternellement vraies dans de justes limites, ne sont cependant pas mathématiquement exactes ; et il est extrêmement remarquable que l'imperfection même des observations de Tycho a favorisé Képler en lui cachant les perturbations qui écartent sans cesse la planète de l'orbite où il avait cru l'enfermer à jamais ([4]). Sans doute ces perturbations, calculées et prévues aujourd'hui, confirment avec éclat la théorie de l'attraction que Newton sut tirer des lois mêmes de Képler ; mais la connaissance prématurée de ces perturbations eût enveloppé la vérité dans d'inex-

([1]) Tycho-Brahé, né à Knudstrup (Danemark) en 1546, mort à Prague en 1600; *Œuvres complètes*; Prague, 1611.

([2]) Képler, né à Weil (Wurtemberg) en 1571, mort à Ratisbonne en 1630; *Astronomia nova* αἰτιολόγητος, *seu Physica cœlestis tradita commentariis de motibus stellæ Martis*; Pragæ, 1609.

([3]) Copernic, né à Thorn (Pologne) en 1473, mort à Frauenburg en 1543, avait établi le double mouvement de la Terre par la simplicité et la régularité des explications qui en résultent et qui l'imposent irrésistiblement à l'esprit.

([4]) « En essayant de placer toutes les positions de Mars sur un même cercle, Képler trouva des écarts de 7 à 8 minutes. C'était peu sans doute ; et cependant Képler n'hésita point à rejeter le cercle et à lui substituer une ellipse : « La bonté divine, dit-il, nous a donné en Tycho un observateur tellement exact, qu'une erreur de 8 minutes est impossible. » Cette confiance sauva tout ; mais si Képler avait pu en dire autant d'une erreur de 8 secondes, tout était perdu. »

tricables embarras et retardé bien longtemps peut-être le triomphe de la vraie doctrine. »

Après avoir défini le mouvement individuel de chaque planète, Képler [1] découvrit encore la loi célèbre qui, rattachant la longueur des grands axes des orbites planétaires à la durée des révolutions, relie tous les éléments de notre système :

3° Les carrés des temps des révolutions sont proportionnels aux cubes des grands axes.

Newton [2] sortait à peine de l'université de Cambridge, lorsqu'il chercha, pour la première fois, à mesurer les forces qui régissent le mouvement des corps célestes et dès lors *il y pensa toujours*. Voyant un jour une pomme se détacher de l'arbre qui la portait et tomber à ses pieds, il se demanda si la force qui précipite tous les corps vers le centre de la terre a des limites. « Elle agit sur les plus hautes montagnes ; s'exercerait-elle à une hauteur dix, cent, mille fois plus grande? S'étend-elle jusqu'à la lune? Un penseur moins pénétrant eût répondu aussitôt, avec une apparence de certitude, que la lune n'étant pas soutenue, si elle pesait vers la terre, rien ne l'empêcherait d'y tomber et que par conséquent notre système d'action ne s'étend pas jusqu'à elle. Newton pensa tout le contraire. Ne sait-on pas, par une expérience journalière, qu'un projectile lancé horizontalement va retomber d'autant plus loin qu'il est parti de plus haut et avec une plus grande vitesse? Que l'on se place par la pensée au sommet d'une tour de 90.000 lieues de haut (c'est la distance de la lune) pour lancer horizontalement ce projectile avec une vitesse d'un quart de lieue par seconde, qui est à peu près celle de la lune, n'est-il pas évident qu'il ira tomber à une distance plus grande que le rayon de la terre qui n'est que de quinze cents lieues ? Comme dans ce mouvement il ne perd rien de sa vitesse, il sera en quelque sorte sans cesse lancé horizontalement et la même pesanteur qui fait tomber une pomme à la surface de la terre, maintient au contraire la lune à une distance constante sans pouvoir la ramener jamais sur notre globe dont les dimensions sont trop petites. »

(1) Képler, *Harmonices mundi libri V*; Lincii, 1619.

(2) Newton, né à Woolsthorpe (Lincoln'shire) en 1642, mort à Kensington en 1726; *Philosophiæ naturalis principia mathematica*; Londres, 1687.



La vérité était découverte (1666); restait à en donner la démonstration rigoureuse. Mais s'il est vrai que le soleil attire les planètes, que les planètes s'attirent entre elles, que chaque partie de l'univers réagisse sur le tout, comment démêler dans cette confusion le rôle et la grandeur de chaque force et séparer, par des déductions rigoureuses, ce qui est si étroitement uni?

« C'eût été tenter l'impossible que de vouloir résoudre d'emblée un tel problème, et Newton devait avant tout le simplifier. Il remplaça d'abord les orbites des planètes par des cercles ayant pour centre le soleil et celle de la lune par un cercle décrit autour de la terre et fixe par rapport à elle. Les théorèmes d'Huyghens permettent de fixer la grandeur et la direction de la force capable de perpétuer ces mouvements simples, et la troisième loi de Képler montre dans quelle proportion elle doit s'affaiblir avec la distance. »

Ce premier pas offrait peu de difficultés. Trois savants éminents de Londres, Hooke, Wrenn et Halley, l'avaient heureusement franchi. Mais Newton seul sut montrer que l'attraction est la loi générale de l'univers, dont elle explique, comme autant de conséquences, toutes les prodigieuses complications. Dans son admirable livre des *Principes* (qui paraît avoir été composé pendant les années 1684 et 1685), il fit voir que l'attraction universelle règle seule la marche des astres, les mouvements alternatifs de l'Océan, « les marches inégales de la lune dans son orbite toujours changeante, le déplacement séculaire des plans où se meuvent les planètes, l'altération insensible mais constante de leurs orbites, et le mouvement lent et régulier de l'axe de la terre, qu'elle rattache immédiatement à la forme aplatie de la surface terrestre. Tous les grands phénomènes du système du monde se trouvèrent ainsi enchaînés avec une admirable unité, et la théorie physique de l'univers fut ramenée à un seul principe (1). »

101. Loi de Newton déduite des lois de Képler. — *Premier calcul approché.* — Les ellipses décrites par les planètes ont toutes des excentricités très faibles. Si nous supposons les orbites circulaires, la première loi de Képler exige que chaque planète décrive

(1) Bertrand, *les Fondateurs de l'astronomie moderne*, passim.

d'un mouvement uniforme son cercle autour du soleil. Mais nous savons (22) qu'un tel mouvement suppose une force F dirigée vers le centre du cercle et égale à

$$F = m\frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Pour une deuxième planète, on aura

$$F' = m'\frac{4\pi^2 r'}{T'^2};$$

d'où

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'}\cdot\frac{r}{r'}\cdot\frac{T'^2}{T^2}.$$

Mais, d'après la troisième loi de Képler,

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{r'^3}{r^3};$$

on a donc

$$\frac{F}{F'} = \frac{m}{m'}\cdot\frac{r'^2}{r^2},$$

ou

$$\frac{F}{\frac{m}{r^2}} = \frac{F'}{\frac{m'}{r'^2}} = \mu,$$

μ étant une constante pour toutes les planètes. Donc

$$F = \frac{m\mu}{r^2}.$$

Ce fut de cette manière simple que Newton trouva d'abord la loi fameuse qui a immortalisé son nom.

Calcul exact. — Newton reprit ensuite la question dans l'hypothèse du mouvement elliptique : nous la reprendrons avec lui, mais en suivant une marche un peu différente.

La première loi de Képler détermine la direction de la force qui sollicite la planète. Soit en effet MM' un élément de la trajectoire

ırcouru dans un temps infiniment petit dt; si aucune force n'a-ıssait sur la planète, dans un second intervalle de temps dt égal ı premier elle parcourrait en ligne droite un deuxième élément l'm = MM'. En réalité, elle décrit l'élément M'M'', l'aire SM'M''

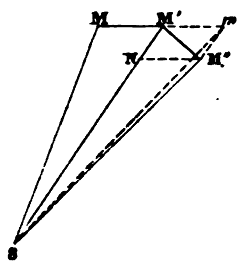


Fig. 157

étant égale à l'aire SMM' d'après la première loi de Képler. Mais aire SM'm = aire SMM', les deux triangles SMM' et SM'm ayant des bases égales MM' = M'm et même hauteur. On a donc : aire SM'M'' = aire SM'm; or les deux triangles SM'M'' et SM'm ont même base SM'; leurs sommets M'' et m sont donc sur une parallèle à cette base : la droite M''m est parallèle à SM'. Si nous achevons le parallélogramme M'mM''N, l'espace M'M'' réellement parcouru par la planète pendant le deuxième intervalle de temps dt peut être regardé comme la somme géométrique de l'espace M'm décrit en vertu de la vitesse acquise et d'un espace M'N parcouru sous l'action d'une force spéciale dirigée suivant M'S. Ainsi, de la loi des aires il résulte que la force qui sollicite la planète est dirigée vers le centre du soleil.

La loi des aires peut d'ailleurs être transformée de diverses manières, parmi lesquelles nous indiquerons la suivante qui nous sera utile dans la suite. Soit $\frac{k}{2}$ l'aire décrite pendant l'unité de temps, l'aire élémentaire MSM' décrite dans le temps infiniment petit dt sera $\frac{k}{2}dt$; or cette aire a pour mesure $ds\,\frac{q}{2}$, si l'on pose MM' = ds et si l'on désigne par q la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre S du soleil sur la direction MM'.

On a donc

$$\frac{k}{2}dt = ds\frac{q}{2},$$

ou

$$\frac{ds}{dt}=\frac{k}{q},$$

c'est-à-dire

$$v=\frac{k}{q}:$$

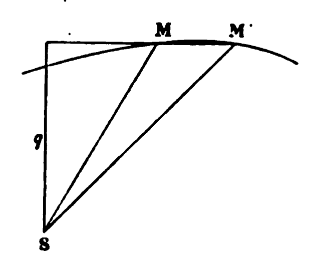


Fig. 158

la vitesse en un point de la trajectoire est en raison inverse de la distance du centre du soleil à la tangente en ce point.

La deuxième loi de Képler fait connaître la grandeur de la force à chaque instant. La planète décrit une ellipse dont l'un des foyers S est occupé par le soleil. Soit F' l'autre foyer et soit q' la perpendiculaire F'C abaissée de ce foyer sur la tangente en un point M, q étant la perpendiculaire abaissée du foyer S, on sait que

$$qq'=b^2,$$

b désignant le demi petit axe de l'ellipse. La relation

$$v=\frac{k}{q}$$

peut donc s'écrire

$$v=\frac{kq'}{b^2}.$$

Considérons un point M' infiniment voisin du point M, et sur les tangentes en M et M' portons à partir de leur intersection I les longueurs IA et IB respectivement égales aux vitesses en M et M' :

$$IA = \frac{k}{b^2} F'C,$$

$$IB = \frac{k}{b^2} F'D,$$

F'D étant la perpendiculaire abaissée de F' sur la tangente M'B

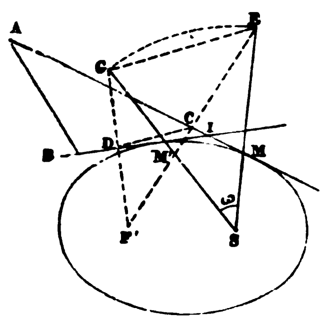


Fig. 159

AB est la variation de la vitesse pendant le temps dt, et $\frac{AB}{dt}$ est l'accélération dont il faut trouver la grandeur.

Les deux triangles IAB et F'CD sont semblables, comme ayant un angle égal $(I = F')$ compris entre côtés proportionnels $\left(\frac{IA}{F'C} = \frac{IB}{F'D} = \frac{k}{b^2}\right)$; on a donc

$$AB = \frac{k}{b^2} CD.$$

Prolongeons les perpendiculaires F'C et F'D de longueurs CE, DG respectivement égales à elles-mêmes, les rayons vecteurs SM et SM' prolongés passent en E et G et l'on a $SE = SG = 2a$, a étant le demi-grand axe de l'ellipse,

$$AB = \frac{k}{b^2} \frac{GE}{2},$$

ou, si l'on désigne par ω l'angle infiniment petit MSM', et si l'on remarque que dans le triangle infinitésimal GES le côté $GE = 2a\omega$,

$$AB = \frac{k}{b^2} a\omega.$$

Mais, d'après la loi des aires, l'aire infinitésimale MSM' ou $\frac{1}{2} r^2\omega$

(r étant le rayon vecteur SM) est égale à $\frac{k}{2}dt$. On a donc

$$AB = \frac{k}{b^2}a\frac{kdt}{r^2};$$

par suite l'accélération cherchée est

$$\gamma = \frac{AB}{dt} = \frac{k^2a}{b^2}\cdot\frac{1}{r^2},$$

ou, si l'on pose $\frac{k^2a}{b^2} = \mu$,

$$\gamma = \frac{\mu}{r^2};$$

et la force F sollicitant la planète de masse m est

$$F = m\gamma = \frac{m\mu}{r^2}:$$

elle est en raison inverse du carré de la distance de la planète au soleil.

De la troisième loi de Képler il résulte que, à la même distance. la force agissant sur l'unité de masse des diverses planètes serait la même. En effet, l'ellipse entière dont l'aire est πab étant parcourue pendant la durée T d'une révolution, l'aire parcourue dans l'unité de temps est

$$\frac{k}{2} = \frac{\pi ab}{T};$$

on a donc

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Or, d'après la troisième loi, le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ est invariable; donc μ est une constante identique pour toutes les planètes, en d'autres termes, le soleil attirerait également l'unité de masse d'une planète quelconque à la même distance.

En résumé, tout se passe comme si le soleil attirait chaque planète proportionnellement à sa masse et en raison inverse du carré de sa distance au centre du soleil.

Hypothèse de Newton. — Ayant ainsi formulé sa loi sans aucune hypothèse, Newton a ensuite supposé que d'une manière générale deux points matériels m et m' s'attiraient l'un l'autre proportionnellement au produit de leurs masses et en raison inverse du carré de leur distance : la force qui sollicite chacun de ces points suivant la droite qui les unit est donc

$$\frac{fmm'}{r^2},$$

f désignant une constante, l'attraction mutuelle de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance. Cette hypothèse a rendu merveilleusement compte jusqu'à ce jour des mouvements des corps célestes, mais elle est demeurée stérile en ce qui concerne les phénomènes moléculaires.

102. Identité de la pesanteur et de l'attraction universelle. — Restant dans le domaine où la loi de l'attraction newtonienne est pleinement vérifiée, reportons notre attention sur les phénomènes de la pesanteur. Il est naturel de regarder la pesanteur à la surface de la terre comme la résultante des attractions de toutes les molécules du globe terrestre sur les molécules des corps placés à sa surface; en d'autres termes, il est naturel de voir dans la pesanteur un cas particulier de l'attraction universelle. Examinons s'il en est bien réellement ainsi.

A cet effet, cherchons d'abord l'*action d'une couche sphérique infiniment mince sur un point*. Newton a résolu le premier cette question, mais par une voie détournée; nous suivrons la méthode indiquée plus tard par Maupertuis.

Soit m la masse du point. Calculons l'attraction qu'exerce la zone engendrée par l'arc compris entre deux rayons infiniment voisins CM et CN. Soient $R = CM$ le rayon de la couche, $dR = MP$ son épaisseur infiniment petite; si nous supposons la zone partagée en éléments infiniment petits, chaque élément exerce une attrac-

tion dirigée suivant la droite qui le joint au point m et égale

$$\frac{fmm'}{u^2},$$

m' étant la masse de l'élément et u sa distance Mm au point m. Cette force peut se décomposer en deux, l'une dirigée suivant Cm, l'autre perpendiculaire à cette ligne. La première seule est à considérer, et l'attraction de la zone entière sera la somme des composantes suivant Cm de toutes ces attractions élémentaires : elle sera donc

$$\frac{fmM'}{u^2}\cos\psi,$$

M' étant la masse de la zone et ψ l'angle du rayon vecteur mM avec Cm. Or, d'après le théorème de Guldin, le volume de la zone est

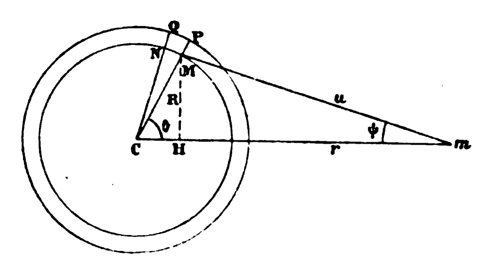


Fig. 160

égal à l'aire du rectangle MNPQ multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité quand on le fait tourner autour de l'axe Cm, c'est-à-dire égal à

$$R\,d\theta.\,dR.\,2\pi R\sin\theta,$$

θ désignant l'angle au centre MCm. L'attraction de la zone sur le point M est donc, ρ désignant la densité de la sphère,

$$\frac{fm\rho 2\pi R^2 dR \sin\theta\, d\theta}{u^2}\cos\psi;$$

l l'action exercée par la sphère entière est

$$A = fm\rho 2\pi R^2 dR \int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{u^2} \cos\psi.$$

On fera l'intégration très facilement en prenant u pour variable. Posons $Cm = r$,

$$u^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta;$$

et différentions,

$$udu = Rr\sin\theta\, d\theta,$$

d'où

$$\sin\theta\, d\theta = \frac{udu}{Rr}.$$

D'autre part,

$$\cos\psi = \frac{Hm}{u} = \frac{r - R\cos\theta}{u} = \frac{r^2 - R^2 + u^2}{2ru}.$$

On a donc

$$\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{u^2}\cos\psi = \frac{1}{2Rr^2}\int \frac{du}{u^2}(r^2 - R^2 + u^2)$$

$$= \frac{1}{2Rr^2}\left\{(r^2 - R^2)\int \frac{du}{u^2} + \int du\right\},$$

expression dont l'intégrale indéfinie est

$$\frac{1}{2Rr^2}\left\{-\frac{r^2 - R^2}{u} + u + C''\right\}.$$

Pour les limites, il faut distinguer deux cas :

1° *Le point m est extérieur.*

θ variant de o à π, u varie de $r - R$ à $r + R$, l'intégrale définie est $\frac{1}{2Rr^2}4R$; par suite,

$$A = \frac{fm\rho 4\pi R^2 dR}{r^2},$$

c'est-à-dire que l'attraction A exercée par la couche sur le point ex-

térieur m est la même que si la masse $\rho 4\pi R^2 dR$ de la couche était concentrée au point C : l'attraction d'une couche sphérique homogène infiniment mince sur un point extérieur est la même que si la masse de la couche était concentrée en son centre. On en conclut immédiatement que l'attraction d'une sphère homogène, ou formée de couches concentriques homogènes, sur un point extérieur, est la même que si toute la masse de la sphère était concentrée en son centre.

2° *Le point m est intérieur.* Les limites sont alors $R - r$ et $R + r$; l'intégrale définie est nulle,

$$A = 0:$$

l'action d'une couche sphérique homogène infiniment mince sur un point intérieur est nulle.

Cette proposition peut s'établir directement par un procédé très simple, dû à M. Chasles et susceptible de s'appliquer à une couche homogène infiniment mince, comprise entre deux ellipsoïdes homothétiques. Soient une telle couche et un point m intérieur à la couche. Découpons l'espace par une infinité de cônes ou de pyramides dont le sommet commun soit le point m, chaque cône ayant une ouverture infiniment petite; considérons les deux volumes infiniment petits découpés dans la couche par l'un de ces cônes : nous pouvons les regarder comme des prismes ayant pour hauteurs respectives les portions d'arêtes égales interceptées entre les deux surfaces homothétiques et pour bases les surfaces ω et ω' découpées sur la surface extérieure; les deux volumes élémentaires sont donc $h\omega$ et $h\omega'$, et les attractions qu'ils exercent en sens contraire sur le point m sont

$$\frac{fm\rho h\omega}{u^2} \quad \text{et} \quad \frac{fm\rho h\omega'}{u'^2}.$$

Mais $\frac{\omega}{u^2} = \frac{\omega'}{u'^2}$; ces attractions opposées se détruisent donc. On comprend ainsi pourquoi la résultante totale est nulle.

L'attraction d'une couche sphérique d'épaisseur finie, homogène ou formée de couches concentriques homogènes, sur un point intérieur est donc nulle.

Cela posé, il est facile de voir que *la pesanteur n'est qu'un cas particulier de l'attraction universelle*. En effet,

1° D'après le théorème précédent, l'attraction de la terre, supposée sphérique, sur un point extérieur, est la même que si toute la masse de la terre était concentrée en son centre. On sait effectivement qu'en un point quelconque du globe la direction de la pesanteur est normale à la surface des eaux tranquilles et par conséquent dirigée vers le centre de la terre.

2° L'accélération communiquée par l'attraction à des corps de masse différente est la même à une même distance du centre de la terre. On sait précisément qu'à la surface de la terre tous les corps tombent également vite sous l'action de la pesanteur.

3° A des distances différentes, l'attraction exercée par la terre sur une masse extérieure est en raison inverse du carré de la distance. Comparons, en effet, ainsi que l'a fait Newton, l'accélération du mouvement de la lune à l'accélération d'un corps qui tombe à la surface de la terre ; et, pour suivre Newton dans cette épreuve qu'il tenta dès qu'il fut en possession de la loi de l'attraction, considérons le mouvement de la lune autour de la terre comme circulaire et uniforme : supposons que la lune décrive autour de la terre un cercle de $60 \times 6\,360\,000$ mètres de rayon avec une vitesse de 1020 mètres par seconde; l'accélération de ce mouvement est $\gamma = \frac{1\,020^2}{60 \times 6\,360\,000} = 0{,}002\,72$. Si la loi de l'attraction universelle est vraie, si la même cause produit la chute d'une pomme à la surface de la terre et le mouvement de la lune à une distance de notre globe égale à 60 rayons terrestres, cette accélération γ doit être 60^2 ou 3600 fois plus petite que l'accélération $g = 9^{m},8$ à la surface de la terre; ce qui est en effet.

Le même calcul peut se faire aisément dans l'hypothèse plus exacte, bien qu'encore insuffisante [1], du mouvement elliptique. L'attraction de la terre sur la lune produit alors une accélération

$$\gamma = \frac{\mu}{r^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2 r^2},$$

[1] Le calcul exact ne saurait trouver place ici.

a étant le demi-grand axe de l'orbite de la lune autour de la terre. T la durée d'une révolution et r le rayon vecteur. Mais cette accélération γ doit être égale à $g\frac{l^2}{r^2}$, l étant le rayon terrestre ; on doit donc avoir

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{a^3}{l^2}.$$

Si l'on effectue les calculs après avoir remplacé a, l et T par leurs valeurs, on trouve pour g un nombre qui ne diffère pas sensiblement de celui que donnent les mesures faites à la surface de la terre.

103. Variations de g à la surface du globe. — L'identité de la pesanteur et de l'attraction universelle étant établie, nous pouvons prévoir les variations de g à l'extérieur et à l'intérieur du globe.

Variation avec l'altitude. — Considérant d'abord les variations de g à l'extérieur du globe, cherchons la variation de g avec l'altitude en un lieu donné. Soient g l'accélération en un point du globe au niveau de la mer, g_1 l'accélération au même point à l'altitude h, R étant le rayon de la terre regardée comme sphérique [1], on a, en supposant le point isolé,

$$\frac{g_1}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2},$$

ou

$$\frac{g_1}{g} = \frac{1}{\left(1+\frac{h}{R}\right)^2};$$

mais à la surface du globe $\frac{h}{R}$ est toujours très petit [2], on peut donc négliger le terme en $\frac{h^2}{R^2}$ et écrire

$$\frac{g_1}{g} = \frac{1}{1+\frac{2h}{R}},$$

[1] Le raisonnement s'étend aisément au cas de la forme elliptique (voir Résal, *Mécanique céleste*, Attraction des sphéroïdes).

[2] Si l'on prend pour R le rayon moyen 6 370 260^m, $\frac{1}{R} = 0,00000017$.

l, au même degré d'approximation.

$$g_1 = g\left(1 - \frac{2h}{R}\right),$$

'est-à-dire

$$g_1 = g(1 - 0,000\,000\,314\,h).$$

Si le point est sur un plateau étendu, en ayant égard à l'attraction additionnelle de ce plateau et en supposant la densité du terrain égale à la moitié de la densité de la terre entière, on a

$$g_1 = g\left(\frac{\frac{8}{5}R}{\frac{8}{5}R + h}\right)^2,$$

ou

$$g_1 = g\left(1 - \frac{5h}{4R}\right),$$

c'est-à-dire

$$g_1 = g(1 - 0,000\,000\,196\,h).$$

Telle est la formule qui sert à ramener au niveau de la mer les observations de g, faites sur un terrain étendu à une altitude connue h ([1]).

Variation avec la latitude. — Considérée en différents points du globe, la valeur de g doit varier avec la latitude pour deux causes :

1° La force centrifuge due au mouvement de rotation de la terre autour de son axe (52).

2° L'aplatissement de la terre aux pôles, d'où résultent deux effets inverses : une diminution de l'attraction sur un point voisin de l'équateur par suite de sa plus grande distance au centre de la terre, un accroissement de l'attraction sur le même point par suite de la présence du bourrelet équatorial.

La cause la plus importante, signalée pour la première fois par

([1]) Voir FAYE, C. R., XC, 1443; 1880.

Huyghens, est la force centrifuge. A l'équateur, la force centrifu
est dirigée en sens contraire de l'attraction du globe terrestre :

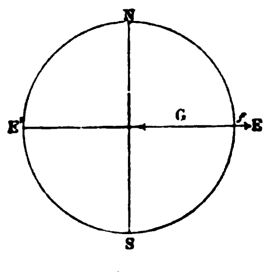


Fig. 161

pesanteur g_0 est la différence entre l'attraction G et la force centrifuge f. Or

$$f = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{2\pi . 40\,000\,000}{(86\,164)^2} = 0^m,03368 ;$$

donc

$$g_0 = G - 0^m,03368. \tag{1}$$

A l'équateur, l'observation du pendule donne [1]

$$g_0 = 9^m,7807.$$

Mais

$$\frac{0,03368}{9,7807} = \frac{1}{289} \text{ à très peu près :}$$

ainsi, à l'équateur la force centrifuge est le $\frac{1}{289}$ de la pesanteur, ou très approximativement [2] le $\frac{1}{289}$ de l'attraction,

$$g_0 = G\left(1 - \frac{1}{289}\right) ; \tag{2}$$

et comme $289 = 17^2$, on en conclut que si la terre tournait 17 fois

[1] Broch, *Accélération due à la pesanteur sous différentes latitudes et à différentes altitudes* dans *Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures*, I, A. Paris, Gauthier-Villars, 1881.

[2] Si $\frac{f}{g} = \frac{1}{289}$, $\frac{f}{G} = \frac{1}{290}$, la différence est insensible.

plus vite, la pesanteur sensible à l'équateur serait nulle. Pour une vitesse plus grande, la force centrifuge l'emporterait sur l'attraction : les corps situés à l'équateur seraient lancés hors de la terre.

Mais dans les conditions actuelles la force centrifuge ne diminue la pesanteur à l'équateur, où la diminution est maximum, que de la quantité très petite $\frac{1}{289}$. Pour les autres points du globe nous pourrons donc calculer son influence avec une approximation suffisante en supposant la terre sphérique. Dans cette hypothèse, l'unité de

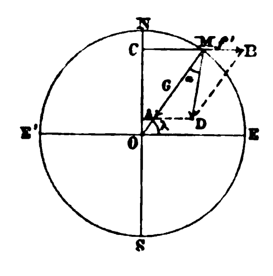


Fig. 162

masse M, située à la latitude géocentrique λ, est sollicitée par l'attraction MA = G dirigée suivant le rayon MO et par la force centrifuge MB dirigée suivant le rayon CM du cercle décrit par le point M et égale à

$$f' = \frac{4\pi^2 R \cos\lambda}{T^2} = f \cos\lambda.$$

La pesanteur sensible g_λ est la résultante MD de ces deux forces. C'est elle qui produit le *poids ;* d'après cela, nous nommerons poids d'un corps la force capable de lui communiquer l'accélération sensible g_λ et nous rappellerons que, le poids étant la résultante de l'attraction et de la force centrifuge, il n'y a pas autrement à se préoccuper de cette dernière dans toutes les questions d'équilibre. La verticale MD du lieu ne passe plus par le centre de la terre et, puisque la surface des eaux tranquilles est nécessairement normale en chaque point à la verticale MD, on conçoit que la forme sphérique qui conviendrait à l'équilibre d'une masse en repos ne convient pas à la terre animée d'un mouvement de rotation ;

on s'explique que notre globe ait pris la forme d'un ellipsoïde révolution aplati comme une lentille. La latitude géographiq du point M est l'angle λ' que fait la verticale MD du lieu av l'équateur EE' : MB étant très petit, cet angle diffère à peine la latitude géocentrique λ.

Cherchons la valeur de $MD = g_\lambda$. Dans le triangle MDA, on a

$$g_\lambda = \sqrt{G^2 + f^2\cos^2\lambda - 2Gf\cos^2\lambda}$$
$$= G\left(1 - 2\frac{f}{G}\cos^2\lambda + \frac{f^2}{G^2}\cos^2\lambda\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou, en négligeant le carré et les puissances supérieures de la quantité très petite $\frac{f}{G} = \frac{1}{289}$,

$$g_\lambda = G\left(1 - \frac{1}{289}\cos^2\lambda\right).$$

Mais

$$g_0 = G\left(1 - \frac{1}{289}\right);$$

on a donc

$$g_\lambda = g_0\left(1 + \frac{1}{289}\sin^2\lambda\right). \tag{3}$$

Quant à l'angle α que la verticale MD fait avec le rayon MO, on l'obtient aisément en écrivant que dans le triangle MAD

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\lambda} = \frac{AD}{MD} = \frac{f\cos\lambda}{g};$$

d'où l'on tire $\sin\alpha$ ou, comme l'angle est toujours très petit,

$$\alpha = \frac{f}{g}\sin\lambda\cos\lambda,$$

ou encore

$$\alpha = \frac{1}{2.289}\sin 2\lambda,$$

enfin

$$\alpha = \frac{1}{578} \sin 2\lambda: \tag{4}$$

est nul à l'équateur et au pôle, maximum à la latitude de 45° : sa valeur est alors 0° 11′ 30″ ; la latitude géographique λ′ étant 45°, la latitude géocentrique λ = 44° 48′ 30″.

L'aplatissement de la terre, c'est-à-dire sa figure très voisine d'un ellipsoïde de révolution aplati, fait encore décroître g de l'équateur au pôle. Ce décroissement est la différence des deux effets de signe contraire que nous avons signalés plus haut, et il est remarquable que chacun d'eux s'exprime encore par un terme en $\sin^2\lambda$, comme s'est déjà traduit l'effet de la force centrifuge [1]. Ainsi, la variation de g avec la latitude est la somme de trois termes en $\sin^2\lambda$; elle peut donc être représentée par un seul terme en $\sin^2\lambda$, de sorte que l'on a finalement

$$g_\lambda = g_0 \left(1 + \frac{1}{193} \sin^2\lambda\right), \tag{5}$$

$\frac{1}{193}$ ou 0,00519 étant la somme algébrique des trois coefficients de $\sin^2\lambda$ dans les trois termes en question. Le coefficient de $\sin^2\lambda$ différant très peu de 0,005, on voit que le *poids absolu* de 1 kilogramme augmente à très peu près de 5 grammes de l'équateur au pôle. On peut encore écrire la formule

$$g_\lambda = 9^{m},7807 + 0,0508 \sin^2\lambda. \tag{5 bis}$$

Les mêmes résultats peuvent s'exprimer au moyen de la longueur $L = \frac{g}{\pi^2}$ du pendule qui bat la seconde. On a encore

$$L_\lambda = L_0 \left(1 + \frac{1}{193} \sin^2\lambda\right), \tag{6}$$

[1] L'influence du renflement équatorial, au point de vue de l'accroissement qu'il apporte à la distance des corps au centre de la terre, se détermine facilement au moyen des propriétés bien connues de l'ellipse. L'accroissement d'attraction produit par le même renflement est un peu plus difficile à calculer.

ou

$$(6\ bis)\qquad L_\lambda = 0^m,99100 + 0,00514 \sin^2\lambda :$$

la longueur du pendule à secondes varie d'environ 5 millimètres pôle à l'équateur (13).

En rapportant les choses au parallèle de 45°, on a, par des transformations évidentes,

$$(7)\qquad g_\lambda = g_{45}\left(1 - \frac{1}{386}\cos 2\lambda\right),$$

ou

$$(7\ bis)\qquad g_\lambda = 9^m,8061\,(1 - 0,00259 \cos 2\lambda),$$

et de même

$$(8)\qquad L_\lambda = 0^m,99357\,(1 - 0,00259 \cos 2\lambda).$$

C'est à Clairaut que l'on doit le calcul exact de l'effet de l'aplatissement. Rappelons que cet aplatissement μ s'évalue par l'excentricité $\frac{a-b}{a}$ de l'ellipse méridienne. D'après l'ensemble des mesures géodésiques, μ est très voisin de $\frac{1}{300}$. En calculant l'attraction d'un sphéroïde formé de couches concentriques homogènes, d'excentricités et de densités quelconques, sur un point extérieur, et en exprimant que la surface du sphéroïde supposé originellement fluide est en équilibre, Clairaut trouve

$$(9)\qquad \frac{g_{90} - g_0}{g_0} + \mu = \frac{5}{2}q,$$

q étant le rapport $\frac{f}{g_0}$ de la force centrifuge à la pesanteur sous l'équateur.

Cette équation permet de calculer $\frac{g_{90} - g_0}{g_0}$ si l'on connaît μ.

Inversement, elle donne le moyen de trouver l'aplatissement de la terre si l'on a déterminé g à diverses latitudes. On voit ainsi comment la mesure de la longueur du pendule qui bat la seconde peut remplacer les opérations géodésiques les plus compliquées pour évaluer l'aplatissement, et l'on comprend tout l'intérêt qu'il y

ait à mesurer exactement cette petite longueur d'environ 5 millètres qui marque la différence des pendules battant la seconde pôle et à l'équateur.

En résumé, si l'on réunit les deux corrections, on a pour la valeur, g au point (λ, h) isolé à la surface de la terre, en unités C.G.S.,

$$g_{\lambda,h} = 980,61\ (1 - 0,00259 \cos 2\lambda)\ (1 - 0,000\,000\,003\,14\, h),$$

$$g_{\lambda,h} = 980,61 - 2,539 \cos 2\lambda - 0,000\,003\, h; \qquad (10)$$

la longueur du pendule qui bat la seconde au même lieu est

$$l_{\lambda,h} = 99,357 - 0,2573 \cos 2\lambda - 0,000\,000\,3\, h. \qquad (11)$$

104. Variation de g à l'intérieur de la terre. — Si l'on uppose la terre homogène, la variation de g à l'intérieur du globe évalue très aisément. Regardant toujours la terre comme sphéique, nous savons que, si par le point intérieur M nous décrivons une sphère concentrique à la surface, l'action de la couche sphé-

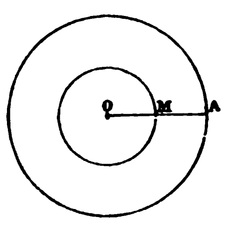


Fig. 163

rique MA sur le point intérieur M est nulle. L'action de la terre se réduit à l'action du noyau OM, lequel agit comme si sa masse était concentrée au point O. Si donc nous posons $OM = r$ et si nous représentons la densité de la terre par D, la pesanteur g', c'est-à-dire l'attraction sur l'unité de masse en M, sera

$$g' = \frac{f \frac{4}{3} \pi r^3 D}{r^2} = \frac{4}{3} f \pi D \times r.$$

L'attraction serait proportionnelle à la distance au centre. Un mobile abandonné à l'orifice d'un puits traversant la terre d'outre en

outre, exécuterait de part et d'autre du centre de la terre des oscillations isochrones, conformément à la loi du pendule dans le cas des petites oscillations.

Mais la terre est loin d'être homogène : la densité des couches profondes est de beaucoup supérieure à celle des matériaux de la surface (105). En admettant toujours, ce qui doit être sensiblement vrai, que la terre est formée de couches concentriques homogènes, mais en considérant la densité de ces couches comme diminuant du centre à la surface suivant un terme proportionnel au carré de la distance au centre, M. Roche trouve

$$g' = g.1,92r\left(1 - \frac{12}{25}r^2\right):$$

la pesanteur augmente jusqu'au $\frac{1}{6}$ du rayon où elle est environ $\frac{16}{15}g$; à partir de là elle décroît, et redevient égale à g vers le $\frac{1}{3}$ du rayon.

Les mines les plus profondes ne descendent guère au delà d'un kilomètre. L'observation ne saurait donc donner des vérifications de cette formule. On a cependant pu reconnaître une augmentation de g avec la profondeur : aux mines de houille de Horton, en Cornouailles, Airy [1] a observé un accroissement de g de $\frac{1}{19\,200}$ pour une profondeur de 383 mètres, nombre presque identique à celui qui ressortirait de la formule de M. Roche.

105. Mesure de la densité de la terre. — *Par les oscillations d'un pendule placé successivement à la surface et au fond d'un puits de mine.* — L'observation d'Airy avait pour but l'importante détermination de la densité moyenne D de la terre. Si en effet on remarque qu'au fond de la mine le pendule est seulement soumis à l'action du noyau intérieur de rayon r et de densité D, tandis qu'à la surface il subit à la fois l'action du noyau et l'attraction de la couche sphérique d'épaisseur h et de densité d comprise entre le fond de la mine et la surface, on voit immédiatement que si l'on connaît cette densité d (et elle sera toujours mesurable assez approxima-

(1) AIRY, *Phil. Trans.*; 1866.

vement), du rapport des valeurs de la pesanteur, g à la surface et au fond, on pourra déduire D. L'attraction exercée sur l'unité de masse à la surface par le noyau et par la couche extérieure étant la même que si la masse du noyau $\frac{4}{3}\pi r^3 D$ et celle de la couche $\frac{4}{3}\pi \{(r+h)^3 - r^3\} d$ étaient transportées au centre, à la distance $r+h$ de la surface,

$$g = f\frac{\frac{4}{3}\pi\{r^3 D + [(r+h)^3 - r^3]d\}}{(r+h)^2}$$

$$= f\frac{4}{3}\pi\left[\frac{r(D-d)}{\left(1+\frac{h}{r}\right)^2} + (r+h)d\right],$$

ou, si l'on néglige le carré et les puissances supérieures de $\frac{h}{r}$ et si l'on prend par conséquent $\frac{1}{\left(1+\frac{h}{r}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{2h}{r}} = 1 - \frac{2h}{r}$,

$$g = f\frac{4}{3}\pi[(r-2h)(D-d) + (r+h)d]$$

$$= f\frac{4}{3}\pi[(r-2h)D + 3hd].$$

Au fond de la mine

$$g' = \frac{f\frac{4}{3}\pi r^3 D}{r^2}$$

$$= f\frac{4}{3}\pi r D.$$

On a donc

$$\frac{g}{g'} = \frac{1}{r}\left[(r-2h) + 3h\frac{d}{D}\right];$$

d'où

$$\frac{D}{d} = \frac{1}{\frac{2}{3} - \left(1 - \frac{g}{g'}\right)\frac{r}{3h}}.$$

En étudiant les terrains au voisinage de la mine, terrains dont l'influence est évidemment prédominante dans l'action exercée sur

le pendule extérieur par la couche h, Airy trouva que leur poi spécifique moyen [1] était $d=2{,}5$. Pour avoir $\frac{g}{g}$, on faisait oscil un même pendule à la surface du sol d'abord, puis au fond de mine, et on comptait par la méthode de Borda le nombre des osc lations effectuées dans un temps donné. Il est clair toutefois q l'on ne pouvait descendre dans la mine l'horloge qui aurait affectée exactement de la même avance que le pendule : tournait aisément la difficulté en laissant l'horloge à la surfa et en lui faisant commander électriquement une deuxième ho loge placée au fond de la mine. On reconnut ainsi qu'à la stati inférieure le pendule avançait en 24 heures de $2\frac{1}{4}$ secondes sur pendule à la surface.

On a donc

$$\frac{g}{g'}=\left(\frac{86400}{86402{,}25}\right)^2$$

et par suite, très approximativement,

$$1-\frac{g}{g'}=\frac{2.\ 2{,}25}{86402{,}25}=\frac{1}{19200}.$$

On avait d'ailleurs $\frac{r}{h}=16000$.

Si l'on porte ces diverses valeurs dans la formule, il vient

$$D=6.57.$$

Par la déviation du fil à plomb sous l'influence d'une montagne Une deuxième manière d'obtenir D repose encore sur la comparaison de l'attraction exercée par une portion déterminée de la terre avec l'attraction produite par le reste du globe. Dans le voisinage d'une montagne, le fil à plomb est dévié sous l'influence de l'attraction de la montagne : le fait fut signalé pour la première fois

[1] La formule donnant le rapport $\frac{D}{d}$, on peut considérer D et d comme représentant des *poids spécifiques*.

Bouguer et La Condamine. Maskelyne [1] fit des mesures :ises et en déduisit une valeur approchée de la densité de la e. Il choisit le mont Sheallien en Écosse, montagne isolée, rant de l'est à l'ouest, dont la forme est simple et la constion géologique bien définie : on en connaît donc le poids le centre de gravité. Dans un plan méridien passant par ce tre de gravité, Maskelyne prit deux stations, A et B, que nous pposerons, pour simplifier, à la hauteur même et à distances les du centre de gravité. Si la montagne n'existait pas, en relent à chacune de ces stations la hauteur du pôle au-dessus de l'ho-

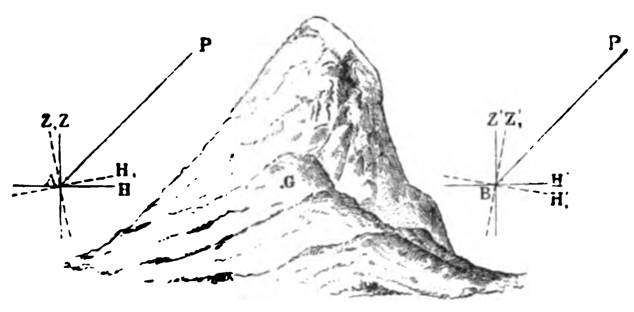


Fig. 164

rizon, on constaterait entre les deux hauteurs PBH' et PAH une différence égale à la différence des latitudes géographiques $\lambda'-\lambda$ des deux stations. Mais par attraction la montagne incline vers elle les verticales AZ, BZ' et les amène en AZ_1, BZ'_1; la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon en A est donc réduite à PAH_1, en B elle est augmentée et devient PBH'_1, la différence de ces deux hauteurs est dès lors

$$PBH'_1 - PAH_1 = \lambda' - \lambda + \varepsilon.$$

L'observation donne directement PBH'_1 et PAH_1; λ' et λ sont connus; ε est donc par là même déterminé (Maskelyne trouva $\varepsilon = 11'',66$).

Soient maintenant, en A, $A\zeta$ la position qu'aurait le fil à plomb si la montagne n'existait pas, $A\zeta_1$ la position qu'il occupe en réalité :

[1] Maskelyne, *Phil. Trans.*; 1775 et 1778.

cette ligne $A\zeta_1$ est la direction de la résultante des forces qui ag

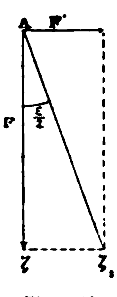


Fig. 165

sent sur l'unité de masse placée en A, l'attraction F de la terre l'attraction F′ de la montagne. Par conséquent, on a

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{F'}{F}=\frac{\frac{fm}{r^2}}{\frac{fM}{R^2}},$$

M étant la masse de la terre de rayon R et m la masse de la mon tagne agissant à la distance $AG=r$. Remplaçons M par $\frac{4}{3}\pi R^3 D$, m par la masse Vd de la montagne ; il vient

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{Vd}{\frac{4}{3}\pi R r^2 D},$$

d'où l'on déduira $\frac{D}{d}$ et par suite D. V et d étant forcément un pe incertains, on ne saurait obtenir ainsi qu'une valeur approch de D. Maskelyne trouva $D=5$ environ.

Par la mesure directe de l'attraction produite par une masse donné

Expérience de Cavendish.

Une expérience célèbre imaginée par Michell et exécutée p Cavendish (¹) conduit à l'évaluation de la densité de la terre par u

(¹) Cavendish, *Phil. Trans.*, LXXXXIII, 388; 1798.

oisième méthode, la mesure de l'attraction qu'exercent l'un sur autre deux corps situés à la surface du globe.

Soit une boule métallique de masse m' ayant son centre c' à la istance a du centre c d'une deuxième boule homogène m. L'action

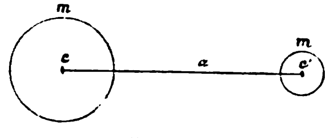


Fig. 166

de la boule m sur chacun des points de la boule m' et par conséquent sur cette boule entière est la même que si la masse totale de la boule m était concentrée en son centre c. Mais cette action de m sur m' est égale et contraire à l'action de m' sur m, laquelle est aussi la même que si toute la masse de m' était concentrée en son centre c'. L'action réciproque des deux boules est donc la même que si leurs masses m et m' étaient respectivement concentrées en c et c', c'est-à-dire égale à

$$F = \frac{fmm'}{a^2}.$$

D'autre part, l'action de la terre sur la boule m' est

$$m'g = \frac{fMm'}{R^2},$$

M étant la masse de la terre et R son rayon. On a donc

$$\frac{F}{m'g} = \frac{mR^2}{Ma^2}, \qquad (1)$$

équation qui permettra de calculer la masse M et par suite la densité D, si l'on réussit à mesurer F.

Pour mesurer cette force extrêmement petite [1], on lui fait équi-

[1] L'équation (1) peut s'écrire (voir plus bas équations (4) et (6))

$$\frac{F}{m'g} = \frac{r^3d}{a^2RD},$$

le deuxième membre est toujours très petit ; il valait 0,000 000 02 environ dans

cette ligne $A\zeta_1$ est la direction

…que très long et très fin. On s…
…de Coulomb (1), que la tors…
…de très faible, dont le moment…
…sion, de sorte que, si l'on a mes…
…couple de torsion pour un angle…
…ent du couple correspondant à…

sent sur l'unité de ma…
l'attraction F′ de la m…

M étant la mass…
tagne agissant…
m par la mas…

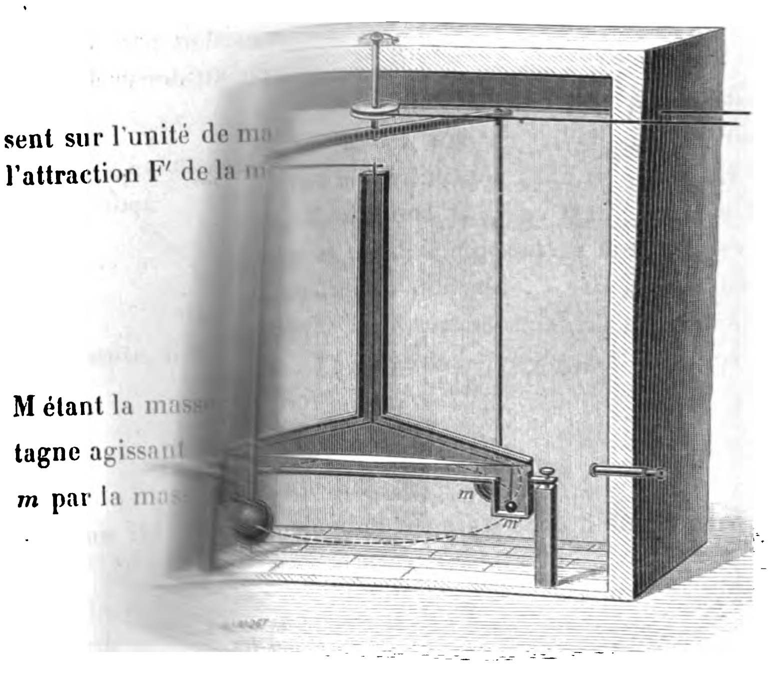


Fig. 167

d'où
incerta…
de D. M…

…que est immédiatement connu. Dans l'appareil de… le fil métallique était un fil d'argent très fin, fixé en… un petit treuil que l'on pouvait manœuvrer de l'exté… portant à sa partie inférieure un levier horizontal très léger, en sapin, aux deux extrémités duquel étaient at-

Par…

C… de Cavendish, F était donc seulement cette fraction du poids

(1) … *Mémoires de l'Académie des sciences*; 1784. Voir plus loin au cha… …sticité des corps solides.

·' et m' pesant 730 grammes
· on pouvait amener deux
; ·sant respectivement 158 kilo-
·ils reliés à une poutre que l'on
. l'aide d'un système de cordes et
·.et de pénétrer dans la chambre
.a balance même (fil vertical, levier et
. ans une cage en acajou présentant deux
. ·ules pour permettre d'en lire les déplace-
:·· grosses sphères. A cet effet, une petite règle
de divisions équidistantes, était fixée à chaque
vier, et on l'observait à distance au moyen d'une
· dans le mur de la pièce. Toutes ces précautions sont
..: les, le moindre courant d'air troublant complètement
·ares.

·nt tout il fallait déterminer le moment T du couple de tor-
du fil pour un angle égal à l'unité. Pour cela, on plaçait le
·me des sphères m à angle droit avec le levier de la balance : ans cette position, chacune des grosses sphères agissant égale-ment sur l'une et l'autre des petites boules ne produit aucun dé-placement. On écarte alors le levier de sa position d'équilibre : il oscille sous l'action de la force de torsion en exécutant des oscilla-tions isochrones dont on note la durée τ. Mais on a (88)

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{Q}{T}},$$

Q représentant le moment d'inertie du pendule horizontal. Or, le levier en sapin étant très léger, son moment d'inertie est négli-geable; d'autre part les boules sont petites et peuvent être consi-dérées, sans erreur sensible, comme des points matériels de masse m' situés à une distance l de l'axe, $2l$ désignant la longueur du levier; on a donc simplement $Q = 2m'l^2$ et par suite

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{2m'l^2}{T}};$$

d'où

$$T = \frac{2\pi^2 m' l^2}{\tau^2}, \qquad (2)$$

expression qui ne renferme plus que des quantités connues.

T étant ainsi déterminé, on amène les grosses sphères à une faibl distance A des petites boules de manière que les centres des quatr sphères soient exactement dans un même plan. Les petites boule sont attirées et se déplacent en tordant le fil : un nouvel équilibre ten à s'établir. Le levier oscille lentement de part et d'autre de sa positio d'équilibre et on ne saurait attendre qu'il s'arrête (dans l'appareil d Cavendish, les mires n'étaient jamais immobiles) : on lit donc l'écar

Fig. 168

extrême N à gauche, puis l'écart extrême P à droite, puis de nouveau l'écart extrême N' à gauche : le milieu de $PQ = \frac{PN + PN'}{2}$ marque la position d'équilibre. Soit n_1 le nombre de divisions séparant cette position de celle qu'occupait le levier quand il n'y avait pas attraction. On amène les grosses sphères dans une position symétrique par rapport à la position d'équilibre initial du levier : on fait une nouvelle lecture n_2. On prend la moyenne $\frac{n_1 + n_2}{2} = n$. Soit δ la grandeur d'une division, $n\delta$ est le déplacement et $\frac{n\delta}{l}$ l'angle de torsion ; par suite, le moment du couple de torsion est $T\frac{n\delta}{l}$. Le moment de l'attraction est $2\,Fl$, car la distance des boules $a = A - n\delta$ étant très petite, on peut regarder la force F comme perpendiculaire au bras de levier. On a donc

$$2Fl = T\frac{n\delta}{l}, \qquad (3)$$

équation qui détermine F.

Si l'on y introduit la valeur de T trouvée plus haut (2), il vient

$$F = \frac{\pi^2 m' n\delta}{\tau^2} \qquad (4)$$

, si l'on porte cette valeur dans l'équation (1), on a

$$\frac{\pi^2 n\delta}{g\tau^2} = \frac{mR^2}{Ma^2}, \tag{5}$$

[é]quation qui donnerait immédiatement le rapport de la masse M de [la] terre à la masse m de la grosse sphère de plomb.

Pour en déduire la densité D de la terre, remplaçons M par [$\frac{4}{3}$]$\pi R^3 D$ et de même m par $\frac{4}{3}\pi r^3 d$, r étant le rayon de la sphère de [p]lomb et d la densité du plomb,

$$\frac{\pi^2 n\delta}{g\tau^2} = \frac{r^3 d}{a^2 RD}; \tag{6}$$

[d]'où

$$D = \frac{g\tau^2 r^3 d}{\pi^2 n\delta a^2 R}.$$

Dans les expériences de Cavendish, on avait, en mesures anglaises :

$\frac{g}{\pi^2}$ = longueur du pendule battant la seconde = $39^{po},14$
δ = valeur d'une division de la mire . . . . $0\ ,0479$
r = rayon de la sphère de plomb. . . . . = 6
a = distance des deux sphères. . . . . = 8
R = rayon de la terre. . . . . = $21\,000\,000^{pi}$
d = densité du plomb . . . . = 11 ,5

Cavendish employa deux fils différents. Le premier, très fin, faisait une oscillation en 14 minutes et se tordait d'un angle correspondant à 16 divisions de la mire quand les grosses sphères agissaient ; on avait donc

$$\tau = \text{durée d'une oscillation} = 840^s$$
$$n\delta = \text{déplacement} = 16.\delta = 0^{po},765.$$

Avec le deuxième fil, plus gros, on avait

$$\tau = 7^m = 420^s$$
$$n\delta = 5,7.\delta = 0^{po},272.$$

Comme moyenne de ses expériences, au nombre de vingt-neu Cavendish trouva

$$D = 5,48.$$

Cette densité est de beaucoup supérieure à celle des matériaux la surface (eau et pierres dont la densité est généralement coi prise entre 2 et 3) : les régions intérieures de notre globe sont do beaucoup plus denses que les couches superficielles [1].

Mesures de Reich.

Quarante ans plus tard, Reich [2] fit de nouvelles mesures avec un balance bifilaire munie d'un miroir pour l'observation des angl par la méthode de Poggendorff (117) et installée dans les mines d Freiberg, afin d'éviter l'influence des changements de températur qui modifient complètement T. Une première série (1837) donn pour résultat 5,44 que Reich corrigea plus tard en l'élevant 5,49; une deuxième série (1849) lui fit admettre

$$D = 5,58.$$

Mesures de Baily.

Dans l'intervalle (1842), M. Baily [3], à la demande de la Société astronomique de Londres, recommença les expériences de Cavendish avec un appareil identique à celui même que Cavendish avait employé. Il opéra une longue série de mesures qui, bien qu'affectées d'une erreur systématique sur laquelle nous reviendrons, se recom-

(1) D'après M. Roche qui a repris les calculs de Legendre et de Laplace sur ce sujet, la densité δ à une distance d du centre évaluée en fonction du rayon pris pour unité est

$$\delta = 10,6\left(1 - \frac{4}{5}d^2\right);$$

d'après cette formule la densité moyenne à la surface serait 2,1 et au centre on aurait $\delta = 10,6$.

(2) Reich, *Abhandlungen d. math.-phys. Klasse d. Sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften*, I; 1852.

(3) Baily, *Astron. Soc. Mém.*, XIV; 1843; et *Annales de chimie et de physique* (3), V, 338; 1842.

mandent par le soin avec lequel elles ont été exécutées. La moyenne de plus de deux mille expériences fut

$$D = 5,67.$$

Mesures de MM. Cornu et Baille.

MM. Cornu et Baille (1) ont repris dernièrement ces mesures. Ils commencèrent par étudier d'une manière complète la balance de torsion. Ils reconnurent que la loi du décroissement des amplitudes des petites oscillations en progression géométrique se vérifie exactement, lorsqu'on s'est convenablement mis à l'abri de toute cause d'erreur. Il en résulte que la résistance de l'air est, dans des limites assez étendues, proportionnelle à la vitesse (86). Il en résulte aussi que « quand les causes perturbatrices accidentelles sont éliminées, les oscillations du levier sont d'une régularité telle que la loi de leur décroissement est précisément le criterium de la perfection des mesures. »

Les différences des élongations successives doivent décroître légèrement à chaque oscillation double, et la décroissance doit se répartir régulièrement aux deux extrémités de l'oscillation. Or, les observations de Baily fournissent précisément des différences très inégales aux deux extrémités de l'oscillation : la première dans l'ordre des temps est toujours beaucoup plus forte que la deuxième ; par suite la position d'équilibre est erronée, et la valeur de D que l'on en déduit est trop forte. Cela tient à ce que, aussitôt une série terminée, Baily (comme Reich) changeait de place les grosses boules et procédait immédiatement à une nouvelle série dans laquelle il prenait pour première élongation la dernière élongation de la série précédente; mais les trépidations et les chocs inévitables dans l'inversion des grosses boules exerçaient une action perturbatrice accusée par l'inégalité des différences aux deux extrémités de l'oscillation. Rejetant le premier nombre de chaque série de Baily, M. Cornu a vu cette différence disparaître, et en prenant au hasard dix séries, il a trouvé dix fois pour D un nombre inférieur à la valeur adoptée par Baily : la correction

(1) Cornu et Baille, C. R. LXX, 1337; 1870; LXXVI, 954; 1873; et LXXXVI, 699; 1878.

moyenne fut 0,116; si on l'appliquait à l'ensemble des mesures de Baily, on aurait $D=5,55$.

Les appareils de MM. Cornu et Baille sont établis dans une cave de l'École Polytechnique. Le levier de la balance de torsion est un petit tube d'aluminium de 50^{cm} de longueur [1] portant à ses deux extrémités deux boules de cuivre rouge pesant chacune 109^{gr}. Un miroir plan, fixé en son milieu, permet d'observer avec une lunette une échelle placée à $5^{m},60$. Le fil de torsion, en argent recuit, a $4^{m},15$ de hauteur et il était installé depuis plus d'une année lorsqu'on procéda aux premières mesures. La masse attirante est constituée par du mercure contenu dans quatre sphères creuses en fonte de 12^{cm} de diamètre : le mercure passe d'un couple de sphères dans l'autre par aspiration, ce qui évite complétement les trépidations. D'autre part, la nature métallique de toutes les pièces et leur communication avec le sol mettent entièrement à l'abri des perturbations électriques. Chaque oscillation est enregistrée électriquement sur toute son étendue. Les observations sont d'une régularité parfaite : ainsi, la durée d'une oscillation complète du levier reste fixe à 408^{s} depuis plusieurs années, à quelques dixièmes près. Les mesures se poursuivant encore actuellement, le résultat définitif n'est pas connu; mais on peut dès aujourd'hui tenir pour certain qu'il différera très peu de

$$D=5,50.$$

Telle est la valeur que nous admettrons pour la densité moyenne de la terre.

Valeur numérique de la constante de l'attraction. — En même temps que ces diverses expériences fournissent une preuve de l'universalité de l'attraction, elles permettent de fixer la valeur de la constante f qui représente l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance.

(1) On a tout avantage à réduire les dimensions de l'appareil. Si, en effet, on se reporte à la formule (5), on voit que dans des appareils géométriquement semblables, le temps d'oscillation du levier τ restant le même, la déviation $\frac{nl}{\delta}$ est indépendante du poids des boules suspendues m' et en raison inverse des dimensions homologues.

On a en effet

$$g = \frac{fM}{R^2} = \frac{f\frac{4}{3}\pi R^3 D}{R^2};$$

où l'on tire

$$f = \frac{3}{4}\frac{g}{\pi R D}.$$

Si l'on effectue le calcul en prenant pour unité le mètre et le gramme, on trouve

$$f = 0{,}000\,000\,000\,000\,658\ (^1);$$

ce qui fait en unités C.G.S., les dimensions de $f = \frac{R^2 g}{M}$ étant $L^3 M^{-1} T^{-2}$ (72),

$$f = 0{,}000\,000\,000\,000\,658 \times 100^3 .\ 9{,}81^{-1}$$
$$= 6{,}70 .\ 10^{-8}.$$

De la troisième loi de Képler on peut alors déduire immédiatement la valeur de la masse totale de deux corps réagissant l'un sur l'autre, d'après la connaissance de deux éléments de leur mouvement relatif, a et T; on a en effet (2)

$$f(m + m') = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

(1) $\frac{f}{g^2}$, quantité indépendante de g, est avec D = 5,50

$$\frac{f}{g^2} = 0{,}000\,000\,000\,000\,006\,836.$$

(2) Quand nous sommes remontés des lois de Képler à la loi de Newton, nous avons supposé le soleil immobile. Mais il n'en est pas réellement ainsi. Entre

S P

Fig. 169

le soleil S de masse m et la planète P de masse m' s'exerce suivant la ligne des centres une attraction $\frac{fmm'}{r^2}$ sollicitant également le soleil et la planète. Il en

et, en partant de la masse connue de la terre, on pourra déte
miner successivement la masse du soleil et celles de tous les cor
du système solaire (1).

C'est donc avec raison que l'on a appelé l'appareil de Cavendi
« une balance à peser le monde ».

106. Influence de la rotation de la terre sur la chut des corps. — Dans les questions d'équilibre à la surface de l terre, pour tenir compte du mouvement de rotation de la terre, suffit d'ajouter aux forces réelles la force centrifuge. Mais, quand i s'agit d'un mouvement à la surface du globe, il faut ajouter au forces vraies deux forces fictives, la force centrifuge et la force cen- trifuge composée (53).

La force centrifuge est comprise dans le poids, il n'y a donc plu à s'en occuper ; reste la force centrifuge composée.

Par un point O quelconque de la surface terrestre, menon trois axes coordonnés que nous supposerons entraînés par le mouvement de rotation de la terre. Prenons pour axes la méridienne Ox dirigée vers le nord, une perpendiculaire dans le plan horizontal Oy

résulte pour la planète une accélération $\gamma_1 = \frac{fm}{r^2}$ dirigée suivant PS et pour le soleil une accélération $\gamma_2 = \frac{fm'}{r^2}$ dirigée suivant SP. L'accélération du mouvement relatif de la planète autour du soleil est la somme de l'accélération γ_1 et d'une accélération égale et de sens contraire à γ_2 : c'est donc une accélération $\gamma = \frac{f(m+m')}{r^2}$ dirigée suivant PS. Si l'on pose $\gamma = \frac{\mu}{r^2}$, $\mu = f(m + m')$ et, comme on a toujours $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, il vient

$$f(m+m') = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Les planètes ayant des masses différentes, μ n'est pas identique pour toutes : le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ n'est pas une constante, comme le pensait Képler, mais il en diffère peu, m étant toujours très grand par rapport à m'.

(1) Tant que l'on ne connut pas f avec une précision suffisante, les astronomes ne purent que déterminer les rapports des masses des différents éléments du système solaire, soit par une double application de la formule précédente aux planètes ayant des satellites, soit par des calculs de perturbations. Mais aujourd'hui la valeur de f peut être regardée comme assez exactement fixée pour permettre le calcul des valeurs absolues des masses et par suite des densités de tous les corps du système solaire.

igée vers l'est, et la verticale Oz dirigée vers le bas. La rotation iforme de la terre autour de la ligne des pôles peut être regare comme la résultante d'une translation égale et parallèle au déicement du point O et d'une rotation égale à celle de la terre tour d'une parallèle OP_a à la ligne des pôles, parallèle située dans plan méridien xOz et inclinée sur l'horizon d'un angle égal à la titude λ. Remplaçons donc la rotation réelle par ses deux compontes : la translation est sans influence sur le mouvement relatif, la otation autour de OP_a est seule à considérer. Cette rotation s'effectuant de l'ouest à l'est, c'est-à-dire dans le sens négatif, devra

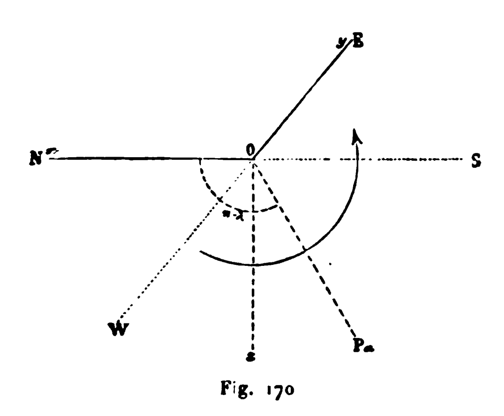


Fig. 170

être représentée, ainsi que nous l'avons déjà remarqué (28,2°), par une certaine longueur ω prise sur la partie australe OP_a de l'axe. La force centrifuge composée $2m\omega v \sin(\omega, v)$ est perpendiculaire au plan (ω, v) du côté opposé à celui où la rotation tend à entraîner ce plan. Si, par exemple, la vitesse v est située dans le plan méridien et par conséquent entraînée vers l'ouest, la force centrifuge composée sera dirigée vers l'est. Remarquons d'ailleurs que ω étant extrêmement petit, l'accélération centrifuge composée est en général très petite elle-même ; ainsi, pour une vitesse de 10 mètres par seconde, elle est moindre que 0,002 ; pour une vitesse de 500 mètres par seconde, elle est encore inférieure à 0,1. Habituellement donc elle est entièrement négligeable. Il est cependant possible par des mesures délicates de la mettre en évidence.

Cherchons ses composantes. On sait que la direction (α, β, γ) per-

pendiculaire aux deux directions (a, b, c), (a', b', c') est détermi
par les formules

$$\frac{\alpha}{bc'-cb'}=\frac{\beta}{ca'-ac'}=\frac{\gamma}{ab'-ba'}=\frac{\pm 1}{\sin A},$$

A étant l'angle des deux directions.

Ici, l'une des directions est OP_a, $a=-\cos\lambda$, $b=$
$c=\sin\lambda$; l'autre direction est celle de la vitesse, par su
$a'=\frac{\frac{dx}{dt}}{v}$, $b'=\frac{\frac{dy}{dt}}{v}$, $c'=\frac{\frac{dz}{dt}}{v}$; enfin c'est le signe + qui convient. On
donc

$$\alpha=\frac{-\sin\lambda\frac{dy}{dt}}{v\sin(\omega,v)},$$

$$\beta=\frac{\sin\lambda\frac{dx}{dt}+\cos\lambda\frac{dz}{dt}}{v\sin(\omega,v)},$$

$$\gamma=\frac{-\cos\lambda\frac{dy}{dt}}{v\sin(\omega,v)};$$

et par suite les composantes de la force centrifuge composé
sont

$$X_c=-2m\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt},$$

$$Y_c=\quad 2m\omega\sin\lambda\left(\frac{dx}{dt}+\cos\lambda\right)\frac{dz}{dt},$$

$$Z_c=-2m\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt}.$$

On a donc pour les équations du mouvement

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=2\omega\left(\sin\lambda\frac{dx}{dt}+\cos\lambda\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}=g-2\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt}.$$

On obtient sans difficulté les intégrales premières

$$\frac{dx}{dt}=A-2\omega y\sin\lambda,$$

$$\frac{dy}{dt}=B+2\omega(x\sin\lambda+z\cos\lambda),$$

$$\frac{dz}{dt}=C+gt-2\omega y\cos\lambda,$$

A, B, C étant les composantes de la vitesse initiale v_0.

Supposons cette vitesse initiale nulle et le corps tombant en chute libre : la force centrifuge composée le fait dévier vers l'est; mais comme elle est très faible, la déviation est elle-même très petite. On peut donc négliger le produit de cette déviation y par ω et prendre simplement pour intégrale de la dernière équation

$$z=\frac{gt^2}{2}.$$

De même l'équation précédente se réduit à

$$\frac{dy}{dt}=2\omega z\cos\lambda=g\omega t^2\cos\lambda;$$

d'où

$$y=\frac{g\omega t^3\cos\lambda}{3}.$$

Et la première équation devient

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-2g\omega^2t^3\sin\lambda\cos\lambda}{3};$$

d'où

$$x=\frac{-g\omega^2t^4\sin 2\lambda}{12}.$$

Il y a donc :

1° Une déviation vers l'est, y.

2° Une déviation *extrêmement petite* vers le sud dans notre hémisphère et plus généralement du côté de l'équateur, x.

La déviation vers l'est, si l'on remplace t par sa valeur en fonction de la hauteur de chute $h = \frac{gt^2}{2}$, devient

$$y = \frac{g\omega \cos\lambda}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} \text{ [1]}.$$

Sous cette forme, elle est directement comparable à l'expérience.

Reich a fait une série de mesures dans les mines de Freiberg, en laissant tomber un corps d'une hauteur $h = 158^m,5$; et il a trouvé comme résultat définitif $y = 0^m,0283$. Si dans la formule on fait $g = 9,81$ et $\lambda = 51$, on a en effet $y = 0^m,0276$.

On verrait de même aisément qu'un corps lancé de bas en haut suivant la verticale ne retombe pas exactement au point de départ, mais qu'il est dévié vers l'ouest et un peu vers le nord.

Dans le cas d'un projectile lancé sous un angle quelconque θ, on a une déviation variable avec l'azimuth du plan de tir. Supposons, par exemple, ce plan de tir coïncidant avec le méridien : si $\theta < \lambda$, la déviation a lieu vers l'est; si $\theta > \lambda$, le corps quitte d'abord le plan méridien du côté de l'ouest, puis il y revient dans le temps $t = \frac{3v \sin(\theta - \lambda)}{g \cos\lambda}$, de sorte que pour qu'il perce ce plan avant de toucher le sol, on doit avoir $\operatorname{tg}\theta < 3 \operatorname{tg}\lambda$.

Remarquons enfin que, pour traiter complètement les questions d'équilibre et de mouvement des corps pesants, il faudrait encore tenir compte de ce que, rigoureusement parlant, la pesanteur, à un instant déterminé, varie d'intensité et de direction quand on passe d'un point à un point voisin, et de ce qu'en outre, les actions du soleil et de la lune sur un point de la surface de la terre n'étant pas tout à fait égales et parallèles aux actions de ces astres sur le centre de notre globe, il en résulte, dans la grandeur et la direction de la pesanteur en chaque point, des changements con-

[1] Voir dans Résal, *Traité de mécanique générale*, I, 107, la solution du même problème obtenue directement.

inuels qui sont rendus manifestes par le phénomène des marées. Mais ces petites variations de la pesanteur troublent à peine les phénomènes fondamentaux. Pour n'en citer qu'une preuve, le fil à plomb fait avec la verticale du point de suspension un angle, lié à l'aplatissement de la terre; mais cet angle est si minime (à Paris, pour un pendule long de 100 mètres, il serait à peine de 0",017) qu'aucune mesure ne saurait l'évaluer. Nous n'insisterons donc pas sur ces perturbations, qu'il suffit d'avoir signalées [1].

(1) Voir à ce sujet Puiseux, *Annales de l'École normale supérieure* (2), I, 23; 1872.

CHAPITRE III

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

I. — IMPÉNÉTRABILITÉ.

107. Impénétrabilité. — L'impénétrabilité est la résistance de la matière, abstraction faite du mouvement.

Certains faits vulgaires semblent en contradiction avec cette notion. Sans doute, la plupart d'entre eux, comme la pénétration d'un clou dans une planche, ne sauraient être sérieusement objectés; mais d'autres, tels que la diminution de volume du métal dans la frappe de la monnaie, la contraction d'un mélange de 50 parties d'alcool et 54 parties d'eau se réduisant à 100 parties, etc., paraissent réellement incompatibles avec ce principe que la présence d'un corps dans un espace donné exclut de cet espace tout autre corps. Pour concilier ces faits avec l'idée nécessaire d'impénétrabilité, il suffit de reporter aux parties constituantes du corps la propriété attribuée d'abord au corps lui-même, comme on le fait dans l'hypothèse ordinairement admise sur la constitution de la matière.

II. — ÉTENDUE. INSTRUMENTS DE MESURE.

108. Étendue. — L'étendue est la propriété que possède tout corps d'occuper une certaine place dans l'espace. Ainsi définie, l'étendue n'est qu'une conséquence de l'impénétrabilité : c'est pourquoi nous n'avons admis qu'une seule propriété essentielle de la matière (17).

L'étude de l'étendue se réduit à des mesures : mesures de volu-

nes, mesures de surfaces, mesures de lignes. Géométriquement, le volume et la surface d'un corps peuvent se déduire de ses dimensions linéaires. Cependant il est souvent utile et parfois nécessaire de mesurer directement le volume : nous reviendrons sur cette opération. Dans plus d'un cas aussi il est important de mesurer directement une surface : on se sert à cet effet du planimètre ou de la balance, l'aire d'une portion quelconque d'une feuille homogène étant proportionnelle au poids de cette portion.

Nous ne nous occuperons ici que de la mesure des longueurs et particulièrement des petites longueurs.

109. Évaluation par estime. — Lorsqu'on mesure une longueur à l'aide d'une règle, divisée en millimètres, je suppose, on trouve en général que la longueur cherchée égale un certain nombre de millimètres, plus un reste. La mesure de ce reste ne saurait évidemment s'obtenir par une nouvelle subdivision de la règle : le demi-millimètre se lit déjà péniblement. Il est vrai qu'on peut estimer immédiatement une fraction déterminée des divisions de la règle. Avec un peu d'habitude, le physicien évalue exactement à l'œil le $\frac{1}{10}$ de millimètre, comme l'astronome apprécie sûrement à l'oreille le $\frac{1}{10}$ de seconde. Mais ce procédé est nécessairement limité. Aussi, dès l'époque où l'on comprit le besoin des mesures exactes, a-t-on cherché à évaluer indirectement les fractions des dernières divisions pratiquement réalisables.

Les appareils imaginés dans ce dessein peuvent être rapportés à trois types principaux : le vernier, la vis micrométrique et le levier à réflexion.

1° VERNIER.

110. Vernier. — Les premiers efforts portèrent sur les fractions de degrés. On se servit d'abord des transversales. Vers le milieu du seizième siècle, Nuñez ou Nonius ([1]), professeur à Coïmbre, imagina de placer au milieu du quadrant divisé en degrés

([1]) Nuñez, *De crepusculis liber unus*. Lisbonne, 1542.

une série de quadrants concentriques divisés respectivement en 89, 88, 87... parties égales; l'alidade mobile tombait toujours sensiblement sur une division de l'une des circonférences : on avait dès lors une expression de l'arc que l'on convertissait aisément en degrés et fractions de degré. Bien autrement simple et précise est la solution donnée, quelques années plus tard, par Pierre Vernier [1], d'Ornans en Franche-Comté, l'inventeur de l'instrument trop souvent encore appelé *nonius*.

Vernier rectiligne. — Le vernier est un curseur glissant en face de la graduation principale que nous supposerons d'abord tracée sur une règle, et portant lui-même n divisions égales à $\frac{n-1}{n}$ d'une division de la règle si l'on veut apprécier le $\frac{1}{n}$ de division. Pour mesurer, par exemple, le $\frac{1}{10}$ de millimètre, on joint à la

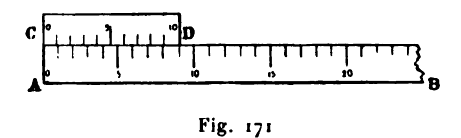


Fig. 171

règle principale AB, divisée en millimètres, une réglette CD longue de 9^{mm} et divisée en 10 parties égales, les divisions étant numérotées de 0 à 10 dans le sens des divisions de la

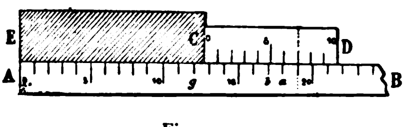


Fig. 172

règle. Soit EC la longueur à mesurer; la règle principale donne 12^{mm}, plus un reste : contre l'extrémité C amenons le vernier et cherchons laquelle de ses divisions coïncide avec une division de la règle : si c'est la division 7 du vernier qui offre cette coïncidence, nous en conclurons que le reste à évaluer vaut $\frac{7}{10}$ de mil-

[1] VERNIER, *La construction, l'usage et les propriétés du quadrant nouveau de mathématiques*. Bruxelles, 1631.

nètre. En effet, chaque division du vernier est égale à $\frac{9}{10}$ de millimètre ; la division 6 du vernier est donc en retard de $\frac{1}{10}$ de millimètre sur la division a de la règle, la division 5 du vernier est en retard de $\frac{2}{10}$ de millimètre sur la division b de la règle,.. la division o du vernier est en retard de $\frac{7}{10}$ de millimètre sur la division g de la règle : le reste à mesurer est donc égal à $\frac{7}{10}$ de millimètre.

D'une manière générale, pour évaluer le $\frac{1}{n}$ de millimètre, on prendra une longueur de $n-1$ millimètre et on la divisera en n parties égales ; on aura ainsi un vernier au $\frac{1}{n}$; et le numéro k de la division du vernier qui se trouvera coïncider avec une division

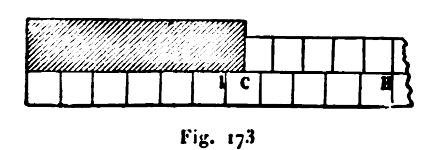


Fig. 173

de la grande règle donnera le numérateur de la fraction mesurant le reste cherché. On aura toujours en effet, H étant le point de coïncidence,

$$\mathrm{IC}=\mathrm{IH}-\mathrm{CH};$$

or

$$\mathrm{IH}=k \text{ divisions de la règle } = k^{\mathrm{mm}};$$
$$\mathrm{CH}=k \text{ divisions du vernier } = k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{\mathrm{mm}};$$

donc

$$\mathrm{IC}=k\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^{\mathrm{mm}}$$
$$=\frac{k}{n}^{\mathrm{mm}}.$$

Nous avons supposé que, conformément à l'usage suivi en France, les divisions du vernier étaient numérotées dans le même sens que celles de la règle. En Angleterre, on numérote ordi-

nairement les divisions du vernier en sens inverse de celles de l
règle, mais comme on a pris alors une longueur de $n+1$ divisio
de la grande règle pour la partager en n parties égales, comme p

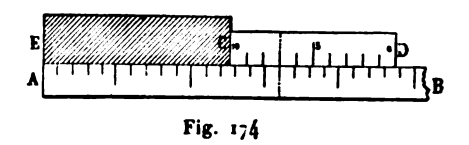


Fig. 174

conséquent 1 division du vernier vaut les $\frac{n+1}{n}$ d'une division d
la règle, la lecture se fait de même. Ainsi, dans le cas figuré ci
contre, on lirait encore pour EC 12^{mm},7.

D'une manière ou de l'autre, le vernier, et c'est là son avantage permet d'évaluer des longueurs plus petites que les dernières divisions de la règle principale, tout en n'offrant lui-même que des divisions à peu près égales à celles de cette règle.

Jusqu'ici nous avons admis qu'une division du vernier coïncidait mieux que les autres avec une division de la règle principale. Il peut arriver que deux divisions consécutives, les divisions 7 et 8, par exemple, d'un vernier au $\frac{1}{n}$, paraissent coïncider également avec deux divisions de la règle; on prendra alors la moyenne ou $\frac{15}{2n}$ comme mesure du reste à évaluer. Ces doubles coïncidences sont en réalité l'écueil du vernier : elles limitent assez rapidement dans la pratique l'approximation, théoriquement illimitée, que l'on peut obtenir au moyen de cet appareil. En effet, la mesure de $\frac{1}{n}$ mm suppose non seulement que les divisions de la règle sont chacune exactes à moins de $\frac{1}{n}$, mais de plus que l'épaisseur des traits de la règle et de ceux du vernier est assez faible pour que des coïncidences doubles et même triples ou quadruples ne s'observent pas à chaque lecture; aussi, même en s'aidant d'une loupe [1], ne peut-on

[1] On fatigue moins l'œil et on facilite la graduation en espaçant davantage les divisions de la règle principale et en employant, comme

ière lire sûrement avec le vernier au delà du $\frac{1}{50}$ de millimètre ; et
ıcore supposons-nous que, soucieux de laisser aux lectures toute exactitude possible, le constructeur a eu soin de placer le vernier ans le plan de la règle principale et non pas en biseau sur cette ègle, comme on le fait trop souvent.

Il faut, avons-nous dit, que les divisions de la règle principale et celles du vernier soient exactes au degré de précision que l'on veut atteindre. On devra avant tout s'assurer qu'il en st bien ainsi, en mesurant une même longueur successivement avec les diverses portions de la règle. On déterminera de cette manière les *erreurs systématiques de la graduation* (les seules que doive présenter une graduation bien exécutée) et l'on connaîtra dès lors les corrections qu'il faudra apporter aux lectures faites en différentes ré-

l'a proposé **M. Mannheim**, un *vernier de vernier*. Sur un premier vernier V_1 au $\frac{1}{10}$ glisse un deuxième vernier V_2 également au $\frac{1}{10}$ et mobile dans une rainure située de l'autre côté de la règle principale R ; les divisions de V_2 sont

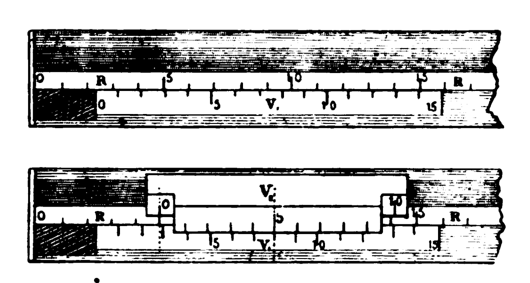


Fig. 175

en regard de celles de V_1 à l'exception des deux traits extrêmes qui se trouvent en arrière des autres et à la hauteur des traits de la règle R. V_1 est construit comme d'habitude ; V_2 a pour longueur $9^{\text{div.}},1$ et les deux verniers sont divisés dans le sens de la règle principale. Le premier vernier V_1 montrant que la longueur à mesurer vaut, je suppose, 2 divisions de la règle plus un reste compris entre $\frac{3}{10}$ et $\frac{4}{10}$, on amène le zéro du deuxième vernier V_2 sur le trait de la règle principale le plus voisin du trait 3 de V_1 et on lit suivant le procédé ordinaire le vernier V_2. Soit 5 le numéro de la division de V_2 coïncidant avec une division de V_1, on ajoutera $\frac{5}{100}$ aux $\frac{3}{10}$ déjà obtenus.

gions de la règle pour les rendre exactement comparables entre ell

Pied à becs. — Une application immédiate du vernier nous offerte par le compas d'épaisseur dit *pied à becs*. L'objet dont s'agit de mesurer l'épaisseur est saisi entre un talon soudé à u règle en acier et un deuxième talon fixé à un curseur glissant s la règle ; celle-ci est divisée en millimètres, le curseur porte

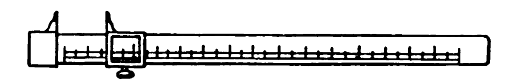


Fig. 176

vernier au $\frac{1}{10}$ par exemple, et les zéros des deux divisions sont e regard quand le compas est fermé.

Coin micrométrique. — Une autre application simple du ver nier est le coin micrométrique ([1]), dans la construction duqu on a ingénieusement combiné le plan incliné et le vernier. Au dessus d'une règle divisée en millimètres glisse un vernier au $\frac{1}{1}$ porté par un coin en triangle rectangle dont l'hypoténuse égal

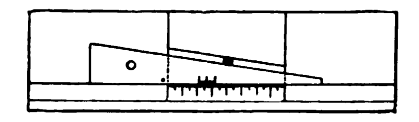


Fig. 177

10 fois la hauteur. L'objet dont on veut mesurer l'épaisseur est saisi entre le coin et une pièce taillée sous le même angle contre laquelle le coin s'appuie exactement quand le vernier est au zéro. Le vernier mesure au $\frac{1}{10}$ de millimètre le recul du coin produit par l'interposition du corps sur lequel on opère ; d'ailleurs ce recul est 10 fois plus considérable que l'épaisseur cherchée : l'appareil donne donc par une simple lecture le $\frac{1}{100}$ de millimètre. Mais on ne peut compter sur cette approximation qu'à la condition d'exercer

([1]) Schönemann, *Pogg. Ann.*, CXLVI, 612, 1872; et *Journal de physique*, I, 408.

que fois sur le coin une pression convenable, toujours la même.

Vernier circulaire. — Le vernier, avons-nous dit, a d'abord été pliqué à la mesure des arcs. Si le cercle est divisé en degrés et mi-degrés, on pourra évaluer la minute avec un vernier au $\frac{1}{30}$, e l'on aura construit en prenant un arc égal à 29 demi-degrés et le divisant en 30 parties égales.

Dans les cercles très précis, tels que Gambey en a construit le remier, le degré est divisé en 12 parties égales valant chacune ′; la longueur du vernier est de 59 divisions du cercle, c'est-à-dire °−5′, et on l'a partagée en 60 divisions : chaque division du vernier vaut donc $5'-5''$ et l'on pourra apprécier les $5''$; ainsi, dans 'exemple figuré ci-contre, on lirait $46^\circ\,10'+9\times 5''$, c'est-à-dire

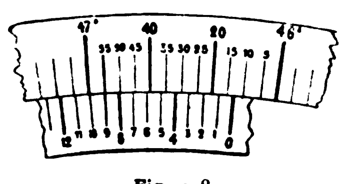


Fig. 178

$46^\circ\,10'\,45''$. Cette approximation de $5''$ est difficile à dépasser avec le vernier ; on ne peut même en répondre qu'à la condition d'opérer sur un cercle bien construit et de multiplier les verniers soigneusement placés dans le plan du cercle.

L'emploi de plusieurs verniers a une double raison :

1° Sur un cercle on doit toujours faire la lecture aux deux extrémités de l'alidade mobile pour corriger le défaut de centrage :

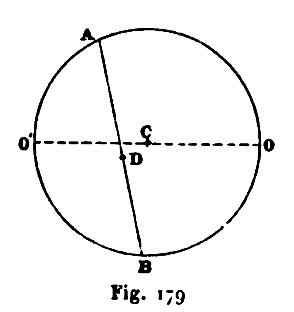


Fig. 179

soit, en effet, D le centre de rotation de l'alidade supposé différent

du centre C du cercle; la demi-somme des arcs OA et O'B mesu l'angle de l'alidade AB avec la ligne OO', d'après le théorème con sur la mesure de l'angle inscrit. On aura donc d'abord deux ve niers aux deux extrémités de l'alidade.

2° La division du cercle est nécessairement imparfaite. On rem diera à cette imperfection en fixant à l'alidade plusieurs index plac aux sommets d'un polygone régulier, ordinairement quatre inde

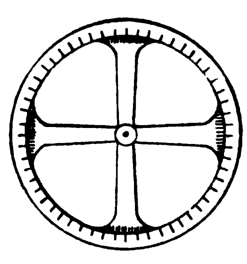


Fig. 180

le multiple entier de 5' se lit toujours au même index et on y ajoute la moyenne des excédants donnés par les quatre verniers.

Ces précautions toutefois ne dispensent pas d'une étude préalable du cercle, analogue à celle que nécessite toute règle divisée, et consistant principalement à mesurer un même angle avec les diverses portions du cercle. Ainsi seulement on pourra être certain chaque fois de la position de l'alidade à 5" près.

Restent les erreurs de visée que l'on atténue par d'autres procédés.

111. Comparateur. — Le comparateur offre une application intéressante du vernier circulaire combiné avec le levier. Cet instrument sert à comparer une règle à un étalon auquel on veut l'égaler, à comparer, par exemple, un mètre à l'étalon métrique. Il se compose essentiellement d'un levier coudé à angle droit, *dont* la grande branche, terminée par un vernier, se déplace devant un arc de cercle gradué, et dont la petite branche appuie sur une glissière pressant contre l'une des extrémités de la règle à étudier [1];

[1] La grande branche du levier est pressée par un ressort qui appuie le levier sur la glissière; la glissière elle-même est entourée d'un ressort à boudin qui la maintient contre l'extrémité de la règle.

autre extrémité de la règle bute contre un talon mousse fixé à un solide banc de fonte qui sert de base à l'appareil. Le levier et la glissière sont portés par un chariot formé de deux pièces,

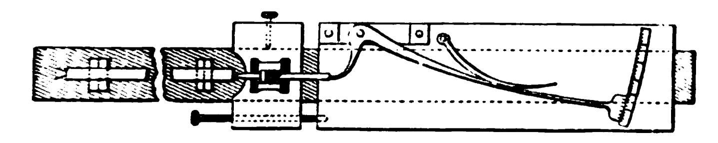


Fig. 181

dont l'une, plus petite, peut se fixer au banc par une vis de pression l'immobilisant entièrement, et dont l'autre est reliée à la première par une vis de rappel. Cette vis, à pas très fin, s'unit à la petite pièce par un renflement sphérique logé dans une cavité de même forme, à la grande pièce par un écrou en boule, également enfermé dans une cavité sphérique : les parois de chaque cavité peuvent être serrées plus ou moins sur la boule intérieure, de façon à ne laisser à celle-ci que strictement le jeu nécessaire au fonctionnement du système. La vis de pression de la petite pièce étant desserrée, on peut faire glisser le chariot entier sur le banc et d'un mouvement rapide l'amener approximativement à la position qui convient pour l'étalon employé ; on serre alors la vis de pression, et agissant sur la vis de rappel, on déplace la grande pièce du chariot seule jusqu'à ce que le zéro du vernier coïncide avec le zéro de la graduation fixe. On remplace l'étalon par la règle à examiner, sans toucher d'ailleurs à aucune vis. La règle est-elle exactement égale à l'étalon, le levier revient au zéro ; en diffère-t-elle, on voit immédiatement le sens de cette différence et on en lit au vernier la valeur multipliée par le rapport des bras de levier. Si le grand bras vaut 100 fois le petit et si le vernier est au $\frac{1}{10}$, l'arc étant divisé en millimètres, la différence des deux règles est connue à $\frac{1}{1000}$ ^{mm} près. Cela suppose toutefois que cette différence est assez faible pour qu'on puisse la regarder comme égale à l'arc qu'a décrit l'extrémité du petit bras de levier. Si le levier tourne d'un angle un peu grand, on ne saurait plus ainsi prendre l'arc pour la tangente ; il est cependant encore possible de conserver un rapport constant entre les droites à

mesurer et les arcs parcourus par le grand bras de levier : il su de terminer le petit bras de levier en développante de cercle, com l'a fait M. Perreaux. AD étant la développante du cercle de ra OA, la droite AC parcourue par l'extrémité de la règle s

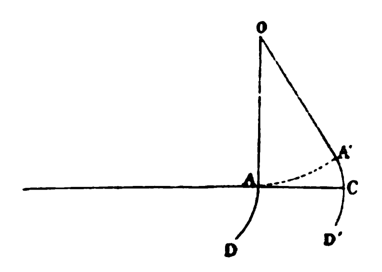


Fig. 182

égale à l'arc AA′ que l'on mesure en l'amplifiant. La plus grand difficulté consiste à connaître avec exactitude le rapport dans lequ on amplifie, ou, en d'autres termes, le rapport des bras de levie La mesure directe des bras n'est pas susceptible de rigueur; on n peut guère déterminer ce rapport qu'en plaçant successivemen sur le comparateur deux règles dont la différence est exactemen connue d'avance : il y a donc là une difficulté qu'il n'est pa toujours aisé de surmonter.

On a construit dans ces dernières années des comparateurs beaucoup plus parfaits, consistant essentiellement en une paire de microscopes absolument fixes et munis de micromètres, sous lesquels on amène d'abord les deux extrémités de l'étalon, puis celles de la règle qu'il s'agit de lui comparer ([1]); mais la description de ces appareils, assez précis pour donner aisément le micron, nous entraînerait hors des limites de cet ouvrage.

112. Cathétomètre. — *Description.* — Le cathétomètre (κάθετος vertical, μέτρον, mesure) sert à mesurer la distance verticale de deux points, c'est-à-dire la distance des plans horizontaux menés par les deux points, quels que soient d'ailleurs les azimuths dans lesquels ces points sont situés. Il se compose essentiellement d'une règle divisée verticale, mobile autour d'un axe éga-

([1]) Deville et Mascart, *Annales de l'École normale supérieure* (2), VIII, 16; 1879.

ment vertical, et d'une lunette horizontale pouvant se déplacer le long de la règle et entraînant avec elle un vernier. On vise successivement les deux points et on lit chaque fois la position de la lunette sur la règle : la différence des deux lectures donne la distance cherchée.

Inventé par Dulong et Petit à l'occasion de leurs recherches sur la dilatation absolue du mercure, le cathétomètre a été maintes fois utilisé depuis par Pouillet d'abord, par Regnault ensuite, et il est devenu l'un des instruments de mesure les plus employés dans les laboratoires de physique ; aussi a-t-il été à diverses reprises modifié dans sa construction.

Dans les anciens modèles la règle divisée, en laiton, était fixée à l'une des génératrices d'un cylindre de même métal mobile autour d'un axe en fer enveloppé par le cylindre. On préfère aujourd'hui prendre pour la règle divisée l'une des faces d'un prisme triangulaire (ou quadrangulaire) M en laiton, percé suivant l'axe et traversé dans toute sa longueur par une colonne d'acier dressée sur un pied massif à trois vis calantes. La base supérieure du prisme sert d'écrou à une vis R dont la pointe appuie sur le sommet de la colonne en acier ; la base inférieure est percée d'un trou légèrement conique emboîtant exactement un tourillon de même forme, ménagé à la base de la colonne centrale. Par suite de cette disposition, la vis supérieure soulevant légèrement le manchon prismatique, celui-ci peut tourner d'un mouvement très doux et très précis autour de l'axe de la pièce centrale, lequel doit se confondre avec l'axe du prisme. Une vis T permet de fixer le manchon dans un azimuth quelconque.

Sur ce manchon M glisse l'équipage qui porte la lunette et qui se compose lui-même de deux curseurs prismatiques P et Q, emboîtant exactement le prisme principal et reliés entre eux par une vis de rappel g. Le curseur inférieur Q est en outre muni d'une vis de pression F servant à le fixer en un point quelconque du manchon. Ce mécanisme, que nous avons déjà signalé dans le comparateur et qui se rencontre dans tous les appareils où l'on doit déplacer une pièce et l'amener rigoureusement à une situation donnée, permet en effet d'opérer rapidement les grands mouvements et d'effectuer ensuite avec précision la mise en place de la pièce mobile. Faisant

glisser le chariot tout entier, la vis de pression desserrée, on él vivement la lunette à peu près en face du point à viser ([1]). On se la vis de pression, de manière à immobiliser le curseur inférie et on déplace lentement le curseur supérieur à l'aide de la vis rappel *g* jusqu'à ce que la lunette vise exactement le point voulu.

La lunette AB repose sur deux fourchettes implantées aux de

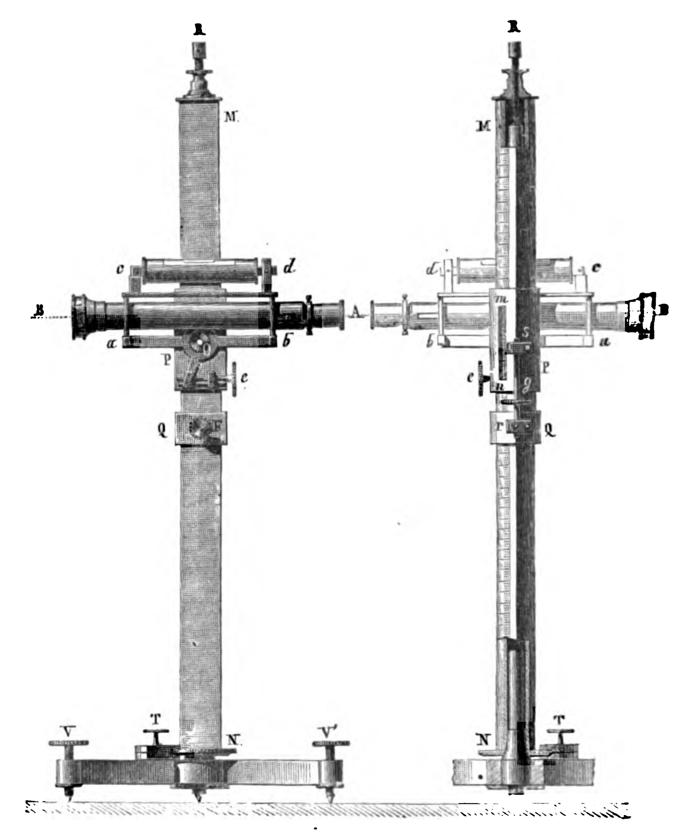


Fig. 183

extrémités d'une règle horizontale *ab* portée par le curseur supérieur et mobile autour d'un axe horizontal O : une vis de rappel *e* agissant

([1]) Dans les appareils construits par MM. Brünner, le manchon est un large prisme à base carrée : devant l'une des faces glisse le chariot portant la lunette, devant la face opposée se meut un contre-poids rattaché au chariot par une corde à boyau qui passe sur deux petites poulies placées à la partie supérieure de l'instrument. Le mouvement s'effectue ainsi sans secousse et avec une grande précision par suite de la largeur de la face le long de laquelle coulisse le chariot.

ır une queue soudée à la règle, perpendiculairement à sa grande imension, permet de l'incliner dans un sens ou dans l'autre [1] et e ramener toujours la lunette à la position horizontale. Les deux agues métalliques par lesquelles la lunette repose sur les fourches nt exactement le même diamètre (on les a coupées dans un ıême cylindre soigneusement tourné); sur ces bagues, à la partie upérieure, s'appuient deux autres fourchettes soutenant un niveau bulle d'air *cd*, nécessaire au réglage de l'appareil. Dans le curseur upérieur est ménagée une fenêtre *mn*, qui laisse voir les divisions le la règle (ordinairement des millimètres) se détachant en noir sur fond d'argent. L'un des bords de la fenêtre est taillé en biseau et porte un vernier au $\frac{1}{50}$: une loupe permet de lire la division du vernier qui coïncide avec une division de la règle, en même temps qu'une petite lame de verre dépoli projette le jour par réflexion sur les divisions à examiner. Les déplacements verticaux de la lunette sont ainsi évalués sûrement au $\frac{1}{50}$ de millimètre. Quand la graduation de la règle est parfaite, le vernier peut être remplacé par un petit microscope muni d'un réticule mobile à l'aide d'une vis micrométrique : on obtient aisément de cette façon le $\frac{1}{100}$ de millimètre, mais il est difficile d'aller plus loin.

Usage. — Étant donné un cathétomètre bien construit (et d'après ce qui précède on voit que ce ne sera pas chose commune), il faut, chaque fois que l'on veut s'en servir, le régler, c'est-à-dire l'amener à remplir rigoureusement ces deux conditions : une ligne de visée horizontale, un axe vertical.

A cet effet, on se sert du niveau à bulle d'air joint à la lunette. Mais quand on opérera avec ce niveau le réglage de l'axe suivant la verticale, par suite de la manière même de procéder on amènera en même temps la ligne des repères du niveau à être horizontale. Si donc on a préalablement ajusté la ligne de visée parallèlement

(1) L'extrémité de la queue qui porte l'écrou décrivant un arc de cercle quand la vis se déplace parallèlement à son axe, la boule où est creusé l'écrou doit pouvoir monter ou descendre légèrement dans la cavité qui la reçoit. Sur quelques appareils, la boule est supprimée et l'écrou est taraudé directement dans la queue à l'intérieur d'une fente où la vis ne mord que latéralement, ce qui lui permet encore de suivre sans se fausser le mouvement de la pièce qu'elle commande.

à la ligne des repères du niveau, la même opération rendra l'axe vertical et la ligne de visée horizontale.

1° Ajustage.

La première chose à faire sera donc de rendre une fois pour toutes la ligne de visée parallèle à la ligne des repères du niveau.

La lunette du cathétomètre est une lunette astronomique munie d'un réticule formé de deux fils croisés à angle droit et mobiles à l'aide de vis convenablement placées. La visée consiste à amener l'image réelle du point visé fournie par l'objectif sur la croisée des fils du réticule. Or cette image est nécessairement sur la ligne joignant le point visé au centre optique de l'objectif. La ligne de visée est donc la ligne qui passe par le centre optique de l'objectif et le point de croisement des fils du réticule, c'est-à-dire l'*axe optique* de la lunette. C'est cette ligne qu'il s'agit de rendre parallèle à la ligne des repères du niveau. L'opération s'effectue en deux temps. On fait d'abord coïncider l'axe optique de la lunette avec son axe géométrique (axe commun des deux colliers par lesquels elle repose sur les fourchettes), puis on rend l'axe géométrique parallèle à la ligne des repères du niveau.

Pour établir la coïncidence de l'axe optique avec l'axe géométrique de la lunette, on vise un point; puis, toutes les autres pièces immobilisées, on fait tourner la lunette sur elle-même, les colliers roulant sur les fourchettes (ce qui ne déplace pas l'axe géométrique); et on agit sur les vis du réticule jusqu'à ce que, malgré ce mouvement de rotation, on réussisse à maintenir l'image du point visé sous la croisée des fils du réticule. La première condition est alors remplie : l'axe optique coïncide avec l'axe géométrique.

En second lieu, il faut rendre l'axe géométrique de la lunette parallèle à la ligne des repères du niveau. A cet effet, on tourne la vis de rappel du support à fourchettes sur lequel repose la lunette de façon à amener la bulle du niveau entre ses repères : la ligne qui joint les repères est alors horizontale. On enlève la lunette avec son niveau, et la retournant bout pour bout, on la remet sur les fourchettes. Si les colliers sont bien égaux, l'axe géométrique de la lunette se replace exactement dans sa position première et cela quand bien même les deux fourchettes ne seraient pas ouvertes

l'un même angle. La ligne des repères prend une position symétrique de celle qu'elle occupait d'abord, le retournement bout pour bout ayant produit le même effet qu'une rotation de 180° autour d'une perpendiculaire menée à l'axe géométrique par le milieu de la distance des deux colliers. Si donc l'axe n'était pas horizontal dans sa position initiale, la ligne des repères fait actuellement avec l'horizon un angle double de l'angle compris entre l'axe et l'horizon. XX_1 et AB sont l'axe et la ligne des repères dans la première position, X'_1X' et B'A' les mêmes lignes après le retourne-

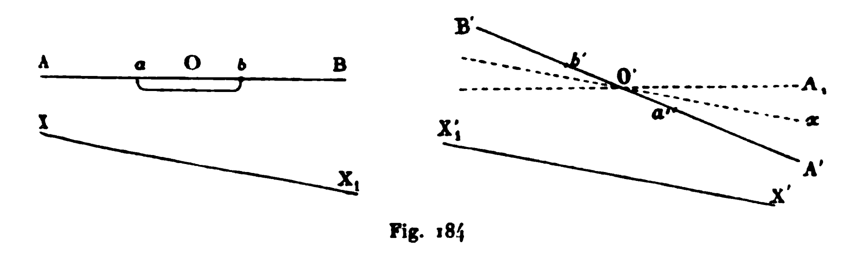


Fig. 184

ment; si nous menons par O' l'horizontale $O'A_1$ et la parallèle $O'x$ à X'_1X', il est visible que $A'O'A_1$, angle de la ligne des repères avec l'horizon, est double de $A_1O'x$, inclinaison de l'axe sur l'horizon. D'autre part, la ligne des repères n'étant plus horizontale, il en résulte un déplacement apparent de la bulle qui occupe actuellement une position telle que, comme toujours, la ligne joignant ses extrémités soit horizontale : la parallèle menée par le point O' à cette ligne n'est donc autre que $O'A_1$, et le déplacement angulaire de la ligne même des extrémités est $A_1O'A'$. Mais le profil d'un niveau bien construit étant exactement circulaire, l'arc parcouru par la bulle est proportionnel au déplacement angulaire, proportionnel ici, par conséquent, au double de l'angle que fait l'axe avec l'horizon. On agira donc sur la vis de rappel du support à fourchettes de manière à rapprocher la bulle de ses repères de la moitié de la distance qui l'en sépare, et on corrigera l'autre moitié du déplacement à l'aide de la vis même du niveau (tout niveau est monté de façon qu'une vis puisse élever ou abaisser l'une de ses extrémités, tandis que l'autre reste fixe). On aura par ce moyen rendu l'axe de la lunette horizontal et ramené la bulle du niveau entre ses repères. Un nouveau retournement bout pour bout ne

devrait donc plus produire aucun déplacement de la bulle. Le con traire aura cependant lieu en général à cause des imperfections de l'instrument et des inexactitudes de l'opération; on corrigera ce nouveau déplacement moitié avec la vis de rappel du support de la lunette, moitié avec la vis du niveau. En continuant ainsi et en opérant chaque fois sur des déplacements plus petits, on arrivera bientôt à rendre l'axe exactement horizontal et en même temps à régler le niveau, de sorte qu'il suffira dans la suite de ramener la bulle entre ses repères pour que la ligne de visée soit horizontale.

2° Réglage.

Voici maintenant comment s'effectue le réglage, auquel on doit procéder toutes les fois que l'on installe à nouveau l'appareil, et qu'il faut vérifier avant chaque série de mesures. Faisant tourner le manchon tout entier, on amène le support à fourchettes, et en même temps le niveau, dans une position à peu près parallèle à la direction des têtes de deux des vis calantes du pied; on agit sur ces vis de façon à placer la bulle entre ses repères : la ligne qui joint les milieux des repères est alors horizontale. On fait tourner le manchon sur lui-même de 180° environ : si l'axe est perpendiculaire à l'horizontale définie par la première position de la bulle du niveau, celle-ci se retrouvera entre ses repères; sinon, elle aura éprouvé un déplacement apparent à la surface du niveau.

Par un point quelconque O de l'axe ZZ′, menons des parallèles aux diverses positions de la ligne des repères pendant sa rotation autour de l'axe Z′Z : ces parallèles sont situées sur un cône de révolution dont les génératrices extrêmes sont l'horizontale Oab et la ligne $Oa'b'$, symétrique de Oab par rapport à OZ. La bulle du niveau, qui était primitivement entre ses repères, s'est déplacée après la rotation de 180°, de telle sorte que la ligne joignant les deux extrémités de la bulle soit toujours horizontale : la parallèle à cette ligne des extrémités de la bulle menée par le point O n'est par conséquent autre que l'horizontale $abOa_1b_1$. Le déplacement angulaire de la bulle est donc a_1Oa', c'est-à-dire qu'il est double de l'angle dont il faut relever l'axe pour l'amener à être perpendiculaire à l'horizontale aOa_1. On agira alors sur l'une ou l'autre des deux vis calantes, à la ligne desquelles le niveau est parallèle, de

manière à corriger la moitié du déplacement apparent de la bulle; on corrigera l'autre moitié avec la vis de rappel du support à fourchettes sur lequel reposent la lunette et le niveau. On aura ainsi

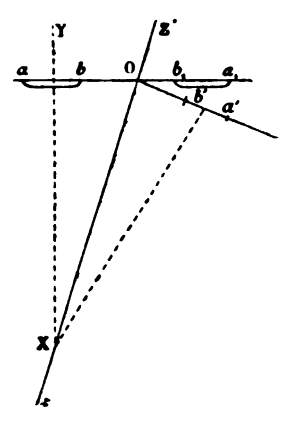


Fig. 185

placé l'axe dans la perpendiculaire XY à l'horizontale aOa_1 et ramené la bulle entre ses repères. En revenant à la position initiale par une nouvelle rotation de 180° du manchon, la bulle devrait donc rester entre ses repères. Cela ne sera généralement pas : on corrigera le nouveau déplacement moitié par les vis calantes du pied, moitié par la vis du support à fourchettes; et, en continuant ainsi, on arrivera rapidement à rendre l'axe perpendiculaire à l'horizontale sur laquelle on a opéré. Il suffira évidemment d'obtenir le même résultat relativement à une deuxième horizontale quelconque pour que l'axe soit vertical. D'habitude on prend l'horizontale perpendiculaire à la première, c'est-à-dire que l'on dirige la lunette perpendiculairement à la ligne des têtes des deux vis calantes utilisées jusque là et que l'on tourne la troisième vis, non encore employée, de manière à amener la bulle entre ses repères. Dans cette opération on ne fait mouvoir que la troisième vis calante sans toucher aux deux autres ni à la vis de rappel du support à fourchettes, et, théoriquement, cette seule opération devrait suffire pour que l'axe devînt vertical; mais, pratiquement, le mouvement de la troisième vis fait basculer l'instrument autour des pointes mousses des deux autres vis, les points d'appui sur le sol changent, et les résultats obtenus dans la première série d'opérations sont plus ou moins

compromis. Il faut donc reprendre toutes les manipulations déj faites; mais, en les effectuant toujours méthodiquement et dan le même ordre, on opère sur des déplacements de plus en plus petit et l'on finit par arriver à un réglage exact, caractérisé par ce fai qu'une rotation complète de l'appareil autour de l'axe laisse la bull immobile entre ses repères. Toutefois, il est essentiel non seulemen que le cathétomètre soit bien construit, mais encore qu'il repose su un support inébranlable; sans cette condition, plus difficilemen réalisable qu'on ne pourrait le croire de prime abord, les opérations précédentes sont illusoires et tout réglage devient impraticable.

Quand un réglage exact est possible, il est toujours fort long; aussi cherche-t-on ordinairement à l'abréger au moyen de deux niveaux placés à angle droit sur le pied de l'appareil : l'axe étant rendu une première fois bien vertical, on amène la bulle de chaque niveau entre ses repères; lorsqu'on devra ensuite régler à nouveau le cathétomètre, on commencera par agir sur les vis calantes, de manière à ramener les bulles des niveaux du pied entre leurs repères : l'axe sera alors à très peu près vertical, et les opérations à faire avec le niveau de la lunette seront moins nombreuses.

Erreurs systématiques. — Le réglage effectué, restent les imperfections de l'appareil que ce réglage ne corrige point : inexactitudes de la graduation, défaut de parallélisme de la règle et de l'axe de rotation.

Pour corriger les erreurs provenant de la graduation, on procédera comme d'habitude : on mesurera successivement une même longueur avec les diverses parties de la règle du cathétomètre; on obtiendra ainsi les éléments de la construction d'une courbe qui permettra de rendre ensuite exactement comparables les mesures faites aux divers points de la règle. On n'aura ainsi toutefois que des nombres proportionnels aux distances réelles, nombres généralement suffisants, puisque ce sont habituellement des rapports de distances qu'il importe de déterminer. Si l'on voulait des mesures absolues, il faudrait effectuer la comparaison toujours délicate de l'échelle avec un étalon métrique, de manière à fixer la valeur réelle de chaque division.

Le cathétomètre étant bien réglé, un léger défaut dans le parallélisme de la règle à l'axe n'a évidemment pas d'influence sensible si les points à relever sont situés à la même hauteur bien que dans des

imuths très différents. Ce défaut n'empêche pas non plus de me-rer les distances relatives de points situés à une assez grande tance verticale dans des azimuths peu différents (il n'y a même ns ce cas aucun intérêt à rendre l'axe de rotation rigoureuse-ent vertical). La seule précaution à prendre consistera à ramener aque fois la lunette dans la position exactement horizontale dont le aura pu être écartée par un grand déplacement vertical : on se rvira à cet effet de la vis de rappel du support à fourchettes. S'il aut relever deux points situés à des niveaux assez éloignés et dans des azimuths notablement différents, on procédera en deux temps au moyen d'un point auxiliaire pris sensiblement au même niveau que l'un des points donnés et dans le même azimuth que l'autre.

La difficulté de concilier dans la construction un guidage exact de la lunette et une disposition commode et précise de la règle fait même souvent préférer l'emploi de deux instruments séparés : un *viseur*, c'est-à-dire un cathétomètre sans graduation, et une *règle divisée verticale* placée au voisinage des points à relever.

2° VIS MICROMÉTRIQUE.

113. De la vis. — La vis a été inventée, dit-on, par Archytas de Tarente, philosophe pythagoricien, contemporain de Platon (400 av. J.-C.).

Le long d'une hélice tracée sur un cylindre, faisons glisser l'un des sommets d'un profil plan (triangle isocèle ou carré) assujetti à ce que son plan passe sans cesse par l'axe tandis qu'un de ses côtés reste constamment sur la surface du cylindre, et nous aurons une vis (à *filet* triangulaire ou carré) dont le *pas* sera le pas même de l'hélice, c'est-à-dire la distance comprise sur une génératrice quelconque du cylindre entre deux rencontres consécutives de la courbe. Lorsque la vis tourne dans son écrou d'un tour entier, elle avance dans le sens de son axe d'une longueur égale à son pas; si elle tourne d'une fraction de tour, elle avance de la même fraction de son pas : on comprend donc qu'avec une vis parfaite on puisse, par la mesure de l'angle dont on la fait tourner, évaluer telle fraction que l'on voudra de la grandeur du pas de la vis et par conséquent mesurer de petites longueurs. Le physicien possède une vis naturelle, mathématiquement

parfaite, le rayon lumineux; mais l'emploi de cette vis, dont le pas n'est qu'un demi-micron pour la lumière jaune et dont on peut aisément compter le $\frac{1}{1000}$ de spire, n'exclut pas l'usage de vis matérielles d'un maniement plus facile et d'une application plus courante.

On appelle *vis micrométrique* une vis dont le pas est petit (ordinairement un demi-millimètre) et très régulier et dont la tête porte un tambour divisé, tournant en regard d'un index fixe. Une vis du pas d'un demi-millimètre et d'un diamètre d'un à trois centimètres peut être assez bien construite pour permettre d'évaluer sûrement le micron.

Tantôt la vis micrométrique se meut librement dans un écrou fixe, tantôt elle déplace un écrou mobile en tournant simplement sur elle-même sans avancer. Nous trouvons la première disposition dans le sphéromètre [1], la deuxième dans la machine à diviser.

114. Sphéromètre. — Une vis micrométrique tournant verticalement et un écrou monté sur trois pieds disposés dans un même plan suivant les trois sommets d'un triangle équilatéral centré sur l'axe de la vis, tel est en principe le sphéromètre, appareil destiné à mesurer la flèche et, par suite, le rayon d'une calotte sphérique, ou plus généralement toute petite épaisseur. La vis est en acier et du pas d'un demi-millimètre, elle se termine en bas par une pointe mousse P, en haut par un plateau LL′ divisé sur sa circonférence en 500 parties égales et surmonté d'un bouton fileté D servant à la manœuvrer. L'écrou est creusé au milieu d'un trépied en bronze reposant par trois pointes mousses A, B, C, sur un plan de verre *douci* à l'émeri. A l'un des pieds est fixée une règle verticale RR′ dont le

[1] La même disposition s'observe dans le *compas d'épaisseur* figuré ci-contre

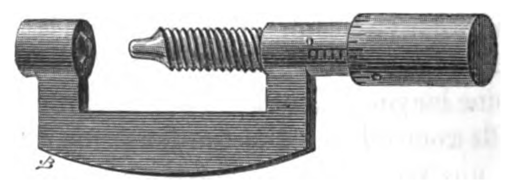


Fig. 186

et qui permet de mesurer aisément une épaisseur à $\frac{1}{20}$ de millimètre près.

rd divisé en demi-millimètres vient raser la surface du plateau ; on a ainsi en regard deux divisions : les divisions de la règle diquant les tours entiers de la vis et les divisions du plateau corres-

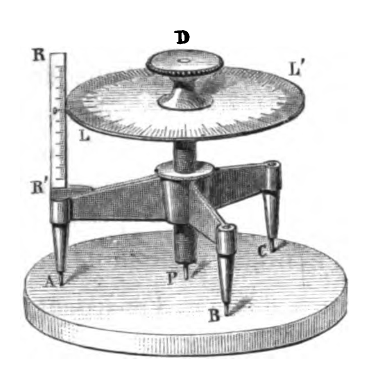


Fig. 187

pondant aux $\frac{1}{500}$ de tour. Pour mesurer avec le sphéromètre une épaisseur donnée, l'épaisseur d'une lame de verre, par exemple, on commence par déterminer le zéro de l'appareil, c'est-à-dire la position de la vis pour laquelle sa pointe est dans le plan des trois pointes du trépied. La pointe de la vis étant d'abord au-dessus de ce plan, l'appareil reposera sur ses trois pieds et sera en équilibre parfaitement stable ; si alors on abaisse graduellement la vis jusqu'à ce que sa pointe sorte du plan des pointes du trépied, l'un des pieds quittera le plateau de verre dépoli, de façon que le sphéromètre sera supporté par la pointe de la vis et les deux autres pieds. On reconnaîtra facilement qu'il en est ainsi en appuyant le doigt sur le plateau supérieur et en essayant, soit de le faire basculer autour de la pointe centrale, chacune des pointes du trépied quittant successivement le plan de verre, soit de le faire tourner autour de cette même pointe, les pieds frottant avec un grincement particulier. On relève lentement la vis jusqu'à ce que ces deux mouvements soient devenus impossibles : sa pointe ne dépasse donc plus, mais il se peut qu'on l'ait trop haussée. Pour le reconnaître, on l'abaissera ; mais auparavant on notera la division du disque qui est en regard de la règle alors qu'aucun mouvement n'est plus possible. On notera de même la division du disque au moment où le sphéromètre commence à céder au doigt qui le sollicite ; et resserrant gra-

duellement les deux limites, on arrivera à deux lectures diffé
seulement d'une ou deux divisions et comprenant le zéro cher
On aura ainsi, en y joignant la division de la règle, la position
zéro à $\frac{1}{500}$ de tour, c'est-à-dire à $\frac{1}{1000}$ de millimètre près. Le
une fois déterminé, on glissera la lame dont on veut mesu
l'épaisseur sous la pointe centrale du sphéromètre et on recomme
cera la même série d'opérations : quand on aura amené la poi
centrale à toucher la lame, les trois autres pointes appuyant sur
plan de verre, il suffira de lire sur la règle d'une part, sur le pl
teau d'autre part, la nouvelle position de la pointe. La différen
entre les deux lectures donnera l'épaisseur cherchée à $\frac{1}{1000}$ o
$\frac{2}{1000}$ de millimètre près.

Si la lame à mesurer ne pouvait être placée directement sou
la pointe de la vis, on la recouvrirait d'une plaque de verre bie
plane et d'épaisseur connue, et même, dans le cas de lames trè
minces, comme des feuilles d'or battu, on en superposerait plusieur
sous la lame de verre. On obtiendra également le diamètre d'un
fil, d'un cheveu, en introduisant sous la plaque de verre d'épaisseur
connue trois brins de fil ou de cheveu disposés en triangle.

Pour mesurer le rayon de courbure d'une surface sphérique, et
en particulier d'une lentille, on mastiquera la lentille SS′ dans une

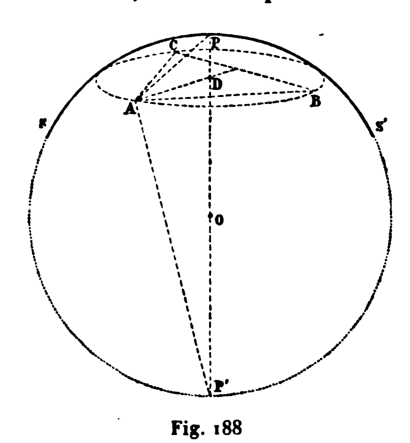


Fig. 188

cavité creusée à l'intérieur d'un morceau de bois; on posera le sphéromètre sur la lentille par ses trois pointes extérieures A, B, C, et on

descendre la vis jusqu'à ce que sa pointe P vienne toucher la face de la lentille; on lira la position de cette pointe. Puis on isportera le sphéromètre sur son plan de verre, et on mesurera la gueur dont il faudra descendre la vis pour revenir au zéro : on maîtra ainsi la flèche $PD = f$ de la calotte sphérique ayant pour e le petit cercle circonscrit au triangle équilatéral formé les trois pointes extérieures. Soient l le côté de ce triangle, rayon du cercle circonscrit ABC, $r = \frac{l}{\sqrt{3}}$; d'autre part, on a $= f(2x - f)$, en appelant x le rayon de courbure cherché OP; on lonc

$$x = \frac{l^2 + 3f^2}{6f}.$$

Dans les anciens modèles, l restait invariable, et l'usage de haque appareil était par suite limité. Une disposition fort simple ermet d'appliquer le même sphéromètre à des lentilles d'ouverture rès différentes : les pointes mousses peuvent se visser à volonté ans des trous groupés de telle façon que les trous de même numéro orrespondent aux sommets d'un même triangle équilatéral dont ce numéro indique le côté.

Si l'on répète plusieurs fois une même mesure au sphéromètre, on constate ordinairement des différences de 1 ou 2 divisions, d'où l'on doit conclure qu'avec l'appareil tel qu'il est construit on ne peut pas pousser l'approximation plus loin; il serait donc illusoire d'augmenter le nombre des divisions du plateau surmontant la vis. Le verre, en effet, cède un peu sous la pointe, et pour avoir des mesures rigoureusement exactes, il faudrait presser toujours également la pointe contre son support, ce qui est difficile avec l'appareil ordinaire. M. Perreaux a cherché à remédier à cet inconvénient en prenant pour pointe l'extrémité d'une tige traversant la vis dans toute son étendue. Maintenue à sa partie supérieure par un renflement, la tige suit la vis dans son mouvement d'ascension; quand la vis s'abaisse, elle l'accompagne encore, mais dès que son extrémité touche le plan de verre, elle s'arrête, et la vis seule continue à descendre. L'expérimentateur est averti de l'arrêt de la tige par le mouvement d'une aiguille qui accuse sur un cadran la lon-

gueur dont on a dépassé la position exacte de la vis : cette aiguill forme le grand bras d'un levier dont le petit bras est sollicité pa un autre levier reposant sur la tête de la tige; en ramenan toujours l'aiguille au zéro, on appuie toujours également l pointe contre son support, et la rigueur des mesures est assurée [1] Mais alors l'imperfection des surfaces sur lesquelles on opèr intervient à son tour et il sera, d'ordinaire, inutile de cherche une approximation supérieure au micron. Une précision plu grande n'a guère d'intérêt d'ailleurs que dans le cas où l'o veut étudier point par point une surface afin de reconnaître elle a exactement partout le même rayon de courbure, ou si elle e bien plane; et pour cette étude les procédés optiques que nous feron connaître dans la suite sont généralement plus rapides et plus préci

115. Machine à diviser. — La machine à diviser se compos essentiellement d'une vis micrométrique saisie à ses deux extrémité dans deux tourillons fixes qui ne lui permettent aucun mouvemen dans le sens de son axe, et d'un écrou mobile qui entraîne u style servant à tracer les divisions ainsi qu'un microscope propr à les vérifier.

Description. — La réalisation matérielle de cette idée a ét l'origine d'appareils assez variés de forme, parmi lesquels nou prendrons pour type la machine de Perreaux : un système à frac tions fixé à l'extrémité de la vis règle mécaniquement la valeu de chaque division, tandis que le traçoir donne de lui-même au traits les diverses longueurs voulues, ce qui rend la manœuvre plu facile et plus sûre.

La vis micrométrique VV, dont le pas est d'un demi-millimètre e dont l'exactitude géométrique fait toute la valeur de la machine, es logée à l'intérieur d'un solide banc en fonte sur lequel glisse le cha riot entraîné par l'écrou et portant le traçoir. A l'une des extrémités d banc, un coussinet creusé d'une double gouttière reçoit la tête de l vis sur laquelle ont été ménagés deux filets en saillie s'engageant dan deux gouttières correspondantes; à l'autre extrémité, la vis micromé

(1) Le double levier peut être avantageusement remplacé par un niveau bulle d'air très sensible, dont la bulle est remise entre ses repères avant chaqu lecture.

ue s'appuie contre la pointe d'une petite vis dont on règle la ssion de manière que la vis principale tourne sur elle-même sans

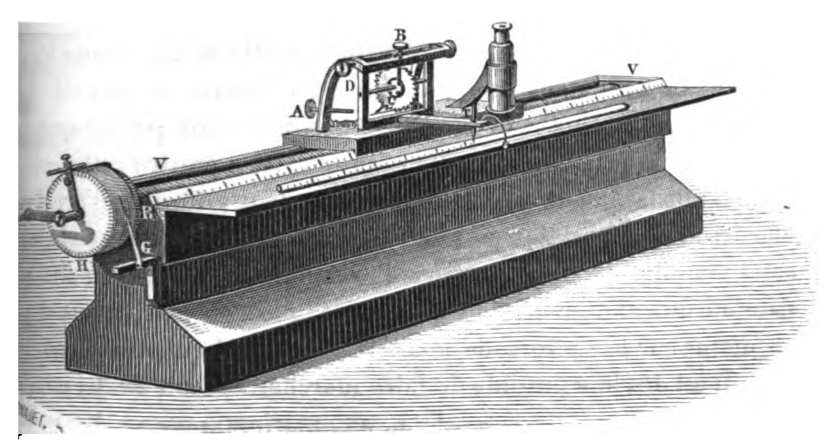


Fig. 189

rouver aucun déplacement suivant l'axe. La rotation de cette vis VV e s'effectue d'ailleurs que dans un sens toujours le même : en effet, la anivelle sur laquelle agit l'opérateur fait tourner une roue H librement mobile autour de l'arbre de la vis et reliée par un cliquet à une oue à rochet R calée sur ce même arbre; cette deuxième roue suit

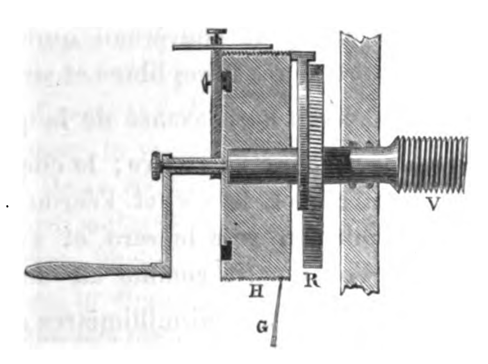


Fig. 190

la première quand celle-ci tourne dans un certain sens, tandis qu'elle reste immobile si la première roue se meut en sens contraire (1) : la

(1) Au lieu de la roue à rochet et de son cliquet, il est préférable d'employer un mécanisme agissant d'une manière continue et permettant de faire tourner la vis d'un angle absolument quelconque dans un sens ou dans l'autre.

vis tourne donc dans un sens seulement et l'écrou ne marche que dans une direction. La roue à rochet a deux cent cinquante dents et la roue motrice porte sur l'une de ses faces une division en deux cent cinquante parties égales, devant laquelle se meut une alidade pouvant se fixer dans une position quelconque au moyen d'une vis de pression. Une rainure héliçoïdale décrivant quinze spires est tracée sur le pourtour de cette roue motrice : contre cette rainure appuie une languette ou gouvernail G [1] ; deux goupilles d'arrêt sont placées l'une à l'origine de l'hélice en face de la division o de la roue : cette goupille est fixe ; l'autre à l'extrémité de l'alidade : elle consiste en une tige cylindrique en acier que l'on peut avancer plus ou moins sur la rainure de manière à limiter la course du gouvernail. Il est dès lors possible de faire marcher l'écrou de tel nombre de demi-millimètres et de $\frac{1}{250}$ de demi-millimètres, c'est-à-dire de millimètres et de $\frac{1}{500}$ de millimètres que l'on voudra. Soit, par exemple, de 1 millimètre $\frac{385}{500}$ ou de 3 demi-millimètres et $\frac{135}{250}$ de demi-millimètre : on amènera le repère tracé sur l'alidade en face de la division 135 de la roue, puis on règlera la goupille de l'alidade de façon à laisser libres les trois premières spires de la rainure et à barrer la quatrième ; si alors, partant du zéro, on fait tourner la manivelle dans le sens direct, le gouvernail quittera la goupille fixe, parcourra les trois premières spires libres et viendra buter aux $\frac{135}{250}$ de la quatrième : l'écrou aura avancé de la quantité voulue. Avec la manivelle on reviendra en arrière ; le cliquet glissera sur les dents de la roue à rochet, la vis et l'écrou ne bougeront pas, le gouvernail retournera vers le zéro et s'arrêtera contre la goupille fixe. Que l'on reparte comme au début, et l'écrou avancera une deuxième fois de 3 demi-millimètres et $\frac{135}{250}$ de demi-millimètre et ainsi de suite.

L'écrou est un cube en bronze pénétrant dans le chariot et l'entraînant avec lui ; mais comme le mouvement de tout ce système

[1] Le gouvernail est ordinairement remplacé aujourd'hui par un pignon denté engrenant avec la rainure héliçoïdale et portant deux arrêts, l'un fixe, l'autre mobile, contre lesquels viennent respectivement frapper les deux goupilles.

s'effectue que dans un sens, le chariot peut se séparer de l'écrou
i lui-même peut s'ouvrir et, une fois ouvert, glisse sur la vis
ns difficulté.

Le chariot consiste en une plaque de fonte supportée par deux ils fixés au banc parallèlement à l'axe de la vis : l'un des rails est an à sa partie supérieure, l'autre taillé en biseau, et le chariot engage sur les rails par deux rainures qui les emboîtent parfaitement; il suivra donc exactement l'écrou sans peser sur la vis, ce ui risquerait de la déformer. Sur le chariot est installé le traoir T : le burin est porté par une languette en cuivre, mobile dans n plan vertical, et que l'opérateur tire à lui et en bas au moyen 'un cordon terminé par un petit poids; l'autre extrémité de ette languette s'attache à la traverse horizontale inférieure d'un adre rectangulaire mobile autour de son côté supérieur comme xe. Deux ressorts en hélice fixés à la traverse inférieure ramènent le cadre dans sa position première quand on l'en a écarté pour tracer un trait; une vis A servant de butoir règle cette position initiale. Pour arrêter les traits et marquer plus longuement certaines divisions, on a fixé au cadre en son milieu une traverse horizontale munie de deux roues : l'une C creusée à sa périphérie de quatre cavités dont deux plus profondes (si l'on veut allonger les traits cinq et dix); l'autre D à rochet présentant vingt dents et soudée à la première. Au-dessus de cette première roue est une vis d'arrêt B fixée au support même du cadre : quand on tire sur le traçoir, la roue se soulève, et lorsqu'elle vient buter contre la pointe de la vis, le cadre est arrêté et le trait aussi. La roue à rochet s'est soulevée en même temps que l'autre, laissant son cliquet dégagé; mais quand les ressorts à boudin retirent le cadre en arrière, le cliquet rencontre une des vingt dents de la roue à rochet et la fait marcher, ou plus exactement fait marcher les deux roues de $\frac{1}{20}$ de tour. Pour quatre traits consécutifs, la vis d'arrêt rencontrera la surface non creusée de la première roue; ces quatre traits seront égaux. Au cinquième trait, la pointe de la vis s'engagera dans une des cavités, l'arrêt se fera moins tôt, le trait sera plus long. Au dixième trait, la cavité étant un peu plus profonde, le trait s'allongera davantage. D'autre part, la longueur

absolue de tous ces traits se règlera facilement au moyen des vi et B.

La pièce à diviser se fixe sur le banc de fonte sous le traç soit simplement avec de la cire molle, soit au moyen de pinces de ressorts : dans tous les cas, il faut avoir soin de la placer b parallèlement à la vis (ce que l'on vérifiera facilement à l'aide la machine même). Selon que la pièce à diviser sera en verre en métal, on emploiera un diamant ou un burin en acier l'on chargera plus ou moins de petites masses *ad hoc* suivan dureté de la substance et la profondeur que l'on veut don au trait.

Usage. — La manœuvre de la machine est maintenant évident ayant mis en place la pièce à diviser, on établit la position de l'*alida* et celle de sa goupille d'après la grandeur des divisions à tracer, amène le traçoir convenablement réglé en regard du *point où d* se trouver la division zéro. Saisissant alors de la main gauche manivelle et de la main droite la corde du traçoir, on tourne manivelle à faux sens jusqu'à ce que le gouvernail bute contre goupille fixe : on se met ainsi au zéro, sans déranger le traçoir d la position initiale qu'on lui avait attribuée, et on trace un trait. O tourne la manivelle de manière à faire glisser le gouvernail jusqu' la goupille de l'alidade, on tire sur le cordon du traçoir ; on tourn à faux sens pour ramener le gouvernail contre la goupille fixe, on repart, on arrive à la goupille de l'alidade, on trace un nouveau trait, et ainsi de suite.

En même temps que le chariot se déplace, il entraîne un repère qui, se mouvant devant une division en demi-millimètres inscrite sur le banc, indique à chaque instant le nombre de demi-millimètres parcourus par le chariot.

On peut au moyen de la machine à diviser résoudre l'un des trois problèmes suivants :

1° Tracer des divisions équidistantes d'une longueur donnée : dans ce cas, la grandeur des divisions étant connue, on procèdera comme il a été dit plus haut.

2° Partager une longueur donnée en un certain nombre de parties égales : on mesurera la longueur proposée à l'aide de la machine même (voir 3°), on divisera l'expression numérique de cette mesure

par le nombre de parties voulu et on aura la longueur d'une partie, ce qui revient au premier cas.

3° Mesurer une longueur donnée: on amènera le fil du réticule du microscope sur l'une des extrémités de la longueur à évaluer, on lira, au repère du chariot et sur la tête de la vis, la position actuelle du chariot; on tournera la manivelle jusqu'à ce que le fil du réticule couvre l'autre extrémité de la longueur à mesurer et on lira de nouveau la position du chariot; la différence des deux lectures sera l'expression de la longueur cherchée.

Le microscope du chariot servira également toutes les fois que l'on voudra vérifier une graduation déjà faite, ou en cours d'exécution; il permettra aussi de placer exactement le traçoir dans la position initiale quand le zéro devra être en un point déterminé, quand, par exemple, il s'agira de prolonger une division sur une longueur plus grande que la vis de la machine.

Étude de la vis. — Quelque soin qu'y apporte le constructeur, il n'obtiendra jamais une vis parfaite dont l'écrou progresse à chaque instant d'une quantité rigoureusement proportionnelle à l'angle dont a tourné la vis. Il faut ici, comme toujours, compter avec l'imperfection de l'outil; et pour pouvoir répondre de l'approximation attribuée à l'appareil (le $\frac{1}{500}$ de millimètre dans le modèle décrit), on devra d'abord étudier la vis sur toute son étendue à ce degré même d'approximation. Prenant une petite longueur, on la mesurera successivement avec chacune des portions de la vis, on déterminera ainsi les angles correspondant à un même déplacement de l'écrou dans les diverses régions de l'instrument, et on pourra tracer la courbe ou faire la table des longueurs correspondant à un même angle successivement décrit par les différentes spires de la vis. On sera dès lors assuré de faire toutes les mesures à $\frac{1}{250}$ près du pas de la vis, la machine étant construite pour cette approximation. Quant à la valeur absolue du pas, on ne pourra la fixer que si l'on dispose d'un étalon métrique dont la longueur sera comparée avec une portion de la vis préalablement étudiée ainsi qu'il vient d'être dit.

Machines automatiques. — Dans cette étude de la vis, comme en général dans l'emploi de la machine, on devra soigneusement se

mettre en garde contre les variations de température, qui modifien et le pas de la vis et la longueur à mesurer : la seule proximit du corps de l'opérateur cause des perturbations qui ne sauraien être négligées. Aussi les appareils automatiques sont-ils de beau coup préférables. Ils évitent les erreurs dues à la présence d l'opérateur, et en même temps celles qui proviennent de so inattention ou de sa fatigue : enfin le tracé mécanique des divi sions est plus régulier, puisque l'effort reste toujours constant A l'Exposition universelle de Paris en 1867 figurait une machin automatique de Perreaux, divisant le millimètre en 1500 partie égales [1].

Emploi de la machine à diviser comme comparateur. — L machine à diviser peut évidemment tenir lieu de comparateur il se présente alors cette circonstance favorable que l'on n'utilis qu'une très petite partie de la vis, toujours la même, et dont il suffi d'être sûr.

Machine à diviser les cercles. — La machine à diviser les cercles inventée par le constructeur anglais Ramsden, et perfectionné depuis par Gambey, se rapproche beaucoup de la machine à divise les lignes droites : elle se compose essentiellement d'une vis d'u pas très régulier, engrenant tangentiellement avec les dents d'u plateau circulaire mobile autour de son centre. Le plateau a 72 dents parfaitement égales (vérifiées au moyen de la machine à di viser la ligne droite); il tourne donc d'un demi-degré à chaque tou de la vis tangente; les fractions de tour s'obtiennent comme dan la machine à diviser la ligne droite. Le cercle à graduer est plac sur le plateau, de telle façon que les centres coïncident; le systèm se meut au-dessous d'un traçoir identique à celui que nous avon décrit plus haut, et se déplaçant également sur deux rails de ma nière à pouvoir se fixer à la distance voulue du centre, le burin s mouvant toujours suivant le rayon.

116. Réticule à vis micrométrique. — La vis micromé trique combinée avec un réticule examiné lui-même à un grossis sement convenable, fournit le procédé le plus rigoureux pour me-

[1] Ces divisions se font sur verre avec un diamant très fin et servent de mi cromètres ou de réseaux.

irer une longueur ou un angle. C'est Auzout qui, le premier, imagina cette combinaison en vue de mesures astronomiques (1). Introduite depuis dans tous les instruments de précision, elle assure au comparateur une sensibilité que l'on ne pouvait atteindre par l'emploi du vernier, elle donne un moyen exact d'étudier les dilatations linéaires, etc. Nous décrirons seulement ici, à titre d'exemple, la disposition adoptée pour évaluer les angles dans les grands cercles astronomiques.

La division tracée sur le cercle indique immédiatement l'angle à 5′ près. Pour avoir la fraction de 5′ on se sert d'un microscope fixe regardant la division du cercle mobile autour de son centre et entraîné par la lunette ; dans le plan focal de l'oculaire est une pièce immobile, en forme de crémaillère, que l'on voit sur le côté du champ ; dans le même champ se dessine le réticule, qui est tendu sur un châssis soutenu par l'écrou d'une vis micrométrique fixe. La tête de cette vis porte un disque divisé en 60 parties égales ; en regard du disque est une règle servant d'index et portant elle-même des divisions égales au pas de la vis. Quand le zéro de la règle et le zéro du disque sont en face l'un de l'autre, le point de croisement des fils du réticule (2) est à peu près à la hauteur du centre de l'ouverture circulaire de la crémaillère. Quelle que soit d'ailleurs la position du réticule à cet instant, l'horizontale menée par le point de croisement lorsqu'on est ainsi au zéro de la règle et du disque, sert de repère fixe dans les lectures sur le cercle. On voit généralement dans le champ trois traits des divisions du cercle, et l'instrument est réglé de telle sorte que la distance de deux traits corresponde à cinq dents de la crémaillère. D'autre part, le pas de la vis micrométrique est tel que, pour passer d'un trait du cercle à l'autre, il faut exactement cinq tours de la vis. Supposons ces conditions remplies. L'arc qu'il s'agit de lire se termine à l'horizontale passant par le point d'intersection des fils du réticule au zéro : il se compose d'un certain nombre de degrés et d'un multiple de 5′ qu'on lit

(1) Auzout, *Lettre à Oldenburg*, secrétaire de la Société royale de Londres, en date du 26 décembre 1666 ; et *Traité du micromètre*. Paris, 1667.

(2) Aux fils croisés on substitue généralement aujourd'hui deux fils voisins parallèles : il est plus facile en effet d'amener un trait exactement au milieu de l'espace compris entre deux fils parallèles que sur une intersection qui a toujours une certaine épaisseur.

directement : soit 48° 25′, plus un reste. Pour évaluer ce reste, agit sur la tête de la vis micrométrique de façon à amener le poi croisement des fils du réticule sur le trait du cercle le plus voisi l'échancrure circulaire du côté de la vis, sur le trait 25 dans l'exem

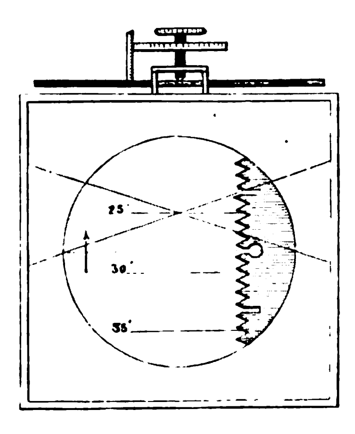


Fig. 191

figuré ci-contre. On fait par conséquent exécuter à la vis un nombr de tours immédiatement indiqué par les pointes de la crémaillère (ic 3 tours) plus une fraction de tour qu'on lira sur le disque de la vi micrométrique : soit 12 la division du disque en regard de l'index, i faut ajouter aux 48°25′ déjà lus 3′12″. On peut d'ailleurs facilemen apprécier à l'œil les $\frac{1}{10}$ de division du disque, et par suite évaluer l $\frac{1}{10}$ de seconde ; on aura ainsi 12″,3, je suppose, de sorte que l mesure de l'arc sera finalement 48°28′12″,3.

Si le cercle est parfaitement gradué, la seule condition rigoureuse à remplir pour pouvoir compter sur ces lectures sera qu'il y ait exactement cinq tours de la vis entre deux coïncidences du croisement des fils du réticule avec deux traits successifs du cercle ; mais cette condition, fût-elle remplie à un moment donné, ne le serait plus dans la suite à cause de la dilatation du cercle due aux changements de température. On mesurera donc, avant la lecture, la distance d'un trait au suivant et l'on trouvera, par exemple, que les 5′ qui représentent cette distance équivalent à 5 tours + 3 divisions : alors 1′ équivaut à $1^{\text{tour}} + 0^{\text{div.}},6$, ou 1^{tour} vaut $1' - 0'',6$. En opérant

si, on verra que la correction peut s'écrire $a+bt$, t étant la ıpérature indiquée par quatre thermomètres encastrés dans le cle, a et b deux constantes à déterminer pour chaque instrunt.

On atténuera les défauts de centrage et de graduation du cercle multipliant les lectures, comme avec le vernier circulaire : on t ordinairement pour le même angle 6 lectures à 6 microscopes férents ; puis on donne au cercle successivement divers calages r son axe et on prend la moyenne de toutes les observations : est la *méthode de réitération*. On élimine ainsi rapidement par mpensation les erreurs systématiques de la graduation, tandis que s erreurs accidentelles s'affaiblissent proportionnellement à la cine carrée du nombre des observations.

3° LEVIER A RÉFLEXION.

117. Méthode de Poggendorff pour la mesure des petits angles au moyen d'un miroir. — Poggendorff, le premier, eut l'idée, devenue depuis si féconde entre les mains de Gauss et Weber, de mesurer les petits angles par la déviation d'un rayon lumineux tombant sur un miroir perpendiculaire au côté mobile de l'angle.

Soit A'CA l'angle décrit par la droite AC mobile autour du point C : pour mesurer cet angle, fixons en A un petit miroir mm_1 perpendiculaire à AC, et en regard de ce miroir, à une certaine dis-

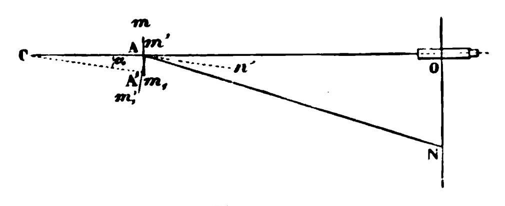


Fig. 193

tance, plaçons une règle divisée ON parallèle au miroir. Dans la position initiale du miroir, la division qui se trouve sur le prolongement de CA, le zéro je suppose, est vue dans le miroir par l'observateur visant avec une lunette installée au-dessus de la règle dans le

plan vertical CA : le rayon lumineux parti de O et tombant norm lement sur le miroir mm_1 est réfléchi, en effet, sur lui-même et l voir le zéro des divisions de la règle sous le fil du réticule de la l nette. Quand la droite AC vient en A'C, le rayon réfléchi sur m' dans la même direction AO émane d'un certain point N tel qu d'après la loi de réflexion, l'angle d'incidence $Nm'n'$ et l'angle réflexion $n'm'O$ soient égaux, $m'n'$ étant la normale au miroir $m'n$ Mais cette normale est parallèle à CA', donc l'angle $Nm'O$ est double de l'angle à mesurer ACA' ou α; cet angle $Nm'O$ est lui-mên mesuré par sa tangente

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{ON}{AO},$$

si l'on prend $Om' = OA$, ce qui n'introduit qu'une erreur négligeab dès que α est petit et OA suffisamment grand. Mais la petitesse d α permet d'écrire

$$2\alpha = \frac{ON}{AO}.$$

On voit donc que l'angle α, ou plutôt le double de cet angle e mesuré par le numéro n de la division inscrite en N, et que pa suite il n'y a pas de limite à l'exactitude que comporte ce procéd puisque, en donnant à la distance OA la grandeur convenabl on peut mesurer l'angle par une droite ON, aussi longue qu'il ser nécessaire.

118. Levier à réflexion. — Cela posé, prenons un levie reposant en son milieu sur deux pointes P et P' et terminé à chaqu

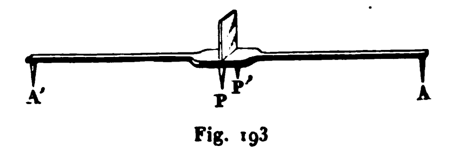


Fig. 193

extrémité par une pointe A, A'; au-dessus des pointes P et P' fixons un miroir parallèle à la ligne de ces pointes et perpendiculaire à la ligne des deux autres AA', et abaissons le centre de

ravité du système aussi près que possible de l'axe AA′ : nous aurons n appareil qui, joint à une échelle verticale, conviendra pour nesurer les petites épaisseurs ou la courbure des surfaces sphéiques, un véritable *sphéromètre à réflexion*. Tel est le levier à rélexion imaginé par M. Cornu [1].

Le levier étant placé sur un plan de verre, et les quatre pointes en contact avec le plan [2], glissons sous les pointes centrales une lame le verre à faces parallèles dont on veuille connaître l'épaisseur ε, le

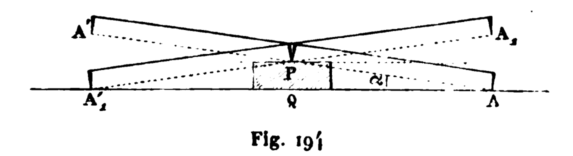


Fig. 194

levier ne pourra plus porter sur ses quatre pointes. Faisons-le basculer d'abord d'un côté, puis de l'autre, et lisons les divisions correspondantes n et $-n'$ de l'échelle (n' sera égal à n si le zéro de l'échelle est sur la normale au miroir). Or, on a

$$\varepsilon = l \sin \mathrm{PAQ} = l \sin \alpha,$$

ou, si l'épaisseur est petite,

$$\varepsilon = l\alpha,$$

l étant la demi-longueur du levier.

Mais, dans le mouvement de bascule, en passant de la position AA′ à la position A_1A_1', le levier et le miroir ont tourné d'un angle double de PAQ ; le rayon réfléchi ayant lui-même tourné d'un angle double du miroir, PAQ est le $\frac{1}{4}$ de l'angle mesuré sur l'échelle divisée, placée à la distance d,

$$\alpha = \frac{n + n'}{4d};$$

[1] Cornu, *Journal de physique*, IV, 7 ; 1875.

[2] Il sera toujours facile au constructeur de réaliser cette condition, mais elle n'est pas indispensable ; si les pointes centrales dépassent un peu, on mesurera leur distance h à la ligne PP′ (en opérant comme nous l'indiquons ici pour mesurer ε), et l'on retranchera cette quantité h des nombres donnés par l'instrument.

et l'épaisseur cherchée ε sera

$$\varepsilon = l\frac{n+n'}{4d}.$$

Nous avons vu comment se détermine la valeur métrique du pas de la vis d'une machine à diviser; nous n'avons pas parlé de cette détermination pour le sphéromètre à vis, parce que la comparaison avec l'étalon métrique est indirecte et difficile [1], si bien que l'on se contente en général de l'affirmation du constructeur, ce qui est peu scientifique. Dans le cas du levier à réflexion, au contraire, on peut aisément mesurer en valeur absolue l, n, ainsi que n' et d : on mesurera $2l$ avec une machine à diviser comparée à l'étalon métrique et par conséquent équivalente à cet étalon ; l'échelle sera tracée ou vérifiée au moyen de la même machine, qui servira encore à contrôler la règle employée pour mesurer d. Toutes les quantités entrant dans la formule seront donc connues en valeur absolue, et il sera facile de connaître chacune à moins de $\frac{1}{1000}$ de sa valeur et par suite d'arriver à une précision de $\frac{1}{1000}$ sur l'ensemble des opérations.

Le levier à réflexion se prête également bien à la mesure de la

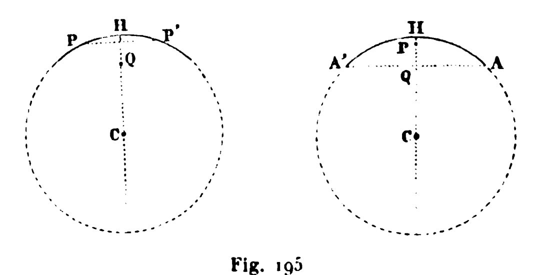


Fig. 195

courbure. Le mouvement de rotation du levier posé sur la surface s'effectue autour de la ligne passant par les deux pointes

[1] Le meilleur moyen est le procédé optique indiqué par M. Mouton, qui permet de comparer rapidement le pas de la vis à la longueur d'onde de la raie D: nous l'examinerons en son lieu. Parfois cependant on préfèrera opérer directement. M. Benoît a donné dans le tome I des *Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures*, C. 21, un exemple de comparaison directe de la vis d'un sphéromètre à l'étalon métrique.

trales P et P' : on mesure donc la flèche de l'arc compris entre points touchés A, A', diminuée de la flèche de l'arc transversal ipris entre les deux pointes P, P'. Comme ces pointes ne sont rtées que de la quantité nécessaire à la stabilité du levier, cette nière flèche est très petite (les flèches variant comme le carré arcs).

En appelant f la flèche PQ, définie par l'angle α, on a

$$f = l \sin \alpha,$$

généralement on prendra simplement

$$f = l\alpha.$$

le point P était en H, on aurait

$$l^2 = 2Rf;$$

'où

$$2R = \frac{l^2}{f},$$

ou

$$2R = \frac{l}{\alpha}.$$

Mais entre H et P il y a un petit intervalle HP $= z$; on doit donc écrire

$$\overline{HA}^2 = 2R(f + z),$$

ou, très sensiblement, puisque z est toujours très petit,

$$l^2 = 2R(f + z).$$

D'autre part, si l'on appelle $2e$ la distance PP', on a

$$z = \frac{e^2}{2R - z},$$

ou approximativement

$$z = \frac{e^2}{2R}.$$

On a donc

$$l^2 = 2R\left(f + \frac{e^2}{2R}\right);$$

d'où

$$2R = \frac{l^2 - e^2}{f},$$

ou

$$2R = \frac{l}{\alpha}\left(1 - \frac{e^2}{l^2}\right),$$

α étant toujours le quart de l'angle observé sur la surface courbe corrigé de l'angle observé sur le plan.

Le levier à réflexion se prête à un grand nombre d'autres applications. M. Cornu a réussi à mesurer avec cet appareil des quantités d'une petitesse comparable aux longueurs d'ondes lumineuses : il suffit pour cela de raccourcir suffisamment le levier et d'augmenter à la fois la puissance de la lunette et la distance de l'échelle divisée. Il est clair néanmoins qu'en raccourcissant ainsi le levier, on perd en précision ce que l'on gagne en sensibilité : il y a là une question d'erreurs relatives facile à apprécier dans chaque cas particulier.

III. — COMPRESSIBILITÉ. DIVISIBILITÉ. CONSTITUTION DE LA MATIÈRE.

119. Propriétés générales non essentielles. — Outre la propriété essentielle d'impénétrabilité et d'étendue sans laquelle la matière ne saurait se concevoir, on trouve dans tous les corps certaines propriétés qui doivent donc être considérées comme absolument générales.

Ces propriétés sont la *compressibilité* et la *divisibilité*.

120. Compressibilité. — Tout corps est susceptible de changer de volume soit sous un effort mécanique, soit par l'action de la chaleur. De ce double fait que nous étudierons plus loin en détail, il résulte que le volume extérieur d'un corps doit être regardé comme une fonction de la température et de la pression, fonction

levenant numériquement la même quand la température et la ession reprennent respectivement leurs valeurs primitives, pourvu itefois que l'effort exercé n'ait pas été trop énergique. La proiété que possède tout corps de céder plus ou moins à une force térieure et, une fois déformé, de tendre à reprendre sa forme emière se nomme l'*élasticité*. On appelle plus particulièrement *latabilité* la propriété de changer de volume sous l'action de la ıaleur.

121. Divisibilité. — Tous les corps peuvent être divisés en partes dont la petitesse défie complètement nos mesures. Un morceau de ıusc qui répand dans un appartement des parcelles odorantes sans esse renouvelées, n'aura cependant après des années éprouvé qu'une erte de poids insignifiante. $\frac{1}{3\,000\,000}$ de milligramme de chlorure de sodium suffit pour colorer en jaune la flamme du gaz d'éclairage (Kirchhoff et Bunsen). La rosaniline communique une coloration sensible à 100 000 000 de fois son poids d'alcool (Hofmann). Mais ce qui confond surtout notre esprit, c'est la ténuité des éléments anatomiques qu'il faut admettre dans les plus petits êtres perceptibles au microscope. Que peuvent être ces éléments chez des infusoires longs à peine d'un micron et qui cependant ont une nutrition et une circulation?

De ce que la matière est ainsi réellement divisible à un point extrême, devons-nous conclure qu'elle est divisible à l'infini [1]? Rien ne nous y autorise; et, quand Anaxagore de Clazomène (450 av. J.-C.) enseignait la divisibilité indéfinie de la matière en se fondant sur ce que les parties d'un corps si petites qu'elles soient sont identiques à ce corps et par conséquent divisibles comme lui, il s'appuyait sur une affirmation absolument gratuite. A cette *doctrine de l'homœomérie* (ὁμοῖος semblable, μέρος partie) *ou de l'homogénéité* (ὁμός semblable, γένος race) se rallièrent Platon et Aristote, ainsi que les Néoplatoniciens de l'école d'Alexandrie et plus tard les écoles du moyen âge où Aristote régnait

[1] Voir Wurtz, *La théorie atomique des corps*. Paris, Baillière, 1879, p. 222; et Ditte, *Exposé de quelques propriétés générales des corps*. Paris, Dunod, 1881, p. 155.

sans rival. Ce fut la même idée qui, dans la fameuse querelle du vide et du plein, guida Descartes lorsqu'il remplit tout l'espace d'une matière continue, siège de ses fameux tourbillons : de la continuité il concluait la divisibilité indéfinie. La même conclusion découle encore de l'hypothèse dynamique mise en avant par les philosophes allemands au commencement de ce siècle : Kant et Schelling par des voies diverses arrivent également à proclamer la matière continue et par conséquent divisible à l'infini ; et de nos jours sir William Thomson a proposé un mode de conception de l'univers assez semblable à l'ancienne idée des tourbillons de Descartes, mais perfectionnée et appuyée sur des faits et qui nous ramène ainsi à l'antique et séduisante hypothèse de l'unité de la matière (1).

En opposition à la doctrine de l'homogénéité se présente la *doctrine des atomes*, imaginée par Leucippe (500 av. J.-C.) et développée par Démocrite d'Abdère. Suivant les philosophes de cette école, les corps sont composés d'une multitude de particules très petites, indivisibles, indestructibles, impénétrables, isolées dans le vide, et en

(1) Tout le monde connaît les couronnes que certains fumeurs savent lancer avec la fumée de leur pipe ou qui se produisent quand une bulle d'hydrogène phosphoré crève à la surface de l'eau. Pour les produire régulièrement, on remplit de fumée une boîte fermée d'un côté par une membrane de caoutchouc et percée d'un petit trou dans la face opposée : un coup sec frappé sur la membrane lance une couronne à travers l'ouverture. Dans ces couronnes tout est mouvement : les particules de fumée roulent sur elles-mêmes et autour de l'axe circulaire de la couronne, le mouvement sur chaque section droite à l'intérieur de l'anneau étant de même sens que le mouvement de translation. Mais ce qu'il faut remarquer, c'est que les particules sont indissolublement liées les unes aux autres et ne peuvent plus se séparer, ainsi que M. Helmholtz l'a démontré analytiquement. L'expérience vérifie assez bien ces propriétés sur les tourbillons de fumée se propageant dans l'air, malgré la viscosité du milieu ; leur forme d'équilibre est le cercle; dérangés, ils y reviennent en oscillant. Si on essaie de les couper, ils se détournent ou s'infléchissent sans se laisser entamer. Si deux tourbillons se rencontrent, ils se séparent après le choc, comme deux corps élastiques, en vibrant énergiquement. Un cas curieux est celui de deux tourbillons se suivant parallèlement sur une même trajectoire : celui qui vient le dernier se contracte, accélère sa vitesse, passe à travers le premier qui s'est au contraire ouvert et a ralenti sa marche ; une fois dépassé, celui-ci se serre, se hâte à son tour, et le même jeu recommence. Ces tourbillons indestructibles et indivisibles sont bien les véritables atomes des chimistes : sir William Thomson propose de regarder l'univers comme constitué par de tels tourbillons *insécables*, indestructibles, vibrant au sein d'un fluide parfait, avec une masse et suivant une période déterminées pour chacun d'eux.

›rpétuel mouvement. La théorie atomique se répandit rapide- ıent: nous la retrouvons deux cents ans après adoptée par Epicure, : deux siècles encore plus tard chantée par Lucrèce dans son poème élèbre *De natura rerum*. Gassendi la soutint énergiquement contre lescartes, tandis que Newton l'appelait à son aide pour sortir de impasse où l'avait acculé son calcul de la vitesse du son dans 'air. Enfin est venue la chimie moderne, apportant maint argu- nent indirect en faveur de l'existence des atomes; et aujour- l'hui il paraît difficile de ne pas admettre l'atome, quelque idée l'ailleurs que l'on puisse s'en former. Cependant l'atome n'est ıprès tout et ne sera jamais qu'une hypothèse. Heureusement cette hypothèse n'a pour nous qu'une valeur spéculative : la phy- sique ne considère que la molécule; l'atome est du domaine de la chimie.

122. Constitution de la matière. — La nécessité de la molécule résulte de l'impénétrabilité unie à la déformabilité. Comment en effet concevoir la coexistence de ces deux propriétés autrement qu'en regardant les corps comme formés de *molécules*, c'est-à-dire de portions extrêmement petites, si ténues qu'elles échappent au microscope le plus puissant, mais néanmoins finies, et séparées par des intervalles appréciables, ou *pores moléculaires* [1] ? La notion des molécules n'est donc pas à proprement parler une hypothèse, mais le simple énoncé d'un fait. On ne saurait guère non plus se refuser à croire que ces molécules ne restent point immobiles, mais qu'elles sont animées de mouvements en rapport avec l'état calorifique du corps : les phénomènes de diffusion, d'une part, les effets mécaniques de la chaleur, d'autre part, attestent ces mouvements intérieurs et en déterminent la grandeur. Enfin, par une conception empruntée à la

[1] Ces *pores moléculaires* ne sauraient pas plus être montrés que les molécules : en ce sens donc la porosité n'est pas une propriété que l'observation découvre dans tous les corps. Si au contraire il s'agit des cavités manifestes que présentent un grand nombre de corps, cavités que l'on appelle souvent *pores sensibles*, leur existence n'ayant jamais été constatée dans certains corps, le verre par exemple, ne peut pas être considérée comme générale. C'est pourquoi nous n'avons pas fait figurer la porosité parmi les propriétés générales de la matière.

doctrine de la continuité, on se figure les intervalles qui existen entre les molécules comme remplis par un milieu très raréfi élastique, vibrant, l'*éther*. Cette idée que l'on pourrait faire r monter à Platon et à Aristote et que Descartes a certaineme beaucoup contribué à introduire, a reçu des admirables trava de Fresnel tant de preuves solides que l'on est en droit de di qu'il y a peu de choses actuellement aussi certaines que l'exi tence de l'éther, de ce milieu matériel, inerte, élastique, ass subtil pour pénétrer partout, à l'intérieur des corps comme da les espaces planétaires et servant d'intermédiaire entre toutes l parties de l'univers.

En résumé, pour les physiciens d'aujourd'hui, un corps e formé de molécules, séparées par des intervalles remplis d'éth et animées de mouvements au milieu de ce fluide.

La tendance de tout corps déformé à reprendre son volume pri mitif nous montre en outre à l'intérieur des corps l'existence d forces que nous supposerons appliquées aux molécules, répulsive pour certaines distances, attractives pour d'autres, et devenant ra pidement insensibles quand la distance devient appréciable. E ajoutant cette idée des *forces moléculaires* à la doctrine actuelle su la constitution de la matière, nous pourrons rendre compte de phénomènes d'élasticité et aussi des caractères correspondant au différents états des corps.

123. Divers états des corps. — On appelle ainsi trois ma nières d'être sous lesquelles se présentent les corps et que l'on peu définir de la façon suivante :

A l'*état solide* la forme et le volume sont également déterminés à l'*état liquide*, il y a encore un volume, mais il n'y a plus de form propre; à l'*état gazeux*, il n'y a plus ni forme ni volume apparte nant au corps.

Dans ces deux derniers états où le corps, se modelant de lui-même sur le vase qui le renferme, est par conséquent éminemment défor mable, il prend souvent le nom de *fluide*. La différence essentielle entre les deux catégories de fluides consiste dans l'*expansibilité* des gaz, c'est-à-dire dans leur tendance à augmenter sans cesse de volume. Une vessie dégonflée et fermée, placée sous le récipient

la machine pneumatique, se gonfle complètement, lorsqu'on fait le vide, par l'expansion de la petite quantité d'air qu'elle contenait encore. Si on laisse rentrer l'air, la vessie s'aplatit peu à peu, montrant ainsi la grande compressibilité des fluides aériformes. Les liquides, au contraire, ont un volume aussi nettement



Fig. 196

déterminé que les solides, et leur compressibilité est également très faible.

Dans les solides, la résultante des actions qui tiennent assemblées les diverses parties du corps, la *cohésion* est telle qu'il faut employer des efforts énergiques pour modifier la situation relative des molécules. Dans les liquides, les forces moléculaires empêchent les molécules de se disperser comme de se rapprocher, mais leur laissent la liberté de rouler les unes sur les autres avec une extrême facilité. Dans les gaz, les actions répulsives sont prépondérantes.

Il est nécessaire d'ajouter toutefois que les trois états ainsi définis sont des types autour desquels se groupent les différents corps naturels par une série en réalité continue. Tous les intermédiaires existent entre un solide comme le verre ou l'acier et un liquide tel que l'alcool. Les liquides visqueux, les *pâtes*, les *gelées*, conduisent graduellement du liquide au solide. Et à ce propos, il est curieux de remarquer les différences entre les pâtes si facilement déformables et les gelées élastiques et aux arêtes vives. La

transition n'est pas moins ménagée entre un gaz et son liqui
Au delà du gaz enfin il y a tous les degrés possibles jusqu'à
matière radiante.

Un même corps peut affecter, d'une manière plus ou mo
continue, ces divers états.

LIVRE II

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES SOLIDES

CHAPITRE PREMIER

STRUCTURE

124. Formes cristallines. — Lorsqu'un corps se solidifie librement, soit par refroidissement graduel s'il était à l'état de liquide ou de vapeur, soit par l'évaporation lente d'un menstrue qui le tenait en dissolution, il prend en général l'aspect de polyèdres à faces planes, à arêtes vives ; il *cristallise*. Cette forme géométrique des solides apparaît si nettement dans certains échantillons naturels (quartz) que de tout temps ces cristaux ont attiré l'attention. Les anciens toutefois n'y voyaient que de « purs jeux de la nature ». Quand on se mit à observer attentivement, on reconnut au contraire la fréquence des formes cristallines dans les solides non organisés. L'expérience se joignit à l'observation. Rouelle enseigna à obtenir le soufre en belles aiguilles cristallines par le refroidissement lent d'un creuset plein de soufre fondu, ainsi qu'on le répète encore aujourd'hui dans tous les cours de chimie. Brongniart fit cristalliser le bismuth par un procédé analogue. Ce que l'on avait pris d'abord pour un accident était la règle générale : l'état cristallin est l'état habituel des solides inorganisés.

Ce fait est d'une extrême importance, moins encore pour la beauté ou la singularité des formes que revêtent maintes espèces minérales, qu'à cause des données que cette configuration extérieure nous fournit sur l'arrangement intérieur des molécules.

Remarquons d'abord que cet arrangement est nécessairement soumis à certaines lois évidentes *a priori*, en dehors de toute observation, car elles résultent directement de la notion de l'homogénéité.

125. Homogénéité, isotropie. — Un corps est dit homogène (ὁμός, semblable; γένος, espèce) lorsque dans toutes les parties extrêmement petites, mais finies, dont l'ensemble constitue le corps, il présente les mêmes propriétés. Si cette identité de propriétés se manifeste en outre dans toutes les directions que l'on peut considérer à l'intérieur de la substance, comme il arrive dans les gaz, les liquides, et les solides analogues au verre, le corps est dit isotrope (ἴσος, égal; τρέπω, tourner). Il peut se faire au contraire que le corps homogène ait des propriétés différentes dans les différentes directions : ainsi, dans un cristal de quartz ayant la forme d'un prisme hexagonal, la résistance à la déformation, la dilatation sous l'influence de la chaleur, la conductibilité calorifique ou électrique, l'action sur la lumière ne sont pas les mêmes suivant l'axe du prisme ou suivant une ligne perpendiculaire à cet axe. Pour qu'un corps soit isotrope, il faut que si d'un point quelconque du corps on mène dans une direction quelconque une droite de longueur l, très grande par rapport à la distance moyenne de deux molécules, on rencontre toujours sur cette droite le même nombre n de molécules orientées de toutes les manières possibles. Il faut donc que les molécules soient distribuées dans le corps de façon à ne présenter ni quant au nombre ni quant à l'orientation aucune prédominance dans quelque direction que ce soit. Une irrégularité absolue suffit pour satisfaire à ces conditions.

126. Structure réticulaire d'un solide homogène cristallisé ([1]). — L'arrangement des molécules d'un cristal doit au contraire offrir une certaine régularité.

([1]) Voir Bravais, *Études cristallographiques*. Paris; 1851.

D'abord l'homogénéité exige que dans un corps homogène dont structure n'est pas absolument irrégulière toutes les molécules ient distribuées suivant les nœuds d'un réseau à mailles paralléli-pédiques égales. Soit en effet O une molécule quelconque et soit une molécule voisine, telle qu'entre O et A il n'y en ait aucune itre sur OA. Prolongeons OA dans les deux sens, et sur cette droite

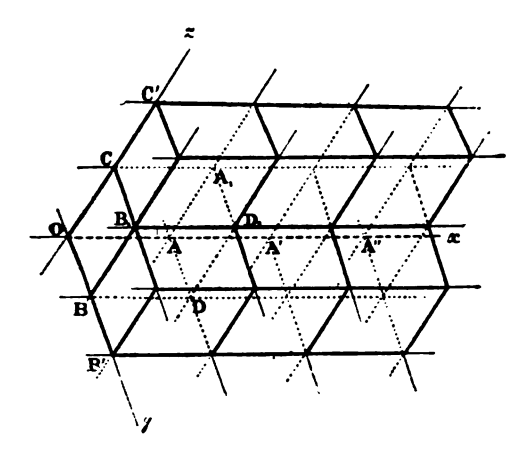


Fig. 197

Ox prenons un point A′ tel que AA′ = OA = a : en A′ sera nécessairement une molécule, car la distribution de la matière doit se répéter identiquement autour de chaque molécule ; en A″ sera une troisième molécule ; et ainsi de suite. Soit maintenant une molécule B extérieure à la droite AA′ et telle qu'en déplaçant Ox parallèlement à elle-même dans le plan AOB on ne rencontre aucune molécule avant B ; par O et B menons la droite Oy : sur cette droite nous aurons une série de molécules à des distances égales b ; et il est manifeste qu'en traçant dans le plan xOy le réseau ayant pour maille le parallélogramme OABD, nous rencontrerons sur les nœuds de ce réseau toutes les molécules situées dans le plan xOy. Soit enfin C une molécule située hors du plan xOy, mais aussi près de lui qu'aucune autre ; déplaçons le plan xOy parallèlement à lui-même de façon à amener le point O successivement sur les points C, C′..... distants entre eux de c, et nous rassemblerons toutes les molécules du corps sur les nœuds du réseau ayant pour maille parallélipipédique OABDCA B_1D_1.

Constance du volume de la maille. — Toute droite menée par deux nœuds passe par une série de molécules équidistantes ; les molécules d'un corps peuvent donc se grouper suivant une infinité de systèmes réticulaires différents qui ont cependant une propriété commune, le volume de la maille. Tous ces systèmes en effet ont même nombre de nœuds égal à celui des molécules du corps ; ils ont donc aussi même nombre de mailles ; d'ailleurs l'espace qu'ils remplissent est le même : le volume de la maille est donc aussi le même. C'est une constante Ω caractéristique du corps.

Généralité de ces principes. — Ces propositions sont générales : elles s'appliquent à tout corps homogène régulièrement constitué, quelle qu'en soit d'ailleurs la nature intime ; et si nous les avons exprimées dans l'hypothèse moléculaire, il est aisé de voir qu'elles ne cesseraient pas d'être vraies lors même qu'on nierait les molécules et qu'on les remplacerait par des mouvements quelconques excités dans un fluide universel.

C'est l'abbé Haüy ([1]) qui, le premier, formula ces principes : ce que nous avons appelé la maille cristalline n'est autre chose que la *molécule intégrante* de l'illustre créateur de la cristallographie. Delafosse ([2]) montra ensuite que cette molécule intégrante devait elle-même être regardée comme un système complexe composé d'un certain nombre de molécules cristallines, rien d'ailleurs dans ces raisonnements *a priori* n'établissant un lien entre la forme ou le volume de la maille et la forme ou la constitution de la molécule cristalline. L'observation seule pourra nous indiquer cette relation.

Des principes déjà établis se déduisent plusieurs conséquences.

Clivage. — Si dans un plan réticulaire les molécules sont très rapprochées, la maille parallélogrammique σ y sera petite et le plan réticulaire le plus voisin sera à une distance d grande, de sorte que σd soit toujours égal à Ω. Les forces moléculaires diminuant rapidement avec la distance, on pourra donc facilement séparer ces deux plans. L'observation montre en effet qu'il y a dans les cristaux, ainsi que l'avait déjà remarqué Bergmann ([3]), des plans

([1]) Haüy, *Traité de minéralogie*. Paris ; 1801.
([2]) Delafosse, *Mémoires des savants étrangers*, VIII, 647 ; 1843.
([3]) Bergmann, *Opuscula physica et chemica*. Upsal ; 1779.

de facile rupture, qui pour une substance donnée se coupent sous des angles absolument constants. Par exemple, la calcite (chaux carbonatée) dans les nombreuses formes qu'elle affecte se laisse invariablement *cliver* suivant trois directions distinctes : les faces ainsi obtenues présentent un poli et un éclat qui témoignent nettement que ce sont des *joints naturels*, et les plans de clivage se coupent entre eux sous un même angle de 105°5′. La maille, ou la forme primitive semblable à cette maille est donc un rhomboèdre de 105°5′.

Constance des angles. — Les faces extérieures d'un cristal, étant planes (l'observation nous l'apprend) et contenant les molécules superficielles, sont nécessairement des plans réticulaires. Quand un cristal se forme dans des circonstances déterminées, ce sont, suivant les circonstances et sans que l'on sache pourquoi, certains plans réticulaires qui limitent le solide ; si le cristal s'accroît, de nouvelles mailles se superposent par strates parallèles à celles qui existaient déjà, le même système de plans réticulaires fournissant les faces extérieures du polyèdre aussi longtemps que les conditions extérieures restent les mêmes. On voit d'après cela qu'un cristal est défini par les angles que font entre elles les faces du polyèdre et nullement par les dimensions absolues de ces faces. Cette constance des angles dans chaque variété a été établie pour la première fois par les mesures de Romé de l'Isle [1] qui plaça ainsi la cristallographie sur son vrai terrain.

127. Symétrie des cristaux. — Les cristaux ne se présentent pas à nous seulement avec des faces planes, avec ces arêtes parfaites qui ont fait dire à Haüy que la véritable beauté de ces êtres était caractérisée par la ligne droite ; ils offrent encore une symétrie plus ou moins complète suivant les espèces.

L'édifice cristallin étant constitué par des molécules placées aux nœuds d'un réseau, un mode de symétrie déterminé ne pourra se rencontrer dans un cristal qu'à la condition d'appartenir en même temps à la maille du réseau et à la molécule cristalline. Supposons par exemple que la maille du réseau admette un axe de symétrie

(1) De l'Isle, *Cristallographie*. Paris ; 1783.

quaternaire, c'est-à-dire qu'en faisant tourner le réseau de $\frac{1}{4}$ de circonférence autour de cet axe, on le ramène en coïncidence avec lui-même ou en d'autres termes on le *restitue;* si par cette rotation de 90° on ne rétablit pas en même temps les nœuds du réseau l'édifice cristallin ne sera pas restitué.

128. Systèmes cristallins. — La maille du réseau et par suite le système réticulaire lui-même ne peuvent offrir qu'un nombre déterminé de modes distincts de symétrie. Ce sont ces divers modes de symétrie qui caractérisent les différents systèmes cristallins, savoir :

1° *Système cubique.* — La maille du réseau est un cube. Les éléments de symétrie (centres, axes, plans) de ce solide sont trop connus pour qu'il soit nécessaire de les rappeler. Cristallisent dans ce système : le sel ordinaire, le sel ammoniac, les aluns, les grenats, la blende, la pyrite, l'oxyde de fer magnétique, le diamant, le spath-fluor, la boracite, le fer, l'argent.

2° *Système rhomboédrique* (1). — La maille du réseau est un rhomboèdre, c'est-à-dire un parallélipipède dont toutes les faces sont des rhombes égaux et dont par suite tous les angles dièdres sont égaux ou supplémentaires. Il y a donc : un centre de symétrie; un axe de symétrie ternaire appelé aussi l'axe du rhomboèdre : c'est la ligne joignant les sommets des deux angles trièdres formés chacun de trois angles plans de même espèce, c'est-à-dire tous les trois aigus ou tous les trois obtus; trois axes binaires, joignant les milieux des côtés de l'hexagone en zigzag constitué par les arêtes qui ne rencontrent pas l'axe ternaire; enfin trois plans de symétrie, passant par l'axe et les arêtes culminantes. A ce système appartiennent : le spath d'Islande, le quartz, la tourmaline, le nitrate de soude, l'apatite, l'émeraude, la dioptase, le cinabre, le graphite, le sesquioxyde de fer, l'alumine, le bismuth, l'antimoine.

3° *Système quadratique.* — La maille est un prisme droit à base

(1) Nous réunissons ici le système ternaire dont la maille est un rhomboèdre et le système sénaire dans lequel la maille est un prisme droit ayant pour base un rhombe de 120° et où trois mailles accolées forment un prisme hexagonal régulier dont l'axe est un axe de symétrie sénaire.

carrée. L'axe de ce prisme, que l'on appelle souvent aussi l'axe du cristal, est un axe de symétrie quaternaire. Exemples : le zircon, l'anatase, le rutile, la cassitérite, l'idocrase.

4° *Système orthorhombique.* — La maille est un prisme droit à base rectangle ou à base rhombe. Dans les deux cas, le système est également caractérisé par trois axes binaires, perpendiculaires entre eux. Parmi les corps cristallisant dans ce système nous citerons : l'aragonite, le nitre, la barytine, l'anglésite, la célestine, la topaze, la staurotide, le péridot, la stilbite, la bournonite, le soufre natif.

5° *Système clinorhombique.* — La maille est un prisme droit à base parallélogrammique ou un prisme oblique à base rhombe dont une diagonale est perpendiculaire au plan déterminé par l'autre diagonale de la base et par l'axe du prisme. Dans l'un et l'autre cas il y a un axe de symétrie binaire. A ce système appartiennent : le gypse, le sulfate de fer, le pyroxène, l'amphibole, l'épidote, le sphène, le soufre prismatique, le sucre, l'acide tartrique et les tartrates.

6° *Système anorthique.* — La maille est un parallélipipède oblique quelconque, qui n'a plus d'autre élément de symétrie que son centre. Exemples : le sulfate de cuivre, l'axinite, l'albite.

129. Loi de symétrie ; loi de dérivation. — Dans chaque système, si par suite de certaines influences un plan réticulaire déterminé apparaît comme face externe, tous les plans réticulaires liés à celui-là par la symétrie du système se manifesteront aussi comme faces du polyèdre extérieur. On appelle *forme simple* l'ensemble des faces externes dont la coexistence est nécessaire en vertu de la symétrie du système.

Chaque forme simple peut être considérée comme dérivée de la forme primitive (semblable à la maille) par des modifications sur les angles ou les arêtes de la forme primitive. Ces modifications sont soumises aux deux lois suivantes dues à Haüy :

LOI DE SYMÉTRIE. — *Tous les éléments semblables d'un cristal* [1] *sont toujours simultanément et semblablement modifiés.*

[1] On appelle ainsi les angles ou les arêtes ne différant que par la position actuelle du cristal.

Loi de dérivation. — *Toute facette modifiante intercepte sur les arêtes de la figure primitive des longueurs proportionnelles à des multiples simples de la longueur de ces arêtes.*

Selon Haüy ces lois sont l'expression d'un arrangement des molécules intégrantes qu'il a souvent comparé à une maçonnerie. La figure 198 montre comment il concevait la formation du dodé-

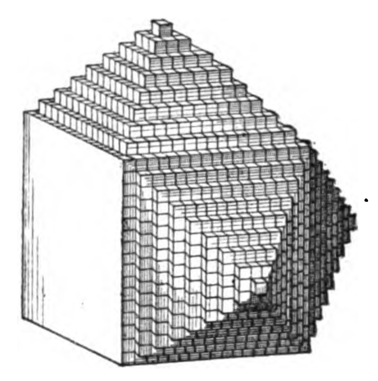


Fig. 198

caèdre rhomboïdal : sur chacune des faces d'un *noyau* cubique il empilait une série de lamelles, de l'épaisseur d'une molécule, et

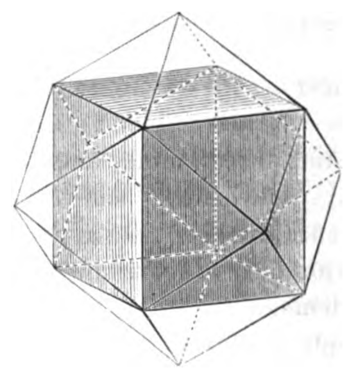


Fig. 199

il affectait ces lamelles d'un *décroissement* progressif d'une rangée de molécules sur chaque bord. On voit aisément qu'en fin de compte cette architecture donne une face *tangente* sur chacune des arêtes de la forme primitive.

30. Holoédrie ; hémiédrie et tétartoédrie. — Les molé-s intégrantes d'Haüy représentent, nous le savons, les mailles éseau sur lequel sont distribuées les molécules du corps cris-ié. A chaque sommet par conséquent des petits cubes de la :e il faut concevoir une molécule cristalline admettant les les éléments de symétrie que le réseau, une molécule que peut se représenter par conséquent comme ayant elle-même rme d'un cube orienté de la même façon que les mailles du au. Quand la symétrie de la molécule est ainsi identique à celle a maille, toute forme simple affecte cette même symétrie, et r rappeler qu'elle possède alors toutes les faces exigées par la étrie propre du réseau on dit que la forme est *holoédrique* (ὅλος, ; ἕδρα, face). Mais si la symétrie de la molécule n'est pas aussi iplète que celle du réseau, une partie seulement des faces que lamerait la symétrie du réseau est nécessaire : à une face inée correspondra alors une forme simple ne contenant qu'une tie des faces de la forme holoédrique. L'observation montre : le nombre des faces est ainsi réduit soit à la moitié soit au irt, de sorte que les deux seuls modes de réduction que pré-ite la nature sont *l'hémiédrie* (ἡμι, à moitié) qui est assez fré-ente et la *tétartoédrie* (τέταρτον, quart) qui au contraire est fort re.

La figure 200 fait voir, d'après Delafosse, comment des molécules

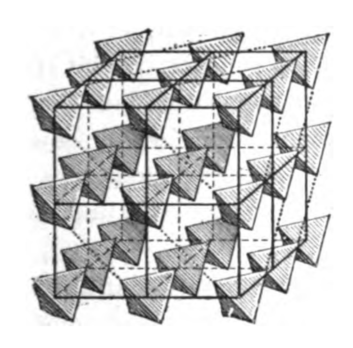


Fig. 200

nyant la forme de tétraèdres réguliers, placées aux nœuds d'une maille cubique, constituent un édifice cristallin dont la symétrie

est moins parfaite que celle du réseau : la molécule en effet n'
plus de centre de symétrie, et les axes quaternaires sont deven
simplement binaires. L'existence d'une troncature symétrique su
un angle n'entraînera plus l'apparition des huit faces de l'octaèdr
régulier; quatre angles seulement sont semblables et seront né
cessairement modifiés en même temps, les faces modifiantes pro

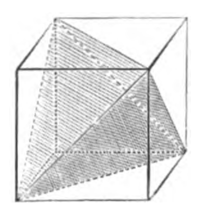
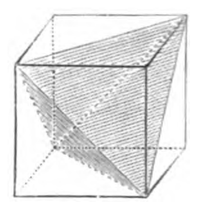



Fig. 201

longées formant un tétraèdre régulier. Si les troncatures portaien
sur les quatre autres angles, on aurait un autre tétraèdre qui, réun
au premier, donnerait la forme holoédrique, l'octaèdre régulier, e
qui pour cette raison est dit *conjugué* de ce premier tétraèdre.

131. Différentes sortes d'hémiédrie. — L'hémiédrie s
manifeste de deux manières différentes :

1° La moitié seulement des éléments semblables de la form
primitive est modifiée pareillement, de deux éléments diagonale
ment opposés un seul se trouvant atteint. Deux faces parallèle
homoèdres ne sauraient donc exister dans ce mode d'hémiédrie qu
l'on appelle en conséquence *hémiédrie à faces inclinées ;* on la dé
signe aussi sous le nom d'*hémiédrie tétraédrique*, le tétraèdre réguli
dérivant ainsi du cube par la modification de la moitié seulemen
des angles du cube.

2° Tous les éléments semblables sont semblablement et simu
tanément modifiés, mais chacun d'eux ne porte que moitié des fac
qu'exigerait la loi de symétrie, les faces supprimées alternant av
celles qui subsistent. Il peut d'ailleurs arriver qu'aux deux extré
mités d'une même diagonale les faces conservées soient parallèl
entre elles ; on a alors l'*hémiédrie à faces parallèles ;* exemple : l
dodécaèdre pentagonal, provenant de l'hémiédrie de l'hexatétraèdr

e peut qu'au contraire les faces subsistantes à l'une des extrémités

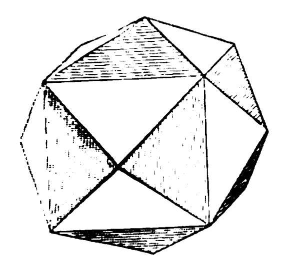
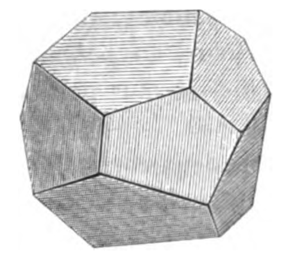



Fig. 202

ient précisément parallèles à celles qui ont disparu à l'autre extré-ité; ce genre de modifications se nomme *hémiédrie plagièdre* ou *hmiédrie non superposable;* exemple : dans le quartz, les faces tra-

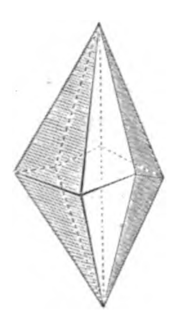
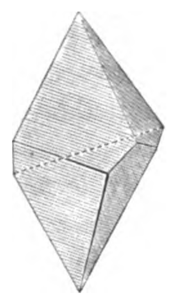



Fig. 203

péziennes, résultant de l'hémiédrie d'un scalénoèdre. Les faces qui se développent sont des couples alternatifs, formés par une face de la pyramide supérieure et une face de la pyramide inférieure; prolongées, elles donneraient un solide à six faces, le trapézoèdre trigonal, droit ou gauche.

L'hémiédrie à faces inclinées et l'hémiédrie à faces parallèles sont assez communes; l'hémiédrie plagièdre est presque exceptionnelle. Les cristaux affectés de la première se distinguent physiquement des cristaux holoèdres par la pyroélectricité; la deuxième ne paraît se traduire par aucune propriété physique bien nette. Les formes non superposables (plagièdres, ou résultant d'une double hémiédrie) indiquent en général des substances actives relativement à la lumière polarisée.

132. Dimorphisme ; polymorphisme. — Certaines s stances peuvent cristalliser suivant deux ou même trois formes mitives incompatibles : elles sont dites alors *dimorphes* (soufre, c bonate de chaux) ou *polymorphes* (acide titanique). En géné chaque forme est plus particulièrement stable à une températ déterminée.

Par contre, deux corps différents présentent souvent, à quelqu minutes près dans la valeur des angles, la même forme cristallin et donnent, lorsqu'ils prennent ensemble l'état solide, des cristau dans lesquels ils entrent en proportions quelconques. Cette doub propriété constitue l'*isomorphisme* (Mitscherlich) ([1]), signe d'un similitude de composition chimique.

133. Circonstances dans lesquelles un corps cristallise — Toutes les circonstances dans lesquelles un corps prend l'éta solide peuvent l'amener à l'état cristallin :

1° Passage direct de l'état gazeux à l'état solide; exemples : phosphore volatilisé dans le vide à basse température, arsenic distillé au rouge sombre.

2° Passage de l'état de fusion ignée à l'état solide; exemples : soufre, bismuth.

3° Passage de l'état de dissolution à l'état solide, soit par évaporation du dissolvant (sel marin), soit par refroidissement de la dissolution saturée à chaud (la plupart des sels), soit par changement du dissolvant (cristaux de camphre obtenus avec la solution alcoolique additionnée d'eau).

4° Formation d'un solide précipité chimiquement (phosphate ammoniaco-magnésien), ou séparé galvaniquement (arbre de Saturne).

La cristallisation est d'autant plus belle qu'elle s'effectue plus lentement. Il est toutefois assez difficile d'avoir de beaux cristaux isolés dans la masse cristallisée qui se dépose au sein d'un liquide. On y parvient par le procédé suivant dû à Leblanc ([2]). On prend un des cristaux les plus nets formés dans le pêle-mêle d'une première cristallisation et on le suspend dans une nouvelle dissolution saturée; le cristal devient alors le centre presque exclusif de la

([1]) MITSCHERLICH, *Ann. de chim. et de phys.* (2), XIV et XIX; 1820 et 1822.

([2]) LEBLANC, *Journal de physique de de la Métherie*, LV ; 1802.

uvelle cristallisation, et, ainsi *nourri*, s'accroît rapidement et ré-lièrement. Le même effet s'obtient si l'on place le cristal dans solution de l'un quelconque de ses isomorphes.

Une circonstance curieuse du développement d'un cristal est la paration qui se produit dans son eau-mère sur un cristal brisé [1] : travail nutritif se concentre sur la blessure, et ce n'est qu'après *catrisation* complète que l'accroissement régulier prend son cours.

M. Gernez [2] a très habilement tiré parti de l'action d'un cristal ir sa dissolution pour provoquer à coup sûr la cristallisation de ces jueurs qui, saturées à chaud et lentement refroidies, restent juides à la température ordinaire en retenant une quantité de sel issous très supérieure à celle qu'elles pourraient dissoudre à la ième température ; il a ainsi élucidé ce qu'il y avait d'incertain t de mystérieux dans la solidification des *dissolutions sursaturées*. ious reviendrons plus loin sur ces expériences intéressantes ; mais l est deux circonstances qui doivent être signalées immédia-ement, parce qu'elles montrent bien l'influence de la forme du *erme* cristallin : 1° la cristallisation peut être provoquée par le ontact d'un cristal d'une substance isomorphe comme par la sub-tance même en dissolution (aluns) [3] ; 2° en portant dans la disso-ution d'un corps dimorphe un cristal appartenant à l'une ou à 'autre des deux formes incompatibles que peut revêtir ce corps, on ait naître exclusivement des cristaux semblables au germe déposé.

134. Structure des corps solides non cristallisés. — En dehors de l'état cristallin parfait, les corps solides peuvent pré-senter différents modes de structure plus ou moins nettement définis.

Si le corps est formé de cristaux extrêmement petits placés bout à bout en longues rangées à peu près parallèles, il offre une *structure fibreuse*. « Il est à remarquer que dans les cristaux filiformes constituant ces fibres, les axes cristallographiques suivant lesquels les cristaux s'allongent sont toujours les mêmes pour une même substance et indiquent ainsi, très vraisemblablement, ceux suivant

[1] LAVALLE, C. R., XXX, 495 ; 1853. Voyez aussi PASTEUR, *Ann. de chim. et de Phys.* (3), XLIX, 5 ; 1857.

[2] GERNEZ, *Ann. de l'École normale* (1) III, 167 ; 1866 ; et (2) V, 9 ; 1876.

[3] M. Lecoq de Boisbaudran a même obtenu par ce moyen la cristallisation de corps qui ne cristallisent pas dans les conditions ordinaires.

lesquels la force moléculaire attractive est la plus intense. Dans l
cristaux à un axe principal, c'est généralement cet axe qui est cel
des fibres (¹). » Ces fibres cristallines peuvent d'ailleurs se romp
sous l'action de forces extérieures énergiques (chocs) ou constam
ment répétées (vibrations) : la structure devient alors *grenue* et
résistance à la rupture a beaucoup diminué.

Pour se rendre un compte exact de la *structure vitreuse*, il su
fit d'observer quel aspect prennent à la longue le verre et tous l
corps analogues : ils perdent leur transparence et deviennent gre
nus, ils se *dévitrifient*. Le sucre de pomme se transforme ainsi e
quelques jours; l'acide arsénieux vitreux finit par ressemble
à de la porcelaine ; les vieux vitraux des cathédrales sont com
plètement opaques. Cette dévitrification n'est autre chose qu'un
cristallisation, comme on le reconnaît indubitablement par un
examen attentif des substances dévitrifiées. Lors de la solidification du verre, les molécules gênées par la viscosité du liquide, saisies en outre souvent par un refroidissement brusque (*trempe*), ne peuvent s'orienter comme le voudraient leurs actions réciproques. La matière refroidie conserve donc l'isotropie que possédait le fluide incandescent : il ne paraît même pas qu'il y ait d'autres solides vraiment isotropes que ceux qui sont ainsi à l'état de *fluidité solide* (²). Mais dans ces solides les forces intérieures ne sont pas supprimées, et, plus ou moins lentement mais sûrement, elles amènent les molécules à ces positions d'équilibre stable qui caractérisent un édifice cristallin.

Il est cependant des corps qui, même lorsqu'ils prennent l'état solide dans les conditions semblant permettre aux molécules d'obéir librement à leurs tendances naturelles, ne cristallisent jamais. Graham a nommé ces substances des *colloïdes* (semblables à la colle) : ce sont ou des matières organiques, telles que l'albumine, les gommes, etc., ou même des substances minérales, comme la silice hydratée.

(¹) Mallard, *Cours de cristallographie*, I. Paris, Dunod, 1880.
(²) Le Roux, C. R., LXIV, 126 ; 1867.

CHAPITRE II

ÉLASTICITÉ

135. Définitions. — Le caractère essentiel de l'état solide est résistance au changement de forme. Des déformations peuvent pendant se produire, soit momentanées, soit persistantes. Nous nsidérerons d'abord les premières.

Tout corps solide soumis momentanément à l'action d'une force térieure éprouve une déformation qui disparaît complètement rsqu'on supprime la force, pourvu toutefois que celle-ci soit inféieure à une certaine limite, variable avec les différents corps. Tant ue cette limite (*limite d'élasticité*) n'est pas atteinte, les forces intéieures mises en jeu par la déformation luttent contre les forces extéieures, et un nouvel équilibre s'établit sous l'action réciproque des leux systèmes de forces opposées. La détermination des conditions le cet équilibre, plus généralement l'étude des *forces élastiques* onstitue l'une des questions les plus importantes et les plus difficiles le la physique. D'illustres savants tels que Navier ([1]), Poisson ([2]), auchy ([3]), Lamé ([4]), de Saint-Venant ([5]), Kirchhoff ([6]), Clebsch ([7]), Beer ([8]), Phillips ([9]), ont successivement repris le sujet au point de

([1]) Navier, *Mémoires de l'Académie des sciences*, VI; 1827.

([2]) Poisson, *Mémoires de l'Académie des sciences*, VIII; 1829; et *Journal de l'École polytechnique*, XX[e] cahier; 1831.

([3]) Cauchy, *Exercices de mathématiques*, II et III. Paris; 1827 et 1828.

([4]) Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*. Paris; 1[re] éd. 1852, 2[e] éd. 1866.

([5]) De Saint-Venant, *Mémoires des savants étrangers*, XIV; 1856.

([6]) Kirchhoff, *Crelle's Journal*, XL et LVI; 1850 et 1859.

([7]) Clebsch, *Theorie der Elasticität fester Körper*. Leipzig; 1862.

([8]) Beer, *Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität*. Leipzig; 1869.

([9]) Phillips, C. R., LVI; 1863; et *Annales des mines*, (6), XV; 1869.

vue théorique en s'aidant des ressources de l'analyse la plus éle
D'autre part, Hooke (1), S'Gravesande (2), Coulomb (3), Young (
Savart (5), W. Weber (6), Regnault (7), Wertheim (8), Kirchhoff (
Cornu (10), ont appliqué à l'étude expérimentale de l'élasticité d
procédés de plus en plus délicats et précis. Nous ne parlons pas i
des savants que des recherches d'un autre ordre ont amenés à s'o
cuper indirectement d'une question qui intéresse à vrai dire tout
les branches de la physique et sur laquelle nous devrons ain
revenir plus d'une fois dans la suite de ce cours.

Bien que, en toute rigueur, il n'y ait peut-être pas d'effort qu
ne produise une déformation permanente d'un solide nature
quelconque, un corps solide est de fait *parfaitement élastique* pou
des forces extérieures d'intensité et de durée suffisamment faibles
Il obéit alors aux deux lois suivantes formulées par Hooke (11) d'aprè
ses expériences sur les ressorts, et qui ne sont à vrai dire que des
conséquences nécessaires de la continuité :

1° Le changement de forme est proportionnel à la force exté-
rieure, en d'autres termes l'effort élastique est proportionnel à la
déformation (12).

2° Le changement de forme reste le même au signe près quand on
change le signe de la force, quand on remplace la traction par
une compression, quand la torsion ou la flexion se font en sens con-
traire.

Nous étudierons théoriquement d'abord les conditions d'équilibre
des corps parfaitement élastiques; nous décrirons ensuite les prin-

(1) HOOKE, *Philosophical tracts and collections*. London; 1678.
(2) S'GRAVESANDE, *Physices elementa mathematica*. Lugd. Bat.; 1720-21.
(3) COULOMB, *Mémoires de l'Académie des sciences*; 1784.
(4) YOUNG, *Course of lectures on natural philosophy*. London; 1807.
(5) SAVART, *Ann. de chim. et de phys.* (2) XL, XLI et LXV; 1829-37.
(6) W. WEBER. *Pogg. Ann.*, XXXIV et LIV; 1835 et 1841.
(7) REGNAULT, *Mémoires de l'Académie des sciences*, XXI; 1847.
(8) WERTHEIM, *Ann. de chim. et de phys.* (3), XII, XIX, XXIII et L; 1844-57.
(9) KIRCHHOFF, *Pogg. Ann.*, CVIII; 1859.
(10) CORNU, C. R., LXIX; 1869.
(11) HOOKE, *loc. cit.*
(12) De cette loi exprimée par la formule célèbre *ut tensio sic vis* (*tensio* pour *extensio*) et publiée d'abord sous l'anagramme *ceiiinosssttuu*, Hooke avait déduit un moyen de régler les horloges « et son nom est prononcé avec honneur, quoique mêlé à d'ardentes discussions de priorité, dans l'histoire du progrès le plus important de l'horlogerie » (Bertrand).

cipales expériences qui ont été effectuées soit pour appuyer la théorie, soit pour fournir des données utiles à la pratique.

I. — THÉORIE.

A. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

136. Force élastique. — Un corps solide étant en équilibre, si une force extérieure vient à agir sur lui, deux molécules quelconques m et m' du corps se rapprochent ou s'éloignent : il en résulte entre ces molécules une action répulsive ou attractive qui, toutefois, n'est sensible que si la distance mm' est très petite, toute cohésion cessant entre deux portions d'un même corps séparées par une distance appréciable. Dans le corps solide soumis à un effort extérieur et légèrement déformé, menons par M un plan P divisant le corps en deux parties A et B : la suppression de A détruirait évidemment l'équilibre de B. « Mais on conçoit que cet équilibre pourrait être conservé si l'on appliquait en même temps sur chaque élément ϖ du plan sécant une force ϖE d'intensité et de directionc onvenables. Cette force ϖE est précisément la *force élastique* exercée par A sur B et rapportée à l'élément plan ϖ dont le point M fait partie » (Lamé). La force élastique ainsi définie est analogue à la tension en chaque point d'un fil en équilibre, ou plutôt la tension du fil n'est qu'un cas particulier de la force élastique.

La force élastique ϖE sera en général oblique à l'élément plan ϖ. Nous appellerons ϖX, ϖY et ϖZ les trois composantes orthogonales de ϖE suivant les trois axes coordonnés.

137. Équilibre du parallélipipède élémentaire (¹). — Soit, en un point A (x, y, z) du solide, un parallélipipède élémentaire $dx\,dy\,dz$. Ce parallélipipède doit être en équilibre sous l'action des forces élastiques exercées sur ses six faces et des forces qui sollicitent sa masse $\rho\,dx\,dy\,dz$. Soient en A, $\varpi_1 X_1$, $\varpi_1 Y_1$, $\varpi_1 Z_1$, ou $dy\,dz\,X_1$, $dy\,dz\,Y_1$, $dy\,dz\,Z_1$, les composantes de la force élastique

(¹) Voir LAMÉ, *loc. cit.*, p. 14.

relative à l'élément plan $\varpi_1 = dydz$ perpendiculaire à l'axe des x; comptons positivement les tractions dirigées dans le sens des coordonnées positives, et supposons le point A dans l'angle de ces coordonnées : les composantes de la force élastique exercée par la partie

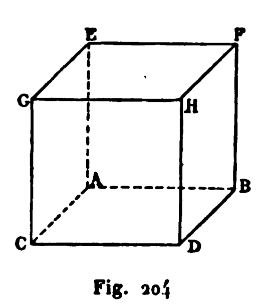


Fig. 204

du milieu située à gauche de la face ACGE sur la partie qui est à droite de la même face seront

$$-dydzX_1, \quad -dydzY_1, \quad -dydzZ_1.$$

Sur la face BDHF la force élastique a pour composantes

$$+dydz\left(X_1+\frac{dX_1}{dx}dx\right), \quad +dydz\left(Y_1+\frac{dY_1}{dx}dx\right), \quad +dydz\left(Z_1+\frac{dZ_1}{dx}dx\right),$$

et la somme des composantes relatives aux faces ACGE et BDHF se réduit à

$$dxdydz\frac{dX_1}{dx}, \quad dxdydz\frac{dY_1}{dx}, \quad dxdydz\frac{dZ_1}{dx}.$$

De même les faces ABEF et CDGH, ABCD et EFGH fourniront les composantes

$$dxdydz\frac{dX_2}{dy}, \quad dxdydz\frac{dY_2}{dy}, \quad dxdydz\frac{dZ_2}{dy};$$
$$dxdydz\frac{dX_3}{dz}, \quad dxdydz\frac{dY_3}{dz}, \quad dxdydz\frac{dZ_3}{dz}.$$

Les forces extérieures agissant sur le parallélipipède donneront également trois composantes que nous appellerons

$$\rho\, dx\, dy\, dz X_0, \quad \rho\, dx\, dy\, dz Y_0, \quad \rho\, dx\, dy\, dz Z_0.$$

Les six équations d'équilibre du parallélipipède seront donc

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dX_1}{dx}+\frac{dX_2}{dy}+\frac{dX_3}{dz}+\rho X_0=0,\\ &\frac{dY_1}{dx}+\frac{dY_2}{dy}+\frac{dY_3}{dz}+\rho Y_0=0,\\ &\frac{dZ_1}{dx}+\frac{dZ_2}{dy}+\frac{dZ_3}{dz}+\rho Z_0=0; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &Z_2=Y_3, \text{(1)}\\ &X_3=Z_1,\\ &Y_1=X_2. \end{aligned}\right.$$

Appelons N_1, N_2, N_3 les composantes X_1, Y_2, Z_3 respectivement normales aux faces ACGE et BDHF, ABEF et CDGH, ABCD et EFGH, et désignons par T_1, T_2, T_3 les composantes tangentielles égales deux à deux

$$\begin{aligned} T_1&=Z_2=Y_3,\\ T_2&=X_3=Z_1,\\ T_3&=Y_1=X_2; \end{aligned}$$

(1) Il est visible en effet que, dans l'équation des moments relative à un axe mené parallèlement aux x par le centre du parallélipipède, n'interviennent que les composantes

$$-dz\,dx Z_2, \quad +dz\,dx\left(Z_2+\frac{dZ_2}{dy}dy\right); \quad -dx\,dy Y_3, \quad +dx\,dy\left(Y_3+\frac{dY_3}{dz}dz\right),$$

qui agissent tangentiellement aux faces ABEF, CDGH, ABCD, EFGH, dans un plan perpendiculaire à l'axe, et qui forment deux couples de sens contraire $\frac{dx\,dy\,dz Z_2}{2}$, $\frac{dx\,dy\,dz Y_3}{2}$, si l'on néglige les infiniment petits du quatrième ordre, de sorte que l'équation des moments relative à cet axe se réduit à l'égalité de ces deux couples, c'est-à-dire à $Z_2 = Y_3$.

nous aurons les trois équations suivantes, qui peuvent être regardées comme le résultat de l'élimination de trois des neuf composantes entre les six équations d'équilibre, et qui par conséquent expriment à elles seules l'équilibre de l'élément parallélipipédique $dxdydz$:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dx}+\dfrac{dT_3}{dy}+\dfrac{dT_2}{dz}+\rho X_0=0, \\ \dfrac{dT_3}{dx}+\dfrac{dN_2}{dy}+\dfrac{dT_1}{dz}+\rho Y_0=0, \\ \dfrac{dT_2}{dx}+\dfrac{dT_1}{dy}+\dfrac{dN_3}{dz}+\rho Z_0=0. \end{cases}$$

Ces équations expriment évidemment aussi l'équilibre de toute portion finie du corps qui serait décomposable en parallélipipèdes élémentaires ayant leurs facettes parallèles aux plans coordonnés. Mais, en général, cette décomposition laissera des résidus tétraédriques dont les conditions d'équilibre doivent être cherchées à leur tour [1].

138. Équilibre du tétraèdre élémentaire. — Considérons avec Cauchy un tétraèdre élémentaire ayant son sommet en M, les trois arêtes issues de ce sommet parallèles aux trois axes coordonnés et limitées à une face triangulaire de surface ϖ formant la base du tétraèdre. Soient m, n, p les cosinus des angles que la normale à la base fait avec les axes,

$$m^2+n^2+p^2=1;$$

et soient a, b, c les aires des trois triangles rectangles constituant les faces latérales du tétraèdre,

$$a=m\varpi, \qquad b=n\varpi, \qquad c=p\varpi.$$

[1] Ces résidus tétraédriques ne seraient négligeables que si, la pression se transmettant intégralement et normalement dans toute la masse, l'orientation des éléments superficiels n'avait pas d'influence ; mais cette transmission intégrale et normale de la pression, caractéristique des fluides, n'a pas lieu dans les solides.



« Cela posé, le tétraèdre devant être en équilibre sous l'action des forces élastiques qui s'exercent sur ses quatre faces et des forces qui sollicitent sa masse, les sommes des composantes de ces forces, estimées suivant chaque axe, devront être nulles. A la somme des composantes suivant l'axe des x, la face inclinée fournira le terme ϖX, la face a le terme $-m\varpi N_1$, la face $b - n\varpi T_3$, la face $c - p\varpi T_2$; les forces qui agissent sur la masse donneront un terme égal à ρX_0 multiplié par le volume du tétraèdre, qui est un infiniment petit du troisième ordre : ce cinquième terme disparaîtra donc à la suite des quatre autres qui sont des infiniment petits du deuxième ordre. »
On a ainsi la première des équations suivantes dont on obtiendra de même les deux autres, en faisant la somme des composantes parallèles aux y, puis aux z,

(2) $$\begin{cases} X = mN_1 + nT_3 + pT_2, \\ Y = mT_3 + nN_2 + pT_1, \\ Z = mT_2 + nT_1 + pN_3. \end{cases}$$

139. Équilibre d'une portion finie. — Si on laisse de côté les équations des moments pour le tétraèdre (équations qui ne fourniraient rien de nouveau), les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'une portion finie, de forme quelconque, du milieu solide sont données par les six équations (1) et (2). Soient en effet Ω cette portion finie, ϖ un élément de la surface Ω; ϖX, ϖY, ϖZ les composantes de la force élastique qui s'exerce sur l'élément plan ϖ; $\rho\omega$ un élément de la masse; $\rho\omega X_0$, $\rho\omega Y_0$, $\rho\omega Z_0$ les composantes des forces extérieures qui sollicitent la masse $\rho\omega$; les six équations qui expriment l'équilibre de Ω sont

(3) $$\begin{cases} \Sigma\varpi X + \Sigma\rho\omega X_0 = 0, \\ \Sigma\varpi Y + \Sigma\rho\omega Y_0 = 0, \\ \Sigma\varpi Z + \Sigma\rho\omega Z_0 = 0; \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} \Sigma\varpi(zY - yZ) + \Sigma\rho\omega(zY_0 - yZ_0) = 0, \\ \Sigma\varpi(xZ - zX) + \Sigma\rho\omega(xZ_0 - zX_0) = 0, \\ \Sigma\varpi(yX - xY) + \Sigma\rho\omega(yX_0 - xY_0) = 0; \end{cases}$$

lesquelles se déduisent facilement des seules équations (1) et (2).

Prenons en effet la première des équations (1), multiplions-la par $dx\,dy\,dz$ et intégrons dans toute l'étendue de Ω, il viendra

$$\iiint \frac{dN_1}{dx} dx\,dy\,dz + \iiint \frac{dT_3}{dy} dy\,dz\,dx + \iiint \frac{dT_2}{dz} dz\,dx\,dy + \iiint \rho X_0\, dx\,d$$

Dans l'intégrale triple en N_1 on peut faire l'intégration en x, ce qui donnera

$$\iiint \frac{dN_1}{dx} dx\,dy\,dz = \iint N_1\,dy\,dz = \Sigma\varpi N_1 \cos\alpha,$$

ϖ étant un élément de la surface de Ω, α l'angle que la normale externe en ϖ fait avec l'axe des x, la fonction N_1 ayant la valeur qui correspond au lieu de cet élément, et le Σ s'étendant à toute la surface. On réduira à un Σ semblable la seconde, puis la troisième intégrale triple. La quatrième peut s'écrire $\Sigma\rho\omega X_0$, $\rho\omega$ désignant l'élément de masse $dx\,dy\,dz$, et le Σ s'étendant ici à la masse entière de ω. La somme des quatre intégrales devient alors

$$\Sigma\varpi(N_1\cos\alpha + T_3\cos\beta + T_2\cos\gamma) + \Sigma\rho\omega X_0 = 0,$$

ou, si l'on remarque que d'après la première des équations (2) la parenthèse n'est autre que X,

$$\Sigma\varpi X + \Sigma\rho\omega X_0 = 0,$$

c'est-à-dire la première des équations (3): les deux autres s'obtiendraient de même.

Prenant maintenant la deuxième équation (1), multiplions-la par z, retranchons-en la troisième équation (1) multipliée par y et traitons comme plus haut; nous trouverons

$$\Sigma\varpi\left[(zT_3 - yT_2)\cos\alpha + (zN_2 - yT_1)\cos\beta + (zT_1 - yN_3)\cos\gamma\right] + \Sigma\rho\omega(zY_0 - yZ_0)$$

ou

$$\Sigma\varpi\left[z(T_3\cos\alpha + N_2\cos\beta + T_1\cos\gamma) - y(T_2\cos\alpha + T_1\cos\beta + N_3\cos\gamma)\right] + \Sigma\rho\omega(zY_0 - yZ$$

ou, en ayant égard aux relations (2),

$$\Sigma\varpi(zY - yZ) + \Sigma\rho\omega(zY_0 - yZ_0) = 0,$$

ce qui est la première des équations (4); on aurait de même les deux autres.

Ainsi les équations (1) et (2) sont suffisantes pour établir l'équilibre d'élasticité d'une portion quelconque Ω d'un milieu solide.

140. Ellipsoïde d'élasticité (¹). — « Les équations déduites de l'équilibre du tétraèdre élémentaire remplissent un double rôle : elles fournissent les équations à la surface comme on vient de le voir; en outre elles indiquent de quelle manière varient les forces élastiques en un même point du milieu. » C'est cette dernière propriété que nous allons développer pour en tirer les conséquences importantes qu'elle renferme.

Imaginons donc au point M un tétraèdre infiniment petit, ayant son sommet en M et ses arêtes parallèles aux trois axes coordonnés : appelons, comme précédemment, ϖ l'aire de la face triangulaire opposée au sommet M, et m, n, p les cosinus des angles que la normale à cette face fait avec les axes des x, y, z. Par le point M menons une ligne représentant en grandeur et en direction la force élastique exercée sur la base ϖ; et soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de l'extrémité de cette ligne : les formules (2) donnent évidemment

$$(2^{bis})\qquad \begin{cases} x_1 = mN_1 + nT_3 + pT_2, \\ y_1 = mT_3 + nN_2 + pT_1, \\ z_1 = mT_2 + nT_1 + pN_3. \end{cases}$$

Considérons maintenant les forces élastiques F_1, F_2, F_3 qui s'exercent sur les faces du tétraèdre perpendiculaires aux axes coordonnés, forces dont les composantes sont respectivement N_1, T_3, T_2; T_3, N_2, T_1; T_2, T_1, N_3; et prenons ces trois forces F_1, F_2, F_3 pour axes

(¹) Voir LAMÉ, *loc. cit.* p. 53.

coordonnés obliques. Les cosinus des angles de la force F_1 ou a des x' avec les anciens axes sont $\frac{N_1}{F_1}, \frac{T_3}{F_1}, \frac{T_2}{F_1}$; et l'on a de même poi les cosinus des angles de l'axe des y' et de l'axe des z' avec les pr miers axes $\frac{T_3}{F_2}, \frac{N_2}{F_2}, \frac{T_1}{F_2}$ et $\frac{T_2}{F_3}, \frac{T_1}{F_3}, \frac{N_3}{F_3}$; ce qui conduit immédiatemei aux relations suivantes entre les anciennes coordonnées et les nou velles :

$$x_1 = \frac{N_1 x'_1}{F_1} + \frac{T_3 y'_1}{F_2} + \frac{T_2 z'_1}{F_3},$$
$$y_1 = \frac{T_3 x'_1}{F_1} + \frac{N_2 y'_1}{F_2} + \frac{T_1 z'_1}{F_3},$$
$$z_1 = \frac{T_2 x'_1}{F_1} + \frac{T_1 y'_1}{F_2} + \frac{N_3 z'_1}{F_3}.$$

La comparaison de ces valeurs de x_1, y_1, z_1 avec celles que nous avons écrites plus haut donne

$$\frac{x'_1}{F_1} = m, \quad \frac{y'_1}{F_2} = n, \quad \frac{z'_1}{F_3} = p.$$

Or

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1.$$

Donc

$$(5) \qquad \frac{x'^2_1}{F^2_1} + \frac{y'^2_1}{F^2_2} + \frac{z'^2_1}{F^2_3} = 1,$$

ce qui est l'équation d'un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués. « Ainsi, le lieu des extrémités des droites représentant en grandeur et en direction les forces élastiques exercées sur *tous* les éléments plans menés par un même point M, est un ellipsoïde ayant son centre en M; et les trois forces élastiques exercées sur trois éléments plans quelconques rectangulaires entre eux sont trois diamètres conjugués de cette surface que l'on appelle *ellipsoïde d'élasticité*. »

Supposons que les trois diamètres conjugués auxquels se trouve rapportée l'équation (5) de la surface soient précisément les axes de l'ellipsoïde, les axes des x', y', z' sont alors rectangulaires, comme

axes des x, y, z, et les neuf cosinus des angles que font entre eux deux systèmes d'axes doivent vérifier les relations

$$\begin{aligned}
&\frac{N_1^2}{F_1^2}+\frac{T_3^2}{F_2^2}+\frac{T_2^2}{F_3^2}=1, \qquad &\left\{\begin{aligned}&\frac{N_1^2}{F_1^2}+\frac{T_3^2}{F_1^2}+\frac{T_2^2}{F_1^2}=1,\\
&\frac{T_3^2}{F_2^2}+\frac{N_2^2}{F_2^2}+\frac{T_1^2}{F_2^2}=1,\\
&\frac{T_2^2}{F_3^2}+\frac{T_1^2}{F_3^2}+\frac{N_3^2}{F_3^2}=1;\end{aligned}\right.\\
&\frac{T_3^2}{F_1^2}+\frac{N_2^2}{F_2^2}+\frac{T_1^2}{F_3^2}=1, &\\
&\frac{T_2^2}{F_1^2}+\frac{T_1^2}{F_2^2}+\frac{N_3^2}{F_3^2}=1; &
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en éliminant les N_1, N_2, N_3,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{F_2^2}-\frac{1}{F_1^2}\right)T_3^2+\left(\frac{1}{F_3^2}-\frac{1}{F_1^2}\right)T_2^2=0,\\
&\left(\frac{1}{F_3^2}-\frac{1}{F_2^2}\right)T_1^2+\left(\frac{1}{F_1^2}-\frac{1}{F_2^2}\right)T_3^2=0,\\
&\left(\frac{1}{F_1^2}-\frac{1}{F_3^2}\right)T_2^2+\left(\frac{1}{F_2^2}-\frac{1}{F_3^2}\right)T_1^2=0.
\end{aligned}$$

F_1, F_2, F_3 sont actuellement les axes de l'ellipsoïde ; supposons

$$F_1 > F_2 > F_3,$$

la première équation exige que $T_3=0$ ainsi que $T_2=0$, et les deux dernières que $T_1=0$.

Les relations qui expriment la rectangularité des deux systèmes d'axes donnent alors

$$F_1=N_1, \quad F_2=N_2, \quad F_3=N_3,$$

c'est-à-dire que les forces élastiques F_1, F_2, F_3, suivant lesquelles sont dirigés les axes de l'ellipsoïde, sont respectivement perpendiculaires aux éléments plans sur lesquels elles s'exercent. « Ainsi, en tout point d'un corps solide, il existe trois éléments plans, rectangulaires entre eux, sur chacun desquels la force élastique s'exerce normalement. Ces plans sont les sections principales de l'ellipsoïde d'élasticité, et

les trois forces élastiques normales, ou *forces élastiques princip*[...]
sont les axes de cet ellipsoïde. »

Soient A, B, C les forces élastiques principales, supposées [...]nues, au point M, l'équation de l'ellipsoïde d'élasticité rappor[...] ses axes est

$$(6)\qquad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1,$$

et l'on a

$$N_1=A,\quad N_2=B,\quad N_3=C;\quad T_1=0,\quad T_2=0,\quad T_3=0.$$

Les équations (2bis) donnent alors

$$m=\frac{x_1}{A},\quad n=\frac{y_1}{B},\quad p=\frac{z_1}{C};$$

et le plan ϖ a pour équation

$$\frac{x_1x}{A}+\frac{y_1y}{B}+\frac{z_1z}{C}=0:$$

il est parallèle au plan tangent à la surface

$$(7)\qquad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=\pm K^2$$

au point où le diamètre D_1, aboutissant en x_1, y_1, z_1 sur l'ellipsoïde vient la rencontrer : K^2 est une quantité positive quelconque.

« Si les trois forces élastiques principales sont de même signe, c'est-à-dire sont toutes les trois des tractions ou toutes les trois des pressions, la surface (7) est un ellipsoïde, concentrique à l'ellipsoïde d'élasticité, ayant ses axes dirigés de même et respectivement proportionnels aux racines carrées des forces élastiques principales ; et tout demi-diamètre D_1 de l'ellipsoïde représente une force de même signe que les forces principales. Si les forces élastiques principales sont de signe différent, la surface (7) est l'ensemble de deux hyper-

›loïdes, l'un à une nappe, l'autre à deux nappes, ayant même cône ›ymptotique

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=0. \tag{8}$$

lors, si le diamètre D_1 rencontre l'hyperboloïde à une nappe, il repré-›nte une force élastique de l'espèce qui est double parmi les forces lastiques principales; s'il rencontre l'hyperboloïde à deux nappes, représente une force élastique de l'espèce unique. Le passage de un des cas à l'autre se fait sur le cône (8): tout demi-diamètre D_1 ouché sur ce cône représente une force élastique tangentielle, exerçant sur le plan tangent au cône suivant la même arête D_1. De à le nom de *cône des forces élastiques tangentielles* ou plus simple-ment de *cône de glissement* donné au cône (8). »

Telles sont les lois qui régissent les forces élastiques en un même point d'un milieu solide. Elles sont absolument générales, car les équations (2) qui les renferment toutes ne supposent ni homogénéité ni approximation d'aucune sorte. Elles sont à l'abri du doute sur la nature des actions moléculaires, puisque, chose digne de remarque, on a pu les établir sans s'occuper de la déformation du milieu.

B. — FORCES ÉLASTIQUES RÉSULTANT DE LA DÉFORMATION.

141. Déformation d'un milieu isotrope. — Comme en définitive cette déformation se produit, qu'elle peut seule expliquer l'existence des forces intérieures et leurs variations, nous l'étudierons maintenant, en nous bornant toutefois au cas des milieux isotropes, et en négligeant les phénomènes thermiques dont cependant une théorie exacte devrait nécessairement tenir compte. Nous pourrons ainsi obtenir, dans ce cas particulier, les valeurs des N et des T en fonction du déplacement moléculaire, et par suite tirer des équations de l'élasticité les lois mêmes de ce déplacement.

Prenons donc, dans un milieu isotrope, un parallélipipède rectangle ABCDEFGH, et considérons successivement les déformations des arêtes et celles des angles.

142. I. — Déformation des arêtes. — Supposons d'abo[rd un] parallélipipède soumis sur ses deux bases ACGE, BDHF à deux t[rac]tions normales égales et opposées. Les arêtes parallèles à la dir[ec]tion de la traction s'allongent, les arêtes perpendiculaires se r[ac]courcissent. L'allongement d'une arête AB parallèle à la tracti[on]

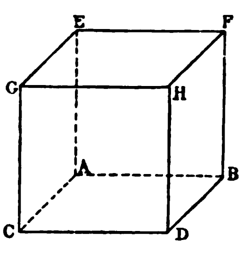


Fig. 205

est proportionnel à la longueur L de cette arête, proportionn[el] au poids tenseur Π, en raison inverse de la section ACGE ou S, e[t] en raison inverse d'un certain coefficient E que l'on nomme l[e] *coefficient d'élasticité* de la substance [1] :

$$(9) \qquad l = \frac{\Pi L}{ES}.$$

La loi relative à la longueur est évidente *a priori*.

Il en est de même de celle qui se rapporte à la section dès que l'on admet la proportionnalité de l'allongement au poids tenseur : car doubler la section, c'est prendre deux barres de section 1 portant chacune un poids $\frac{\Pi}{2}$ et les accoler de manière à n'en faire qu'une seule, ce qui ne changera évidemment rien à leur condition, puisque ces barres identiques se comporteront individuellement de même.

La nature de la substance doit nécessairement se manifester par un coefficient particulier. En donnant à ce coefficient la forme sous laquelle nous l'avons introduit dans la formule, on en fait un

[1] On l'appelle aussi parfois *module d'Young*.

ids. Si, en effet, nous supposons $S=1$ et $l=L$, il vient $E=\Pi$: le efficient d'élasticité E est donc le poids qu'il faudrait attacher l'extrémité d'une barre de section égale à l'unité pour l'al-nger d'une quantité égale à sa propre longueur, à supposer i'un tel allongement s'accomplisse suivant les mêmes lois que s allongements que l'on peut produire sans dépasser la limite élasticité (¹).

Quant à l'influence du poids tenseur, elle résulte de ce principe néral, d'un usage constant en physique :

Quand une variable croît d'une quantité suffisamment petite, ute fonction continue de cette variable éprouve un accroissement roportionnel à celui de la variable elle-même (premier terme de i série de Taylor).

L'allongement est une fonction du poids et, par la nature même les choses, une fonction continue : l est donc nécessairement proportionnel à Π jusqu'à une certaine limite. C'est à l'expérience de déterminer la limite jusqu'à laquelle cette proportionnalité subsiste, limite ordinairement assez reculée, l croissant très lentement avec Π. Nous admettrons donc d'abord la proportionnalité.

Si par conséquent nous appelons α l'allongement $\frac{l}{L}$ de l'unité de longueur ou *allongement relatif* de l'arête AB, P la traction $\frac{\Pi}{S}$ exercée sur l'unité de surface des bases, nous avons

$$\alpha=\frac{1}{E}P.$$

(¹) On donne quelquefois une autre définition du coefficient d'élasticité : on le définit l'allongement l_1 que subit une barre de longueur égale à 1 sous une charge égale à son propre poids. Si nous appelons D la densité du corps, SD est cette charge, et d'après la formule générale on a

$$l_1=\frac{SD}{ES},$$

d'où

$$l_1E=D.$$

Les deux coefficients sont donc réciproques : leur produit est égal à la densité du corps considéré.

De même le *raccourcissement relatif* β des arêtes AC, AE est

$$\beta = \frac{\sigma}{E} P,$$

σ étant un coefficient (*coefficient de Poisson*) qui exprime le rappc de la diminution de l'unité de longueur dans la section transve sale à l'allongement de l'unité de longueur dans le sens longit dinal, quand la traction s'exerce suivant la longueur seule.

Une traction normale Q, exercée sur l'unité de surface des fac opposées ABEF et CDGH seulement, produira un allongement r latif α' de l'arête AC et un raccourcissement relatif β' des arêtes AE AB et l'on aura

$$\alpha' = \frac{1}{E} Q,$$

$$\beta' = \frac{\sigma}{E} Q.$$

Enfin, une traction R par unité de surface sollicitant seulement les faces ABCD et EFGH produira un allongement α'' de l'arête AE et un raccourcissement β'' des arêtes AB, AC, donnés par les relations

$$\alpha'' = \frac{1}{E} R,$$

$$\beta'' = \frac{\sigma}{E} R.$$

Si les trois systèmes de tractions agissent simultanément, leurs effets se superposeront et, en appelant ε, ε', ε'' les variations relatives de longueur des arêtes AB, AC, AE, on aura

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\big(P - \sigma(Q + R)\big),$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{E}\big(Q - \sigma(R + P)\big),$$

$$\varepsilon'' = \frac{1}{E}\big(R - \sigma(P + Q)\big).$$

où l'on tire

$$(10)\qquad \begin{cases} P = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon, \\ Q = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon', \\ R = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon'', \end{cases}$$

a posant, avec Lamé,

$$(11)\qquad \theta = \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon''$$

t

$$\lambda = \frac{E\sigma}{1 - \sigma - 2\sigma^2}, \qquad (a)$$

$$2\mu = \frac{E(1 - 2\sigma)}{1 - \sigma - 2\sigma^2} \quad \text{ou} \quad \frac{E}{1 + \sigma}. \qquad (b)$$

θ est le coefficient de dilatation cubique : car, par suite de la petitesse des déformations élastiques, la variation de l'unité de volume est la somme des variations de longueur des trois arêtes, l'équation

$$1 + \theta = (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon')(1 + \varepsilon'')$$

se réduisant à

$$\theta = \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon''.$$

Les coefficients λ et μ sont les deux *constantes de constitution* au moyen desquelles on pourra, comme nous le verrons, exprimer tous les coefficients relatifs à l'élasticité. Ainsi, d'après les équations mêmes qui définissent λ et μ, on a déjà

$$(12)\qquad E = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu},$$

$$(13)\qquad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Les équations (10) sont d'une importance capitale ; elles montrent que la traction ou la pression exercée normalement sur une des faces du parallélipipède, et par suite la réaction élastique normale du parallélipipède lui-même est une fonction linéaire des variations de longueur ε, ε′, ε″, contenant deux paramètres seu-

lement : toute traction (ou pression) normale est la somme d'[un] terme proportionnel à la dilatation cubique et d'un terme pr[o]portionnel à la dilatation linéaire parallèle à la direction co[n]sidérée.

Dans les liquides, la pression est nécessairement la même s[ur] chaque face du parallélipipède et simplement proportionnelle à l[a] contraction cubique ; le terme proportionnel à la variation linéai[re] est donc nul : $\mu = 0$. On peut ainsi comprendre les liquides dans l[a] même théorie que les solides, en admettant que dans les liquides

$$P = Q = R = \lambda\theta.$$

Si l'expression $\mu = 0$ caractérise les liquides, on conçoit qu'à des valeurs croissantes de μ correspondent des corps (123) s'éloignant graduellement des liquides pour se rapprocher de plus en plus des solides parfaits. Il ne saurait donc exister entre λ et μ aucune relation générale indépendante du corps considéré : en particulier, la quantité σ ne doit pas être la même dans tous les corps que l'on appelle vulgairement solides [1].

Mais, d'après M. de Saint-Venant [2], dans tout vrai solide isotrope $\lambda = \mu$, ou $\sigma = \frac{1}{4}$. On arrive nécessairement à cette conclusion « si on regarde les pressions comme des résultantes d'actions moléculaires, fonctions continues des distances entre molécules fort proches, et si on les suppose nulles antérieurement aux déformations. » Les solides isotropes n'auraient pas alors deux paramètres différents, mais un seul, comme l'avaient admis Navier et Poisson.

Les équations (10) s'écriront facilement en notation infinitésimale. Le parallélipipède étant par hypothèse de dimensions infiniment petites, si les coordonnées du point A (x, y, z) s'accroissent respectivement de ξ, η, ζ, les coordonnées du point H $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ s'accroîtront de $\xi + d\xi,\ \eta + d\eta,\ \zeta + d\zeta$: l'allongement suivant AB

[1] Pour que λ soit positif, σ qui lui-même est nécessairement positif doit être $< \frac{1}{2}$; on peut donc seulement affirmer que σ doit être compris entre 0 et $\frac{1}{2}$, la valeur $\frac{1}{2}$ correspondant, d'après l'équation (13), à $\mu = 0$.

[2] DE SAINT-VENANT, C. R., LIII, 1107 ; 1861.

ra $d\xi$ sur la longueur dx, l'allongement relatif $\frac{d\xi}{dx}$; de même les longements relatifs suivant AC et AE seront $\frac{d\eta}{dy}$ et $\frac{d\zeta}{dz}$. On aura nc, en mettant au lieu de P, Q, R les forces élastiques normales N_1, N_2, N_3 (137),

$$
(14)\qquad \begin{cases} N_1 = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{d\xi}{dx}, \\ N_2 = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{d\eta}{dy}, \\ N_3 = \lambda\theta + 2\mu\dfrac{d\zeta}{dz}, \end{cases}
$$

ou la dilatation cubique étant

$$
(15)\qquad \theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.
$$

143. II. — Déformation des angles (¹). — Considérons maintenant un couple de forces P agissant sur les faces ABCD, EFGH parallèlement à ces faces et dans la direction AB. L'effet sera évidemment de transformer les rectangles ABEF, CDGH en parallélogrammes obliquangles, chaque ligne perpendiculaire aux bases ABCD, EFGH ayant tourné d'un angle φ, que Clebsch appelle l'*angle de déplacement*, et chaque couche parallèle aux bases étant dès lors sollicitée par une force élastique tangentielle égale et de signe contraire à la force P. Nous pouvons d'ailleurs poser, comme pour les déformations linéaires,

$$
\varphi = \frac{1}{K} P,
$$

K étant un coefficient de proportionnalité qu'il s'agit de déterminer. Pour cela, prenons un cube de la substance donnée, qui soit fixé à sa face supérieure et tiré à sa face opposée par une force Q. Dans ces conditions, le cube se transforme en un parallélipipède, l'arête verti-

(¹) Voir Clebsch, *loc. cit.*

cale L devenant $L\left(1+\frac{Q}{E}\right)$ et les arêtes horizontales $L\left(1-\frac{\sigma Q}{E}\right)$, E désignant toujours le coefficient d'élasticité et σ le rapport du coefficient de contraction transversale au coefficient de dilatation longitudinale. Les faces du cube parallèles à la direction de la traction, telles que MNPQ, deviennent des parallélogrammes $M_1N_1P_1Q_1$.

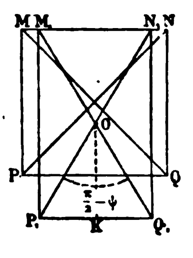


Fig. 206

Les diagonales M_1Q_1, N_1P_1, perpendiculaires l'une sur l'autre avant la traction, font maintenant un angle $P_1OQ_1=\frac{\pi}{2}-\psi$, facile à calculer. Menons en effet OK et considérons le triangle rectangle P_1OK:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}=\frac{P_1K}{OK} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{L}{2}\left(1-\frac{\sigma Q}{E}\right)}{\frac{L}{2}\left(1+\frac{Q}{E}\right)},$$

ou, comme $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ et que ψ est toujours très petit dans les limites auxquelles nous nous restreignons,

$$\frac{1-\frac{\psi}{2}}{1+\frac{\psi}{2}}=\frac{1-\frac{\sigma Q}{E}}{1+\frac{Q}{E}}.$$

et, si l'on néglige les quantités petites du second ordre,

$$\psi=\frac{1+\sigma}{E}Q.$$

ſais l'angle ψ ainsi déterminé est précisément l'angle de dépla-
ıent des plans que l'on peut concevoir menés dans le cube avant
te traction, parallèles à la diagonale MQ et à sa correspondante
la face opposée. Au début, en effet, la parallèle menée par le
ıtre du cube à la deuxième diagonale NP était à la fois la normale
ous ces plans et le lieu des centres des sections qu'ils détermi-
ient dans le cube. Après la déformation, les centres des sections
ıt encore sur la parallèle à N_1P_1 par le centre ; mais cette parallèle
t maintenant avec les plans des sections l'angle $\frac{\pi}{2}-\psi$ ou avec la
ırmale à ces plans l'angle ψ. La normale au milieu des sections et
ute autre normale à ces sections ont donc tourné de l'angle ψ; ψ est
›nc l'angle de déplacement φ relatif aux plans considérés. Par suite
ne force élastique P parallèle aux plans des sections sollicite main-
ːnant chaque section dans la direction Q_1O et avec une intensité

$$P=K\varphi=\frac{K(1+\sigma)}{E}Q.$$

Cette force P tend à ramener chaque couche dans sa position première et tient en équilibre la composante de la traction Q parallèle aux plans des couches. La traction Q, parallèle elle-même à l'arête verticale du cube, fait avec le plan diagonal un angle de 45°, sa projection sur ce plan est donc $Q\cos 45°=Q\sqrt{\frac{1}{2}}$. D'autre part, cette même traction Q s'exerçant avec l'intensité Q sur chaque unité de surface de la base, l'intensité de sa composante parallèle au plan diagonal, rapportée à l'unité de surface de ce plan diagonal, devra encore être réduite dans le rapport de $1:\sqrt{2}$, puisque la surface de la section diagonale est à la section de la base dans le rapport de $\sqrt{2}:1$. La composante tangentielle de la traction, rapportée à l'unité de surface des plans sur lesquels elle agit tangentiellement, est donc

$$Q\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{Q}{2};$$

et comme cette force $\frac{Q}{2}$ est précisément équilibrée par la force éla tique tangentielle P,

$$P=\frac{Q}{2};$$

et l'on a

$$\frac{Q}{2}=\frac{K(1+\sigma)}{E}Q,$$

ou

$$K=\frac{E}{2(1+\sigma)},$$

ou finalement (*b*)

$$K=\mu.$$

La force élastique tangentielle s'exerçant sur un plan dont la no male a été déplacée de l'angle φ est donc

$$P=\mu\varphi. \tag{16}$$

144. Détermination des N et des T. — Cela posé, revenon au parallélipipède élémentaire ABCDEFGH et considérons les si couples de forces tangentielles Y_1, Z_1, X_2, Z_2, X_3, Y_3, lesquels pr

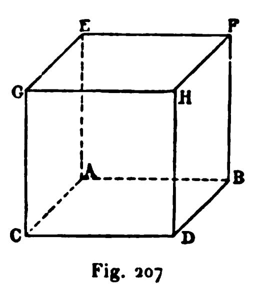


Fig. 207

deux à deux, Y_3 et Z_2, par exemple, tendent à faire tourner le paral lélipipède en sens contraire. Comme le parallélipipède doit non pa tourner mais rester en équilibre, les moments de ces couples doiven être égaux, et il en résulte, ainsi que nous l'avons déjà remarqué

$$Y_3 = Z_2 = T_1,$$
$$Z_1 = X_3 = T_2,$$
$$X_2 = Y_1 = T_3,$$

T_1, T_2, T_3 étant les dénominations adoptées pour désigner les intensités communes des forces Y_3 et Z_2, Z_1 et X_3, X_2 et Y_1. Mais tout en équilibrant, ces couples produisent des déformations du parallélipipède analogues à celle que nous venons d'étudier sur les sections obliques d'un cube étiré; et, si les angles du parallélipipède deviennent $C'A'E' = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $B'A'E' = \frac{\pi}{2} - \chi$, $B'A'C' = \frac{\pi}{2} - \psi$, on a

$$(17) \quad \begin{cases} T_1 = \mu\varphi \text{ [1]}, \\ T_2 = \mu\chi, \\ T_3 = \mu\psi. \end{cases}$$

On peut exprimer aussi ces forces en fonction du déplacement moléculaire. Pour cela il suffit d'écrire les cosinus des angles des arêtes modifiées avec les axes. Prenons par exemple l'arête A'B': les coordonnées du point A étant toujours x, y, z, celles du point B étaient $x + dx, y, z$ avant toute déformation; par la déformation, les coordonnées du point A sont devenues

$$A' \qquad (x+\xi, \quad y+\eta, \quad z+\zeta),$$

et celles du point B

$$B' \quad \left(x+dx+\xi+\frac{d\xi}{dx}dx, \quad y+\eta+\frac{d\eta}{dx}dx, \quad z+\zeta+\frac{d\zeta}{dx}dx\right).$$

Pour avoir les cosinus des angles de A'B' avec les axes, divisons les projections orthogonales de cette ligne, c'est-à-dire les différences des coordonnées de ses extrémités, par la longueur de la

[1] Considérée comme Z_2, la force T_1 agit dans la direction AE tangentiellement au plan ABEF; elle a donc pour effet de changer l'angle droit, que faisait la normale au plan AC avec la direction de la force AE, en un angle aigu $C'A'E' = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Si l'on prenait T_1 comme représentant Y_3, la conclusion serait la même.

ligne, laquelle est, abstraction faite des infiniment petits du deuxième ordre, $\left(1+\frac{d\xi}{dx}\right)dx$. On trouve ainsi, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\begin{array}{llll} A'B' & 1, & \frac{d\eta}{dx}, & \frac{d\zeta}{dx}, \\ A'C' & \frac{d\xi}{dy}, & 1, & \frac{d\zeta}{dy}, \\ A'E' & \frac{d\xi}{dz}, & \frac{d\eta}{dz}, & 1, \end{array}$$

les cosinus des directions A'C', A'E' s'obtenant de la même manière.

D'après cela, le cosinus de l'angle que font entre elles les deux arêtes A'C', A'E' est, si l'on néglige toujours les quantités d'ordre supérieur,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}.$$

Or $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$ peut être pris comme égal à φ à cause de la petitesse de l'angle de déplacement ; on a donc

$$\varphi=\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy},$$

et de même

$$\chi=\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz},$$

$$\psi=\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}.$$

Les composantes tangentielles sont dès lors

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} T_1&=\mu\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right),\\ T_2&=\mu\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right),\\ T_3&=\mu\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right).\end{aligned}\right.$$

En *résumé*, dans les corps solides isotropes, les composantes nor-les N et les composantes tangentielles T des forces élastiques ercées sur trois éléments plans respectivement perpendiculaires x x, aux y et aux z, sont

$$(14)\quad \begin{cases} N_1 = \lambda\theta + 2\mu \dfrac{d\xi}{dx}, \\ N_2 = \lambda\theta + 2\mu \dfrac{d\eta}{dy}, \\ N_3 = \lambda\theta + 2\mu \dfrac{d\zeta}{dz}, \end{cases} \qquad (18)\quad \begin{cases} T_1 = \mu\left(\dfrac{d\eta}{dz} + \dfrac{d\zeta}{dy}\right), \\ T_2 = \mu\left(\dfrac{d\zeta}{dx} + \dfrac{d\xi}{dz}\right), \\ T_3 = \mu\left(\dfrac{d\xi}{dy} + \dfrac{d\eta}{dx}\right), \end{cases}$$

et μ étant deux constantes spéciales à chaque corps et que nous rons appelées les constantes de constitution, ou, d'après M. de aint-Venant, λ et μ étant une seule et même constante de laquelle épendent uniquement toutes les forces élastiques; θ est la dilatation ubique

$$(15)\qquad \theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

145. Lois de la déformation. — Les six fonctions N, T doivent vérifier les trois équations aux différentielles partielles du premier ordre déduites de l'équilibre d'un élément parallélipipédique

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dN_1}{dx} + \dfrac{dT_3}{dy} + \dfrac{dT_2}{dz} + \rho X_0 = 0, \\ \dfrac{dT_3}{dx} + \dfrac{dN_2}{dy} + \dfrac{dT_1}{dz} + \rho Y_0 = 0, \\ \dfrac{dT_2}{dx} + \dfrac{dT_1}{dy} + \dfrac{dN_3}{dz} + \rho Z_0 = 0. \end{cases}$$

On a donc, en ayant égard à la valeur (15) de θ,

$$(19)\qquad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx} + \mu\left(\dfrac{d^2\xi}{dx^2} + \dfrac{d^2\xi}{dy^2} + \dfrac{d^2\xi}{dz^2}\right) + \rho X_0 = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy} + \mu\left(\dfrac{d^2\eta}{dx^2} + \dfrac{d^2\eta}{dy^2} + \dfrac{d^2\eta}{dz^2}\right) + \rho Y_0 = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz} + \mu\left(\dfrac{d^2\zeta}{dx^2} + \dfrac{d^2\zeta}{dy^2} + \dfrac{d^2\zeta}{dz^2}\right) + \rho Z_0 = 0, \end{cases}$$

ou, en désignant par le signe $\Delta^2 F$ le *paramètre différentiel du s*
cond ordre de la fonction F (¹), $\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{d^2F}{dy^2}+\frac{d^2F}{dz^2}$,

$$(19^{bis})\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx}+\mu\Delta^2\xi+\rho X_0=0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy}+\mu\Delta^2\eta+\rho Y_0=0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz}+\mu\Delta^2\zeta+\rho Z_0=0, \end{cases}$$

équations aux différentielles partielles du deuxième ordre, qu
expriment les lois du déplacement moléculaire dans un milie
isotrope légèrement déformé.

En recourant de nouveau à la valeur (15) de θ, on peut encor
écrire ces équations

$$(20)\quad \begin{cases} (\lambda+2\mu)\dfrac{d\theta}{dx}+\mu\left[\dfrac{d\left(\dfrac{d\xi}{dy}-\dfrac{d\eta}{dx}\right)}{dy}-\dfrac{d\left(\dfrac{d\zeta}{dx}-\dfrac{d\xi}{dz}\right)}{dz}\right]+\rho X_0=0, \\ (\lambda+2\mu)\dfrac{d\theta}{dy}+\mu\left[\dfrac{d\left(\dfrac{d\eta}{dz}-\dfrac{d\zeta}{dy}\right)}{dz}-\dfrac{d\left(\dfrac{d\xi}{dy}-\dfrac{d\eta}{dx}\right)}{dx}\right]+\rho Y_0=0, \\ (\lambda+2\mu)\dfrac{d\theta}{dz}+\mu\left[\dfrac{d\left(\dfrac{d\zeta}{dx}-\dfrac{d\xi}{dz}\right)}{dx}-\dfrac{d\left(\dfrac{d\eta}{dz}-\dfrac{d\zeta}{dy}\right)}{dy}\right]+\rho Z_0=0. \end{cases}$$

Si les forces extérieures X_0, Y_0, Z_0, qui le plus souvent se réduisent aux composantes de la pesanteur, proviennent d'une manière

(¹) Le *paramètre différentiel du premier ordre* est

$$\Delta^1 F=\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}.$$

On vérifie aisément que les deux paramètres du premier et du second ordre conservent les mêmes formes et les mêmes valeurs numériques en chaque point, pour tout système d'axes coordonnés rectangulaires.

nérale d'attractions ou de répulsions émanant de centres extérieurs fixes et suivant la loi de la raison inverse du carré de la distance, c'est-à-dire si ces forces ont un potentiel V (63), on a

$$\frac{dX_0}{dx}+\frac{dY_0}{dy}+\frac{dZ_0}{dz}=0.$$

Si donc on ajoute alors les trois équations (20) après les avoir respectivement différentiées par rapport à x, y, z, les forces extérieures disparaîtront, et les parenthèses au coefficient μ s'annulant aussi, on aura

(21) $$\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{d^2\theta}{dy^2}+\frac{d^2\theta}{dz^2}=0,$$

ou

(21 *bis*) $$\Delta^2\theta=0,$$

équation remarquable qui régit la dilatation cubique θ à l'intérieur d'un corps solide isotrope en équilibre d'élasticité et exprime une loi que nous retrouverons pour la température dans le même corps solide en équilibre de chaleur, et pour le potentiel électrique dans le même corps en équilibre électrique, cette loi d'ailleurs n'étant autre que celle qui gouverne le potentiel dans l'attraction des sphéroïdes.

C. — APPLICATION DES FORMULES A QUELQUES CAS SIMPLES.

146. Verge tirée dans le sens de sa longueur. — Pour terminer, nous appliquerons ces formules à quelques cas simples. Nous arriverons ainsi à des relations dont quelques-unes nous sont déjà connues, et qui permettraient de déterminer λ et μ, si l'on pouvait mesurer exactement les coefficients accessibles à l'expérience.

Considérons en premier lieu le cas d'une verge soumise dans le sens de sa longueur à une traction P, par chaque unité de surface de ses deux bases horizontales. Il y a alors étirement parallèlement aux arêtes verticales, contraction uniforme parallèlement aux

bases; par suite, les projections du déplacement d'un point quelconque (x, y, z) sont

$$\xi = -Cx, \quad \eta = -Cy, \quad \zeta = Az,$$

C et A étant deux constantes à déterminer. On voit aisément que est

$$\theta = A - 2C,$$

et que les équations de l'équilibre d'élasticité (19) sont satisfaites si l'on fait abstraction de la pesanteur. En se reportant aux valeurs (14) et (18) des N et des T, on a tous les $T = 0$ et

$$N_1 = N_2 = \lambda(A - 2C) - 2\mu C, \quad \text{et} \quad N_3 = \lambda(A - 2C) + 2\mu A.$$

Or N_1, N_2, partout les mêmes, sont nuls à la surface latérale de la verge; N_3 est partout égal à P; on a donc les deux équations

$$\lambda(A - 2C) - 2\mu C = 0,$$
$$\lambda(A - 2C) + 2\mu A = P;$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} P, \quad C = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} P.$$

Si donc on appelle a l'allongement de l'unité de longueur de la barre tirée par un poids égal à 1, ou *coefficient d'allongement longitudinal*, on a

$$(22) \qquad a = \frac{1 + \frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu},$$

équation que l'on aurait pu écrire immédiatement d'après la valeur connue (12) de E, puisque, suivant la définition précédente,

$$a = \frac{1}{E}.$$

De même, c étant le *coefficient de contraction transversale*, c'est-

lire la contraction de l'unité de longueur dans un plan perpendiculaire au sens de la traction, sous un poids égal à 1, on a

(23) $$c = \frac{\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu}$$

, en prenant le rapport $\frac{c}{a}$, on retrouve pour σ la valeur connue

(13) $$\sigma = \frac{c}{a} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Enfin la dilatation cubique, rapportée à l'unité de pression, est

(24) $$\theta = a - 2c = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}.$$

147. Solide comprimé dans un sens et maintenu invariablement dans les deux autres. — Considérons, en second lieu, un parallélipipède comprimé dans une seule direction, parallèle aux z, par une force $-P$, rapportée toujours à l'unité de surface, les faces latérales étant maintenues de manière à empêcher toute dilatation transversale. On a alors

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = A'z,$$

par suite

$$\theta = A'.$$

Les T sont encore nuls et les N donnent, si l'on appelle $-Q$ la force qu'il faut appliquer sur les faces latérales pour les maintenir immobiles,

$$\lambda A' = -Q, \quad (\lambda + 2\mu)A' = -P.$$

On voit ainsi que la force Q n'est qu'une fraction $\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}$ [1] de la

[1] Cette fraction peut s'écrire $\frac{1}{\frac{1}{\sigma} - 1}$ et par conséquent, σ étant $< \frac{1}{2}$, elle est elle-même < 1.

force P. Et l'on trouve pour le coefficient de raccourcissement et pour le coefficient de compression cubique θ'

$$a' = \frac{1}{\lambda + 2\mu},$$

$$(25) \qquad \theta' = \frac{1}{\lambda + 2\mu}.$$

148. Solide pressé uniformément sur toute sa surfac — Lorsque le solide est soumis à une pression uniforme — P s toute sa surface, il se contracte en restant semblable à lui-mêm On a donc

$$\xi = A''x, \qquad \eta = A''y, \qquad \zeta = A''z,$$

et par suite

$$\theta = 3A''.$$

Les T sont encore nuls, les N se réduisent tous les *trois* à $N = (3\lambda + 2\mu)A''$, et cette composante normale, partout la même, n'est autre que $-P$,

$$(3\lambda + 2\mu)A'' = -P;$$

par conséquent la contraction linéaire est

$$a'' = \frac{1}{3\lambda + 2\mu},$$

et la contraction cubique

$$(26) \qquad \theta'' = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}.$$

Mais θ'' est précisément le *coefficient de compressibilité cubique* k. On a donc

$$(26^{bis}) \qquad k = \frac{3}{3\lambda + 2\mu},$$

et l'on voit que la compressibilité cubique d'un corps est le triple de la variation de volume (24) d'une verge de la même substance tirée

is un sens seulement et libre de se contracter transversalement, e $\frac{3}{1+\frac{\lambda}{\mu}}=3(1-2\sigma)$ de l'allongement a de la même verge (22),

$$k=3(1-2\sigma)a. \tag{26ter}$$

donc on connaissait σ, ou bien $\frac{\lambda}{\mu}$, on pourrait de la simple mesure e a déduire k. Mais en général la vraie valeur de σ est incertaine.

149. Enveloppe sphérique pressée différemment sur es deux faces. — Nous étudierons encore le cas d'une enveloppe phérique soumise à des pressions normales uniformes intérieurement et extérieurement, mais différentes sur les deux faces. Soient :

R le rayon de la paroi interne,
R' celui de la paroi externe ;
P la pression intérieure,
P' la pression extérieure.

Considérons dans l'épaisseur de l'enveloppe une molécule (x, y, z) située à une distance du centre $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Sous l'influence des pressions intérieure et extérieure, cette molécule éprouve un déplacement dirigé, par symétrie, suivant le rayon : soit ρ ce déplacement. En appelant toujours ξ, η, ζ les projections du déplacement sur les trois axes coordonnés, on a

$$\xi=\rho\frac{x}{r}, \quad \eta=\rho\frac{y}{r}, \quad \zeta=\rho\frac{z}{r};$$

et le problème se réduit à trouver la fonction ρ de r satisfaisant aux équations (19), dans lesquelles on suppose $X_0=0$, $Y_0=0$, $Z_0=0$, en négligeant l'influence de la pesanteur. Or, on vérifie facilement que la fonction cherchée est

$$\rho=ar+\frac{b}{r^2}, \tag{27}$$

a et b étant deux constantes, que l'on déterminera d'après les données.

Si, en effet, on admet cette valeur de ρ, on a

$$\xi = ax + \frac{bx}{r^3}, \quad \eta = ay + \frac{by}{r^3}, \quad \zeta = az + \frac{bz}{r^3};$$

et par suite

$$\frac{d\xi}{dx} = a + \frac{b}{r^3} - 3\frac{bx^2}{r^5}, \quad \frac{d\eta}{dx} = -3\frac{bxy}{r^5}, \quad \frac{d\zeta}{dx} = -3\frac{bxz}{r^5},$$
$$\frac{d\xi}{dy} = -3\frac{bxy}{r^5}, \quad \frac{d\eta}{dy} = a + \frac{b}{r^3} - 3\frac{by^2}{r^5}, \quad \frac{d\zeta}{dy} = -3\frac{byz}{r^5},$$
$$\frac{d\xi}{dz} = -3\frac{bxz}{r^3}; \quad \frac{d\eta}{dz} = -3\frac{byz}{r^5}; \quad \frac{d\zeta}{dz} = a + \frac{b}{r^3} - 3\frac{bz^2}{r^5}.$$

Donc

$$\theta \text{ ou } \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 3a,$$

c'est-à-dire

$$\theta = \text{const.},$$

et par conséquent

$$\frac{d\theta}{dx} = 0, \quad \frac{d\theta}{dy} = 0, \quad \frac{d\theta}{dz} = 0.$$

Il ne reste plus dans les équations (19) que les seconds termes; mais si l'on calcule les dérivées secondes

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = -9\frac{bx}{r^5} + 15\frac{bx^3}{r^7}, \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$
$$\frac{d^2\xi}{dy^2} = -3\frac{bx}{r^5} + 15\frac{bxy^2}{r^7}, \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$
$$\frac{d^2\xi}{dz^2} = -3\frac{bx}{r^5} + 15\frac{bxz^2}{r^7}, \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

on voit que ces seconds termes s'annulent aussi. Les équations sont donc satisfaites.

Ayant ainsi l'expression (27) du déplacement, cherchons la force élastique. Puisque suivant tous les rayons le déplacement est le même et la force identique, considérons le rayon dirigé suivant l'axe des x :

$$x = r, \quad y = 0, \quad z = 0,$$
$$\xi = \rho, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

es T sont nuls et N prend la valeur

$$N=(3\lambda+3\mu)a-4\mu\frac{b}{r^3}.$$

r la paroi interne, on a

$$r=R, \quad N=-P,$$

sur la paroi externe

$$r=R', \quad N=-P';$$

où les deux équations

$$P=-(3\lambda+2\mu)a+4\mu\frac{b}{R^3}$$

t

$$P'=-(3\lambda+2\mu)a+4\mu\frac{b}{R'^3},$$

léterminant a et b :

$$a=\frac{1}{3\lambda+2\mu}\frac{PR^3-P'R'^3}{R'^3-R^3},$$

$$b=\frac{1}{4\mu}\frac{(P-P')R^3R'^3}{R'^3-R^3}.$$

En portant ces valeurs dans l'expression générale de ρ

$$\rho=ar+\frac{b}{r^2},$$

on a pour le déplacement ρ d'une molécule quelconque, située à une distance r du centre,

(28) $$=\frac{1}{3\lambda+2\mu}\frac{PR^3-P'R'^3}{R'^3-R^3}r+\frac{1}{4\mu}\frac{(P-P')R^3R'^3}{R'^3-R^3}\frac{1}{r^2}.$$

Supposons d'abord l'enveloppe pressée à l'extérieur seulement,

$$P=0.$$

Alors

$$(29)\qquad \rho = -\left[\frac{1}{3\lambda+2\mu}\frac{R'^3}{R'^3-R^3}+\frac{1}{4\mu}\frac{R^3R'^3}{R'^3-R^3}\frac{1}{r^3}\right]r P'.$$

Le déplacement d'une molécule n'est pas proportionnel à sa dis tance au centre, la parenthèse contenant un terme en $\frac{1}{r_3}$: ce son les points pour lesquels r a la plus petite valeur, c'est-à-dire le points les plus rapprochés de la paroi intérieure, qui éprouvent l plus grand déplacement relatif. Le rayon même R de la paro interne diminue de

$$\left(\frac{1}{3\lambda+2\mu}+\frac{1}{4\mu}\right)\frac{R'^3}{R'^3-R^3}RP'.$$

Mais si le rayon R devient $R(1-\varepsilon)$, le volume V est réduit à $V(1-3\varepsilon)$; on a donc, en appelant Δv la diminution de l'unité de volume de la capacité intérieure de l'enveloppe,

$$(30)\qquad \Delta v = 3\left\{\frac{1}{3\lambda+2\mu}+\frac{1}{4\mu}\right\}\frac{R'^3}{R'^3-R^3}P'.$$

Si la même pression extérieure P' agissait sur une sphère *pleine*. on aurait, en faisant $R=0$ dans l'équation (28),

$$(31)\qquad \rho = -\frac{1}{3\lambda+2\mu}rP':$$

dans ce cas ρ est proportionnel à r; et la diminution de l'unité de volume, quel que soit le rayon, est

$$(32)\qquad \Delta v_1 = \frac{3}{3\lambda+2\mu}P' = kP'$$

conformément à la formule (26bis).

Avec une sphère creuse, la diminution de volume est plus considérable,

$$(33)\qquad \Delta v = \frac{3}{4}\left(\frac{\lambda}{\mu}+2\right)\frac{R'^3}{R'^3+R^3}kP':$$

mesure de Δv ne suffit pas pour déterminer k; il faudrait, en outre, connaître la valeur de $\frac{\lambda}{\mu}$ ou une autre quantité équivalente, le coefficient d'élasticité E par exemple.

L'équation (30) peut en effet s'écrire, d'après les relations (a) et (b)

$$\Delta v = \frac{9}{2}\frac{1-\sigma}{E}\frac{R'^3}{R'^3 - R^3}P' \tag{34}$$

il permet de calculer σ, si Δv et E sont connus; ayant ainsi σ, on en déduira immédiatement k, car, d'après les mêmes relations,

$$k \text{ ou } \frac{3}{3\lambda + 2\mu} = 3\frac{1-2\sigma}{E}. \tag{35}$$

En second lieu, supposons l'enveloppe également pressée à l'intérieur et à l'extérieur

$$P = P'.$$

On a alors

$$\rho = -\frac{1}{3\lambda + 2\mu} rP;$$

par suite, la diminution de l'unité de volume de la capacité intérieure est

$$\Delta u = 3\frac{1}{3\lambda + 2\mu}P = kP, \tag{36}$$

c'est-à-dire que la diminution de volume de la capacité intérieure est la même que celle qu'eût éprouvée un noyau solide de la même substance supportant sur sa surface entière la même pression par unité de surface. Ce résultat était évident *a priori*. Car l'enveloppe, contenant à l'intérieur un noyau solide qui la remplît exactement, subirait de la part de ce noyau une réaction normale précisément égale à la pression P; elle se comporterait donc exactement comme elle le fait dans le cas actuel, et le noyau se contracterait comme s'il était directement pressé avec la force P. Enlevons le noyau et remplaçons-le par une pression intérieure P, rien ne sera changé

pour l'enveloppe, et la capacité intérieure restera celle du noy contracté.

Troisièmement, supposons l'enveloppe pressée à l'intérieur se lement,

$$P' = 0.$$

Elle se dilate, et l'accroissement de l'unité de volume est

$$(37) \qquad \Delta w = 3\left[\frac{1}{3\lambda + 2\mu}\frac{R^3}{R'^3 - R^3} + \frac{1}{4\mu}\frac{R'^3}{R'^3 - R^3}\right]P.$$

Si la pression exercée dans les trois cas est la même, on doit avoi évidemment, et l'on vérifiera facilement que l'on a

$$(38) \qquad \Delta w = \Delta v - \Delta u.$$

150. Verge cylindrique tordue normalement à l'axe. — Une verge AO saisie à l'une de ses extrémités A dans un support inébranlable est sollicitée à l'autre extrémité O par un couple P, $-$P agissant sur le bras de levier CD $= l$, perpendiculaire à la

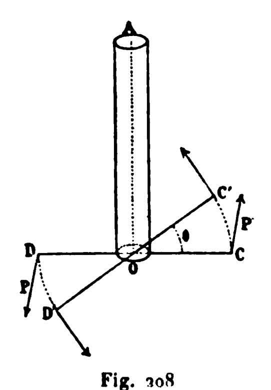


Fig. 208

direction de la verge. Sous l'action de ces forces P, $-$P la verge se tord et, le bras de levier CD ayant tourné d'un angle COC' que l'on appelle *angle de torsion*, un équilibre s'établit, les réactions élastiques développées par la torsion produisant alors le même effet qu'un couple de moment égal et de signe contraire au moment Pl du couple P, $-$P : ce couple par lequel on peut ainsi représenter

ısemble des réactions élastiques de la verge se nomme *couple de tion*. On emploie aussi souvent l'expression de *force de torsion* ır désigner la force qui, agissant à l'extrémité d'un bras de ler égal à l'unité, produirait le même effet que le couple de torsion.

Étudions théoriquement la torsion de cette verge en nous limiıt toujours aux petites déformations. Chaque section droite du indre tourne autour de l'axe d'un certain angle [1], variable avec section considérée depuis θ pour l'extrémité directement sollici: par le couple P, — P jusqu'à o pour l'extrémité fixe. Mais si nous nsidérons deux sections voisines, les molécules situées primitiment sur une même génératrice du cylindre se trouvent, après torsion. sur une ligne faisant avec leur première direction un ıgle φ, qui est le même quel que soit le filet considéré et à quelıe hauteur qu'il se trouve; en d'autres termes, un filet de moléıles parallèle à l'axe forme après la torsion une hélice inclinée sur axe de l'angle φ. Cet angle φ est manifestement l'angle de délacement des sections droites du cylindre les unes par rapport ux autres; nous avons donc

$$P = \mu\varphi \quad [2], \tag{16}$$

P étant la force élastique, rapportée à l'unité de surface, qui agit sur la section dS du filet considéré, tangentiellement à cette section et dans la direction du déplacement, ou, en appelant p l'intensité de la force PdS qui agit réellement sur l'élément dS,

$$p = \mu\varphi\, dS.$$

Mais, si l'on développe le cylindre de rayon ρ sur lequel se trouve le filet considéré, on a immédiatement, en désignant toujours par l la longueur de la verge et par θ l'angle de torsion,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\rho\theta}{l}, \tag{39}$$

(1) Nous négligeons la déformation de la section. (Voir, pour le calcul exact, DE SAINT-VENANT, *Mémoires des savants étrangers*; 1855.)

(2) On a

$$N_1 = o, \quad N_2 = o, \quad N_3 = o;$$
$$T_1 = \mu\varphi, \quad T_2 = o, \quad T_3 = o.$$

ou, l'angle φ étant très petit,

$$\varphi = \frac{\rho\theta}{l}.$$

On a donc

$$p = \mu\frac{\rho\theta}{l}dS.$$

Pour l'équilibre, la somme des moments de toutes les force[s] agissant sur chaque élément d'une section quelconque du cylind[re] doit être égale au moment C du couple qui produit la déformatio[n]. On doit avoir

$$\Sigma p\rho = C,$$

ou

$$\Sigma\mu\frac{\rho^2\theta}{l}dS = C,$$

ou, en prenant $dS = 2\pi\rho d\rho$,

$$\frac{\mu\theta}{l}\int_0^r 2\pi\rho^3 d\rho = C,$$

ou enfin

(40) $$\theta = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{lC}{\frac{\pi}{2}r^4},$$

formule qui contient toutes les lois de l'élasticité de torsion [e]t d'après laquelle la constante μ est aussi souvent appelée *coefficien[t] de torsion*.

151. Barre prismatique fléchie perpendiculairement [à] sa longueur. — La flexion est le mode de déformation à la foi[s] le plus fréquent et le plus complexe. Nous nous bornerons ic[i] à examiner le cas le plus simple, celui d'une barre prismatiqu[e] saisie dans un étau à l'une de ses extrémités et sollicitée à l'autr[e] par une force P perpendiculaire à sa longueur. Soient l cette lon-gueur, e l'épaisseur, c'est-à-dire la dimension transversale paral-lèle à la direction de la force P, et b la largeur, perpendiculaire à

même direction. Menons par l'axe de la barre un plan vertical BCD et considérons la déformation dans ce plan. L'extrémité B est abaissée en B′, et puisqu'il ne s'agit jamais que de déformations très faibles, on peut regarder B′ comme étant sur la verticale du point B : le déplacement BB′ est ce que l'on nomme la flèche de flexion f. En même temps la barre s'est courbée, les filets supérieurs tels que AB′ s'allongeant, les filets inférieurs CD′ se raccourcissant, et le filet moyen EO′ conservant seul exactement sa lon-

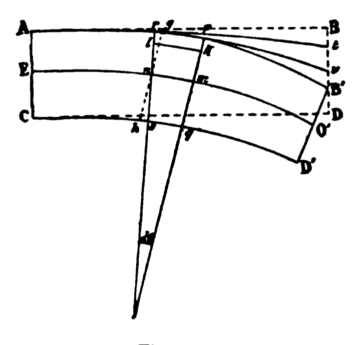


Fig. 209

gueur initiale. De ces allongements et raccourcissements résultent des forces élastiques équilibrant l'action de la force extérieure P. Soient pq une section transversale de la barre faite à une distance $O'm = x$ de l'extrémité libre, rs une section infiniment voisine, tous les filets tels que lk situés au-dessus de mn se sont allongés, les filets placés au-dessous se sont raccourcis : chaque point k de la section pq est donc sollicité par une force élastique dirigée suivant kl et tendant a faire tourner la section autour de m pour la ramener dans la situation première : la somme des moments de toutes ces forces par rapport au point m doit donc être égale au moment par rapport au même point de la force extérieure P qui tend à faire tourner pq en sens contraire. Posons $mn = dx$, $mk = z$, et désignons par $d\theta$ l'angle des deux droites concourantes pq, rs,

$$lk = dx + z d\theta,$$

ainsi qu'on le voit facilement en menant gh parallèle à pq. La force

élastique développée sur l'élément bdz en k par l'allongement zd est, d'après la formule connue (9),

$$E\frac{zd\theta}{dx}bdz,$$

et le moment de cette force par rapport au point m est

$$E\frac{zd\theta}{dx}bdz.z = E\frac{bd\theta}{dx}z^2dz.$$

La déformation étant très faible, on peut prendre pour moment de la force P

$$Px.$$

L'équation de l'équilibre relative à la tranche pq est donc

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} E\frac{bd\theta}{dx}z^2dz = Px,$$

ou

$$E\frac{bd\theta}{dx}\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} z^2dz = Px,$$

ou

$$(41)\qquad \frac{E}{12}\frac{be^3}{dx}d\theta = Px.$$

Aux points r et p, menons les tangentes rt et pv à la courbe AB', ces tangentes font entre elles l'angle θ et l'on a, en désignant tv par df,

$$df = xd\theta,$$

ou, en portant dans l'équation précédente la valeur de θ qui résulte de cette dernière relation,

$$(42)\qquad df = \frac{1}{E}\frac{12\,P}{be^3}x^2dx.$$

Si enfin l'on intègre de $x=0$ à $x=l$, on aura

$$f=\frac{1}{E}\frac{4l^3P}{be^3}, \tag{13}$$

formule qui résume toutes les lois de la flexion dans le cas simple que nous avons considéré :

La flèche est proportionnelle au poids fléchissant, elle est proportionnelle au cube de la longueur, en raison inverse de la largeur (loi évidente *a priori*), en raison inverse du cube de l'épaisseur ; enfin, toutes choses égales d'ailleurs, elle est inversement proportionnelle au coefficient d'élasticité E de la substance.

II. — EXPÉRIENCES.

A. — TRACTION.

152. Allongement d'une verge étirée. — *Lois.* — Les lois de l'allongement d'une verge solide de longueur L et de section S tirée dans le sens de sa longueur par un poids Π sont comprises, avons-nous dit (142), dans la formule

$$l=\frac{\Pi L}{ES}. \tag{9}$$

Expériences de S'Gravesande (¹). — Les premières expériences exactes sont celles de S'Gravesande. La substance à étudier était convertie en un fil de longueur 2L, qui était fixé invariablement à ses deux extrémités ; au milieu on posait une poulie dont la chappe portait à sa partie inférieure un plateau destiné à recevoir des poids, et s'accrochait en haut à un cordon passant sur une deuxième poulie munie d'une aiguille mobile sur un cadran divisé. Un contrepoids attaché à l'extrémité du cordon faisait équilibre à la poulie et au plateau ; le fil était donc très sensiblement horizontal, quand le plateau était vide : l'aiguille se trouvait alors devant une certaine division du cadran. On mettait dans le plateau un poids produi-

(¹) S'GRAVESANDE, *loc. cit.*, I.

sant un léger abaissement de la poulie : l'aiguille se déplaçait et, par suite de déterminations préalables dans le détail desquelles il est inutile d'éntrer, elle faisait connaître la flèche f dont le milieu

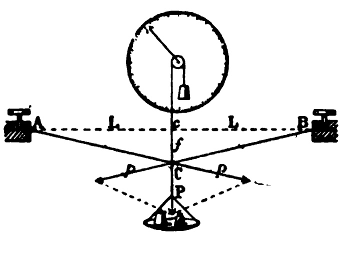


Fig. 210

du fil était abaissé. La longueur d'une moitié du fil est devenue $BC=\sqrt{L^2+f^2}$; cette longueur était primitivement $Bc=L$; l'allongement est donc

$$l=\sqrt{L^2+f^2}-L.$$

Le poids P placé dans le plateau est soutenu par les *tensions* dirigées suivant CA et CB, des deux moitiés du fil : chacune de ces tensions équilibre la composante p de P dirigée suivant le prolongement de l'une des moitiés du fil : cette composante p est donc réellement le poids tenseur. Le parallélogramme des forces est ici un losange et l'on a

$$p=\frac{\frac{P}{2}}{\cos(p, P)}=\frac{\frac{P}{2}}{\cos cCB}=\frac{P}{2}\cdot\frac{f}{\sqrt{L^2+f^2}}\ (^1).$$

(1) Lorsque le poids P est faible, il faut tenir compte du poids du fil : pour cela, on supposera le poids $\frac{\varpi}{2}$ de chaque moitié décomposé en deux forces, l'une $\frac{\varpi}{4}$ appliquée à l'extrémité fixe et détruite par la résistance du point d'appui, l'autre $\frac{\varpi}{4}$ appliquée en C; les deux forces $\frac{\varpi}{4}$ appliquées en C donnent une résultante $\frac{\varpi}{2}$ qui s'ajoute à P. Pour tenir compte du poids ϖ du fil, il suffit donc d'augmenter de $\frac{\varpi}{2}$ le poids P placé dans le plateau : le poids tenseur exact est ainsi

$$p=\frac{1}{2}\left(P+\frac{\varpi}{2}\right)\frac{f}{\sqrt{L^2+f^2}}.$$

ant l'allongement et le poids tenseur on peut, en variant les nditions de l'expérience, vérifier toutes les lois.

f étant toujours très petit par rapport à L, on abrègera un peu le lcul des expressions données plus haut en prenant

$$l \text{ ou } L\left(1+\frac{f^2}{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}-L=\frac{1}{2}\frac{f^2}{L}$$

;

$$p=\frac{P}{2}\cdot\frac{f}{L},$$

l'où

$$E=\frac{PL}{fS}.$$

Ces expériences de S'Gravesande ne sont pas à l'abri de toute critique. Elles portent moins, en effet, sur l'élasticité de traction que sur l'élasticité de flexion, les différentes lignes de molécules parallèles à l'axe du fil s'allongeant inégalement. Par suite de la rigidité de la substance les angles A, B et C s'arrondissent, de sorte que le fil ne prend pas exactement la forme d'un triangle ABC comme on l'a supposé. Enfin les frottements du système commandant l'aiguille indicatrice ajoutent une nouvelle complication. S'Gravesande trouva cependant les lois cherchées : le coefficient numérique E seul était inexact.

On évite toutes ces difficultés en mesurant directement au cathétomètre les allongements d'une barre verticale maintenue invariablement par son extrémité supérieure et sollicitée à sa partie inférieure par des poids agissant suivant la direction même de la barre, conformément à la définition.

C'est ce que firent successivement F. Savart, Masson, Wertheim.

Expériences de Savart (¹) *et de Masson* (²). — Savart employait des tiges cylindriques sur lesquelles il marquait avec la machine à diviser plusieurs traits équidistants. La tige était saisie à sa partie supé-

(¹) Savart, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LXV, 337, 1837.
(²) Masson, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), III, 451, 1841.

rieure dans un étau et tirée à sa partie inférieure par des poi
lorsqu'un allongement définitif était produit, on relevait au cal
tomètre les nouvelles distances des traits. On constata ainsi les i
férentes lois indiquées par S'Gravesande, et l'on obtint pour
coefficients d'élasticité des valeurs exactes. La mesure sur une mê
tige des allongements respectifs de diverses portions égales donn
le moyen de vérifier la proportionnalité de l'allongement à
longueur; la vérification ne fut pas satisfaisante : les allongemen
de portions égales ne furent pas rigoureusement égaux. Masson r
trouva le même fait qui prouve simplement l'impossibilité d'o
tenir à la filière des barres ou des fils parfaitement homogènes.

Observation de Weber (¹). — Il est à remarquer, en outre, qu
pour beaucoup de corps, peut-être pour tous, il faut des heur
avant que sous l'action d'une traction, et en général d'un effo
déterminé, la déformation du corps, bien que comprise largemen
dans la limite d'élasticité, se manifeste complètement; il en est d
même du retour complet à la forme première lorsqu'on supprime
la cause extérieure. W. Weber, à qui l'on doit la première observation de ce *retard* dans l'effet élastique, vit un fil de soie s'allonger plus de 36 heures sous l'action d'un poids bien inférieur à celui qui aurait produit une déformation permanente. Le même fil, débarrassé de son poids, se raccourcit graduellement pendant 20,5 heures avant de reprendre sa longueur primitive. Le retard est surtout appréciable dans les substances organiques, mais il se fait sentir également avec le verre et avec les métaux; d'où la nécessité, dans les mesures, d'attendre que la déformation soit devenue invariable. Pour certains corps toutefois, on n'atteint jamais l'état stationnaire, le corps *file* toujours : il n'y a plus alors aucune certitude dans les mesures.

Expériences de Wertheim (²). — Tenant compte de toutes ces difficultés et apportant le plus grand soin à opérer sur des substances chimiquement pures, Wertheim détermina les coefficients d'élasticité d'un grand nombre de corps avec toute la précision que comporte ce genre de recherches, et il étudia la variation de ce coefficient relativement à la température et à diverses autres circonstances.

(¹) W. Weber, *Pogg. Ann.*, XXXIV, 247; 1835; et LIV, 1; 1841.
(²) Wertheim, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XII, 385, 1844.

L'appareil de Wertheim se compose encore d'un étau mainnant la barre à sa partie supérieure, d'un crochet se fixant à la rtie inférieure pour porter les poids et d'un thétomètre placé à distance pour relever la lonieur de la barre aux diverses phases de l'expéence. L'étau supérieur était formé de deux mâoires demi-cylindriques saisissant la barre sur ut son pourtour, de manière à éviter l'écrasement ue produit un étau ordinaire agissant seulement n deux points opposés ; cet étau E était fixé à ine forte potence en fer implantée dans la muraille t s'appuyant sur la partie supérieure d'une poutre erticale adossée elle-même au mur. A l'extrémité inférieure de la barre, un étau tout semblable F soutenait le crochet destiné à recevoir les poids P : on plaçait ceux-ci dans une caisse CC en bois munie d'une languette glissant à l'intérieur d'une rainure verticale pratiquée dans la poutre, de manière à empêcher tout ballottement et à éviter les vibrations qui modifient très sensiblement l'élasticité du corps. De plus la caisse était portée par des vis calantes que l'on montait lentement lorsqu'on voulait produire la traction : on obtenait ainsi sans secousse une traction exactement parallèle à l'axe de la barre.

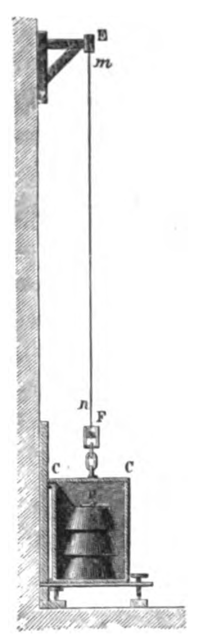


Fig. 211

Des repères m, n ont été marqués à l'avance sur la barre : on les relève avant toute traction ; on fait agir une charge déterminée, on relève de nouveau les repères ; on attend un certain temps, on procède à une nouvelle visée. Si elle donne le même résultat que la première, l'allongement est mesuré. Si les repères ont continué à s'écarter, on attend encore un moment, on fait une nouvelle visée ; et on continue ainsi jusqu'à ce que dans deux visées consécutives on obtienne un résultat identique.

La section de la barre a été déterminée à l'avance soit au sphéromètre, soit par une pesée, la densité ayant préalablement été mesurée sur la barre elle-même. On possède donc tous les éléments nécessaires pour fixer le coefficient d'élasticité.

Quand on voulait opérer à des températures plus hautes ou plus

basses que la température de l'air ambiant, on entourait la bar
d'un manchon ouvert sur sa face antérieure et constitué sur les tr
autres faces par trois enveloppes concentriques, les deux intérieur
en cuivre renfermant entre elles du sable, l'extérieure en tôle fo
mant contre le bain de sable une cheminée à la partie inférieure c
laquelle était une grille destinée à recevoir le combustible. Des ther
momètres placés le long de la barre permettaient d'en suivre l'
chauffement. Quand on était arrivé au point voulu, on fermait l
porte donnant accès à l'air sous le foyer; un refroidissemen
survenait, mais pendant une heure environ la température de l
barre changeait à peine, le bain de sable conservant très long
temps sa chaleur. Dès que la température commençait à baisser
on redonnait l'air au combustible jusqu'à ce que les thermomètres
se missent à monter; on supprimait alors l'accès de l'air; et ainsi
de suite. On pouvait ainsi maintenir la température constante
tout le temps nécessaire aux mesures. Il est bien clair d'ailleurs
qu'il ne s'agit ici que de températures évaluées à 2° ou 3° près :
le mode d'échauffement par suite duquel les thermomètres inférieurs accusent toujours une température plus élevée que les thermomètres supérieurs, la disposition même du manchon librement ouvert sur l'une de ses faces, ne permettent pas une approximation plus grande; mais cela suffisait largement au but que l'on se proposait. Pour les températures basses, on employait un mélange réfrigérant renfermé dans une double enveloppe entourant la barre de toutes parts, sauf suivant une fente ménagée pour les visées.

Wertheim a contrôlé ses mesures par une deuxième méthode, complètement différente, fondée sur l'étude des vibrations longitudinales des verges. Nous y reviendrons plus loin.

Il a également vérifié par un procédé optique qui sera décrit ultérieurement que sous une pression donnée le raccourcissement est égal à l'allongement produit par une tension identique : cette expérience d'une sensibilité extrême a fourni la première démonstration précise de la proposition admise jusque-là sans preuve directe que les lois de l'élasticité de compression sont les mêmes que celles de l'élasticité de traction.

Table des coefficients d'élasticité. — Les tableaux suivants résu-

ent ces expériences : le coefficient d'élasticité [1] est le poids en *ogrammes* qu'il faudrait appliquer à une barre de 1 *millimètre rré de* section pour l'allonger de sa propre longueur [2].

1° *Métaux.*

	DENSITÉ.	COEFFICIENT D'ÉLASTICITÉ mesuré directement. à −15°.	à 15° (a)	à 100°.	à 200°.	COEFFICIENT déduit des vibrations longitudinales. à 15°.
lomb écroui....		kg	1 803 kg	kg	kg	2 278 kg
— recuit....	11,23		1 727	1 630		2 146
r écroui....		9 351	8 131			8 599
— recuit....	18,04		5 585	5 408	5 482	6 372
rgent écroui....		7 800	7 357			7 576
— recuit....	10,30		7 140	7 274	6 374	7 242
Zinc écroui....	7,06		8 734			9 555
Palladium écroui.		10 659	11 759			12 395*
— recuit.	11,23		9 789			11 281*
Cuivre écroui....		13 052	12 449			12 536
— recuit....	8,94		10 519	9 827	7 862	12 540
Platine écroui....		16 224	17 044			17 165
— recuit....	21,08		15 518	14 178	12 964	15 611
Acier angl. écroui.			18 809			19 445
— — recuit.	7,62		17 278	21 292	19 278	19 200
Acier fondu écroui			19 549			19 823
— — recuit	7,92		19 561	19 014	17 926	19 828
Fer en fil ord. écr.		17 743	20 869			19 903
Fer du Berry recuit	7,76		20 794	21 877	17 700	19 925

(a) Ces chiffres ne sont pas absolument comparables à ceux des autres colonnes, les fils employés n'étant pas les mêmes que ceux qui ont servi pour les autres déterminations.

(*) Coefficient déduit des vibrations transverses.

Les coefficients obtenus par la méthode acoustique sont tous supérieurs aux coefficients déterminés directement : cela tient à ce

[1] Le coefficient d'allongement longitudinal a (146) étant égal à $\frac{1}{E}$, l'inverse de l'un des nombres inscrits dans ces tableaux donne la fraction de sa longueur primitive dont s'allonge une barre de la substance considérée sous une traction de 1 kilogramme par 1 millimètre carré de section.

[2] Pour traduire ces coefficients dans le système C. G. S., il faudrait les multiplier par 98 100 000, un kilogramme valant 981 000 dynes et un millimètre carré valant $\frac{1}{100}$ centimètre carré. On trouverait ainsi à 15° : plomb écroui $1,17 \times 10^{11}$, argent écroui $7,22 \times 10^{11}$, fer écroui $2,04 \times 10^{12}$, etc.

que l'allongement qui se manifeste dans un corps en vibration s nore n'ayant qu'un temps très court pour se produire est inféri à l'allongement complet observé dans les mesures directes.

Le fer et l'acier ont le plus grand coefficient d'élasticité : ce co ficient est plus de 10 fois celui du plomb. L'écrouissage augmen ordinairement l'élasticité : peu sensible avec le fer et l'acier (163 l'effet est très marqué pour le cuivre dont l'élasticité s'accro de $\frac{1}{5}$ par le passage à la filière, et plus encore pour l'or do l'augmentation d'élasticité par l'écrouissage est de $\frac{1}{3}$. D'une ma nière générale, toutes les circonstances qui augmentent la densit augmentent le coefficient d'élasticité. Pour la plupart des métaux l'élévation de la température amène une diminution de l'élasticité : l'effet est très sensible pour le platine et plus encore pour le cuivre dont le coefficient à 200° n'est plus que les $\frac{3}{4}$ de ce qu'il était à la température ordinaire. Toutefois, le fer et l'acier anglais ainsi que l'argent font momentanément exception, l'élasticité croissant d'abord jusqu'à 100° pour décroître ensuite. Le passage d'un courant électrique parut avoir un effet spécial : outre la diminution occasionnée par l'élévation de température, il sembla produire un abaissement propre du coefficient d'élasticité, abaissement dû, selon Wertheim, aux vibrations qui accompagnent le passage du courant [1].

2° *Alliages.*

	DENSITÉ.	COEFFICIENT.
Laiton pur $ZnCu^2$	8,61	$8\ 543^{kg}$
Laiton tombac du commerce $ZnCu^2$.	8,66	9 271
Argentan $Zn^4Cu^{18}Ni^5$	8,54	10 788
Packfong $Zn^5Cu^6Ni^3$	8,44	11 500

Le coefficient des alliages est à peu près la moyenne des coefficients des métaux constituant l'alliage, quels qu'aient été d'ailleurs la contraction ou la dilatation et par conséquent le changement de densité accompagnant la combinaison.

(1) Cet abaissement du coefficient d'élasticité dans un conducteur traversé par un courant électrique n'a pas été confirmé par les mesures de Streintz sur la durée des oscillations de torsion d'un fil traversé ou non par un courant : à la même température le coefficient d'élasticité se montra le même dans les deux cas (*Pogg. Annalen*, CL, 381 ; 1873).

3° *Verre* (¹).

	DENSITÉ.	COEFFICIENT par l'allongement.	COEFFICIENT par les vibr. long.
Verre à vitres de Saint-Quirin.....	2,517	» kg	7 917 kg
— à glaces de Cirey...........	2,454	6 722	7 015
— à gobeletterie de Valerysthal.	2,446	6 040	6 890
Cristal de Baccarat...............	3,320	»	5 477

La composition chimique variant d'un verre à l'autre, il n'y a pas de relation à chercher entre la densité et le coefficient d'élasticité.

4° *Bois*, contenant 20 o/o d'humidité (²).

	DENSITÉ.	COEFFICIENT par allongement et au moyen des vibr. longit. — suivant la longueur.	suivant le rayon.	suivant la tangente.
Peuplier............	0,477	517 kg	73 kg	39 kg
Pin sylvestre........	0,559	564	98	29
Chêne	0,872	921	189	130
Hêtre...............	0,823	980	270	159
Bouleau	0,812	997	81	155
Érable..............	0,674	1 021	157	73
Aulne	0,601	1 108	98	59
Sapin	0,493	1 113	95	34
Frêne...............	0,697	1 121	111	102
Orme...............	0,723	1 165	123	63
Acacia..............	0,717	1 262	»	»

Quoique la composition chimique de ces différents bois soit presque identique, on ne retrouve pas l'influence de la densité comme dans le cas des métaux. La direction suivant laquelle s'exerce la traction joue au contraire un rôle prédominant : l'élasticité dans le sens des fibres est souvent 10 fois plus considérable que perpendiculairement à cette direction; et, dans un plan perpendiculaire aux fibres, l'élasticité est toujours moindre suivant la tangente que suivant le rayon. L'état hygrométrique du bois a aussi une action très marquée : le coefficient d'élasticité augmente avec la dessiccation.

(¹) Wertheim et Chevandier, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XIX, 129 et 25, 1847.

(²) Wertheim et Chevandier, C. R., XXIII, 663; 1846.

5° *Substances diverses* (d'après Frankenheim) [1].

	COEFFICIENT		COEFFICIENT
Ardoise	11 035^{kg}	Os	1 635^{kg}
Marbre	2 609	Soie de cocon	861
Pierre calcaire	1 187	Baleine	603
Grès	631	Glace (eau solide)	541
Gypse	360		

En déterminant la vitesse du son dans le caoutchouc à diverses températures, Exner [2] a reconnu qu'elle s'abaisse de 56 à 29 mètres, lorsque la température monte de 0 à 74 degrés. Le coefficient d'élasticité du caoutchouc diminue donc quand la température s'élève. Ce fait n'est pas sans importance, le caoutchouc présentant sous l'action de la chaleur des anomalies qui seront étudiées en leur lieu.

Limite d'élasticité. — Wertheim a encore essayé de déterminer la limite d'élasticité d'un assez grand nombre de corps en mesurant pour chacun le poids en kilogrammes à partir duquel un fil de 1 millimètre de diamètre conserve un allongement permanent de $\frac{1}{2}$ millimètre par 1 mètre. Voici quelques-uns de ses résultats relatifs aux métaux usuels :

	LIMITE D'ÉLASTICITÉ à 15°		LIMITE D'ÉLASTICITÉ à 15°
Plomb étiré	0^{kg},25	Cuivre étiré	12,00
— recuit	0,20	— recuit	3,00
Étain étiré	0,45	Platine étiré	26,00
— recuit	0,20	— recuit	14,50
Or étiré	13,50	Acier anglais étiré	43,00
— recuit	3,00	— — recuit	15,00
Argent étiré	11,20	— fondu étiré	55,60
— recuit	2,70	— — recuit	5,00
Zinc étiré	0,75	Fer étiré	32,50
— recuit	1,00	— recuit	5,00 [3]
— coulé	3,20		

[1] FRANKENHEIM, *Cohäsions lehre*, p. 272. Breslau ; 1835.

[2] EXNER, *Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien*, p. 20 ; 1874.

[3] *Application.* — Calculer la longueur maximum d'une sonde cylindrique en acier anglais étiré. Pour qu'il n'y ait pas de déformation permanente, la section supérieure ne doit pas soutenir un poids dépassant 43^{kil} par 1^{mmq}. On a donc

$$L\,d = 43\,000,$$

Les nombres, comme on le voit, diffèrent beaucoup d'un métal à l'autre. Certains corps, tels que le caoutchouc, peuvent éprouver une déformation considérable sans que la limite d'élasticité soit dépassée ; d'autres, au contraire, le plomb par exemple, sont déformés d'une manière permanente par des actions très faibles. C'est dans ce sens que l'on dit le caoutchouc très élastique, tandis que le plomb l'est très peu. Cette expression peut être conservée comme celle de parfaitement élastique par laquelle nous avons désigné tout corps pris en deçà de sa limite d'élasticité.

Pour plusieurs corps, la limite d'élasticité est fort incertaine, la verge filant sous les plus faibles charges : le plomb, l'étain, le zinc sont dans ce cas. D'autres corps, comme l'acier trempé, le verre, le marbre, peuvent au contraire être, pendant quelques instants, chargés presque jusqu'à la rupture sans prendre d'allongement permanent : leur *ductilité* est nulle.

Pour tous les métaux étudiés, à l'exception du zinc, le recuit abaisse la limite d'élasticité : l'abaissement est surtout considérable pour le platine et le fer ainsi que l'acier. En général aussi la limite d'élasticité s'abaisse rapidement lorsque la température s'élève.

Quand on a dépassé la limite d'élasticité, le corps débarrassé des actions extérieures s'arrête à une forme nouvelle sous laquelle il est encore parfaitement élastique jusqu'à une certaine limite et, chose assez remarquable, avec le même coefficient d'élasticité qu'il avait dans son premier état (Gerstner, Wertheim). Dépasse-t-on la nouvelle limite d'élasticité, le corps soulagé des forces extérieures prendra une troisième forme permanente en conservant toujours même coefficient d'élasticité, et ainsi de suite tant que la verge ne filera pas. Ce fait s'observe très nettement avec presque tous les métaux.

Le temps pendant lequel la traction se continue exerce sur la

L étant la longueur cherchée en mètres, et d la densité 7,8 de l'acier. On tire de là

$$L = 5510^{m}.$$

Sous l'influence de son propre poids P cette barre s'allonge, comme on le reconnaît facilement, de la longueur l

$$l = \frac{1}{2}\frac{43.5510}{19000} = 6^{m},58,$$

1000^{kg} étant le coefficient d'élasticité de l'acier.



production de l'allongement permanent une influence remarquable : l'action prolongée d'une charge bien inférieure à celle qui mesure la limite d'élasticité pour un effort passager amène une déformation permanente, la grandeur de la déformation dépendant de la durée de l'action. Vicat a observé sur des fils de fer un allongement progressif pendant près de 3 ans, l'effort étant à peine le $\frac{1}{4}$ de la charge de rupture. Wertheim a constaté maintes fois des faits analogues.

Il est probable que sur tout métal la plus faible charge agissant pendant un temps assez long produirait un allongement permanent. Nous retrouverons pour la flexion et la torsion des faits semblables, montrant que la limite d'élasticité, loin d'être absolue, dépend singulièrement des circonstances.

En faisant vibrer un fil métallique tiré par un poids, Savart l'a vu s'allonger notablement et conserver ensuite un allongement permanent, bien que le poids employé fût très inférieur à celui qui mesurait la limite d'élasticité.

153. Contraction transversale d'une verge étirée. — En même temps que la longueur d'une verge étirée augmente, sa section diminue. Quand l'allongement est considérable, comme ceux que l'on peut produire avec le caoutchouc, il y a en même temps déformation, la partie moyenne se rétrécissant plus que les extrémités ; mais cet effet est absolument insensible pour les faibles allongements : le rétrécissement peut alors être considéré comme identique sur toute la longueur.

Théories de Navier et de Poisson. — D'une théorie incomplète, Navier [1] avait déduit que le coefficient de contraction transversale c est le quart du coefficient d'allongement longitudinal. En partant de certaines hypothèses sur la manière dont s'attirent les molécules d'un corps solide dérangées de leur position d'équilibre, Poisson [2] arrive à la même conclusion :

$$\sigma = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}.$$

(1) Navier, *loc. cit.*
(2) Poisson, *loc. cit.*

Expérience de Cagniard-Latour. — Une expérience classique, e à Cagniard-Latour, confirme cette valeur. Un fil de cuivre, de ,03 de longueur, fut placé dans l'axe d'un tube cylindrique

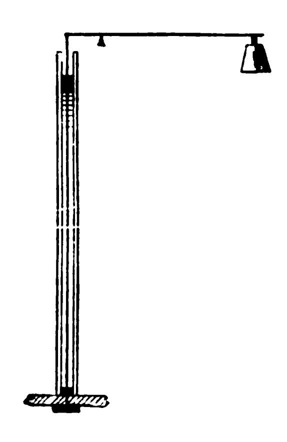


Fig. 212

en verre et fixé solidement à une plaque métallique fermant le tube par le bas. En haut, le fil venait s'adapter à l'extrémité du petit bras d'un levier au moyen duquel il pouvait être tiré dans le sens de sa longueur. Le tube de verre était rempli d'eau.

Détachant le fil à la partie inférieure, on le souleva de 6^{mm} : le niveau de l'eau baissa de 5^{mm}. Remettant le fil en place, on exerça une traction suffisante pour l'allonger de 6^{mm}; le niveau de l'eau descendit de $2^{mm},5$. Ces données suffisent à résoudre la question.

Appelons s la section du fil, S la section annulaire du tube (surface comprise entre la paroi intérieure du tube et le fil); de la première expérience on déduit

$$6s = 5S.$$

Dans la deuxième expérience, on a produit un allongement de 6^{mm}; L étant la longueur primitive du fil, La est l'allongement,

$$La = 6.$$

Transversalement, l'unité de longueur s'est contractée de c, pa suite l'unité de section est devenue $(1-c)^2$ ou, à cause de la pet tesse de c [1], $1-2c$. La section s a donc diminué de $2cs$ et l variation de volume de la partie immergée est, abstraction fail de la longueur sortie de l'eau (longueur très petite par rapport L), $2Lcs$. On a par conséquent

$$2Lcs = 2,5\,S.$$

Des deux dernières équations on tire

$$\frac{c}{a} \text{ ou } \sigma = \frac{2,5}{12}\frac{S}{s}$$

et, comme d'après la première on a

$$\frac{S}{s} = \frac{6}{5},$$

il vient

$$\sigma = \frac{1}{4}.$$

Mais cette expérience ne comporte pas grande précision, les ménisques rendant les lectures incertaines, et la quantité d'eau emportée par le fil, quand on le soulève, n'étant pas négligeable.

Si l'on admet cette valeur de $\sigma = \frac{1}{4}$, le changement de volume Vu d'une verge, tirée dans le sens de sa longueur seulement, $Vu = L(1+a)s(1-2c) - Ls$, ou, si l'on néglige le terme en ac, $V(a-2c)$, est

$$Vu = V\frac{a}{2},$$

c'est-à-dire que la variation u de l'unité de volume d'une verge étirée est la moitié de la variation de l'unité de longueur, cette varia-

(1) Il ne s'agit toujours que de faibles déformations.

on étant d'ailleurs elle aussi une augmentation. Le volume accroît donc par la traction, et en conséquence la densité iminue.

La compression, exercée dans le sens de la longueur seulement, roduirait des résultats exactement inverses : diminution de la lonueur; accroissement de la section, l'accroissement de l'unité de ection étant moitié de la diminution de l'unité de longueur; dimiiution du volume, la diminution de l'unité de volume étant encore noitié de la diminution de l'unité de section; accroissement de la lensité.

Recherches théoriques de Cauchy, de Lamé et de Kirchhoff. — Les raisonnements sur lesquels repose la valeur de $\sigma = \frac{1}{4}$ n'étant pas absolument concluants, pas plus que l'expérience de Cagniard-Latour, la question fut reprise au point de vue mathématique par Cauchy [1] et par Lamé qui, après s'être rangé à l'opinion $\sigma = \frac{1}{4}$ dans un premier travail avec Clapeyron [2], revint ensuite sur cette manière de voir [3] : la conclusion de ces investigations théoriques, auxquelles il faut ajouter celles de M. Kirchhoff [4], fut que σ est compris entre o et $\frac{1}{2}$.

Expériences de Wertheim. — Wertheim effectua de nouvelles recherches expérimentales.

Il fit d'abord une expérience très simple : un prisme de bon caoutchouc, long de 30 centimètres et de section carrée, le côté du carré étant compris entre 9^{mm} et 47^{mm}, était saisi à chaque extrémité dans une monture en fer munie d'un crochet. Par le crochet supérieur on suspendait le prisme à un support fixe ; au crochet inférieur on attachait un poids. Le caoutchouc s'allongeant beaucoup, on mesurait facilement l'allongement ; on mesurait aussi aisément la contraction transversale à l'aide d'un compas d'épaisseur. Tant que l'allongement ne dépasse pas moitié de la longueur primitive du

(1) CAUCHY, *loc. cit.*
(2) LAMÉ et CLAPEYRON, *Mémoires des savants étrangers*, IV ; 1833.
(3) LAMÉ, *loc. cit.*
(4) KIRCHHOFF, *loc. cit.*

prisme, il n'y a pas de déformation sensible et l'on trouve ass exactement $\frac{c}{a}$ ou $\sigma = \frac{1}{3}$.

Sur le conseil de Regnault, Wertheim opéra ensuite avec des tub creux en cristal ou en laiton, et chercha quelle variation de volun éprouve la cavité intérieure du tube lorsqu'on exerce une tractio suivant l'axe. Il est aisé de voir, en effet, que cette variation de v lume doit être précisément celle qu'éprouverait une verge de l même substance remplissant le vide intérieur du tube si elle éta soumise à la même traction par unité de surface. Cela résulte d principe évident, sur lequel nous nous sommes déjà appuyés (142) que, si l'on accole deux ou plusieurs barres de même section, de ma nière à former une barre unique, chacune des barres constituantes sous l'action d'une traction parallèle à l'axe, se comporte comme si elle était seule. D'après ce principe, en effet, deux plans AB, CD,

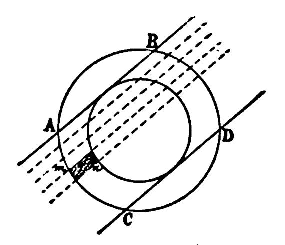


Fig. 213

parallèles entre eux et à l'axe du tube, se rapprocheront de la même quantité que si le tube était plein, la traction par unité de surface restant la même; car chacun des prismes élémentaires *mn*, que l'on obtient en menant entre AB et CD une infinité de plans parallèles aux deux plans considérés, se comporte exactement de même dans les deux cas.

Les tubes étaient soudés ou mastiqués à leurs deux extrémités dans des pièces cylindriques épaisses en métal : la pièce inférieure *a* fermait le tube PQ par le bas et portait un crochet auquel on attachait le poids tenseur; la pièce supérieure *b* présentait un rebord par lequel on fixait solidement le tube à un étau; elle était en outre percée d'un canal continuant la cavité du tube

et surmonté lui-même d'un tube capillaire en verre t. Tout l'appareil était rempli d'eau distillée jusqu'en haut du tube capillaire. Deux traits avaient été tracés sur le tube PQ aussi près que possible des cylindres extrêmes : l'espace compris entre ces traits changera seul de volume, les parties du tube contenues dans les cylindres n'éprouvant aucune variation sensible par suite de l'épaisseur de ceux-ci. On a mesuré à l'avance le diamètre extérieur du tube (au sphéromètre) et son diamètre intérieur (par un jaugeage au mercure), on connaît donc sa section intérieure S et sa section annulaire (utile seulement pour savoir la charge par unité de surface) ; on a mesuré également la section intérieure ω du tube capillaire. On relève la longueur L du tube avant toute traction. On fait agir le poids tenseur : on observe l'allongement La du tube et l'abaissement λ de l'eau en t ; $\frac{\omega\lambda}{LS}$ est la variation u de l'unité de volume : on a donc immédiatement le rapport $\frac{u}{a}$; on en déduit sans peine $\frac{c}{a}$, puisque



Fig. 214

$$u = a - 2c.$$

Nous avons vu qu'avec $\frac{c}{a}$ ou $\sigma = \frac{1}{4}$, on a $\frac{u}{a} = \frac{1}{2}$; avec $\sigma = \frac{1}{3}$ on aurait $\frac{u}{a} = \frac{1}{3}$. Or cette valeur $\frac{u}{a} = \frac{1}{3}$ est précisément celle qu'obtint Wertheim :

Tubes.		V_u observé.	V_u calculé avec $\frac{u}{a} = \frac{1}{3}$.
Cristal	I	3,8613	3,5767
	II	2,4217	2,7093
	III	1,1472	1,0188
	IV	0,7786	0,7959
Laiton	I	0,52017	0,54032
	II	0,54363	0,58578
	III	0,56104	0,59299

Il en déduisit donc $\sigma = \frac{1}{3}$, et comme il avait déjà trouvé $\sigma = \frac{1}{3}$ avec caoutchouc, il conclut que σ était le même pour tous les corps égal à $\frac{1}{3}$.

Mais, sans insister sur le peu de précision que comportent l… expériences sur le caoutchouc [1], nous devons remarquer : 1° qu'… voisinage des traits de repère la variation de volume était nécessai… rement différente de celle qu'admettait Wertheim; 2° que l'inégali… d'épaisseur des parois des tubes, inégalité presque inévitable et do… on ne s'est pas inquiété d'ailleurs, a pu introduire dans les mesure… sur le verre et le laiton des erreurs assez fortes, auxquelles son… venues encore s'ajouter 3° les perturbations dues au phénomène thermique accompagnant la traction et dont Wertheim ne s'est nullement préoccupé, alors que son appareil, qui n'était au fond qu'un thermomètre à vaste réservoir, devait y être très sensible. Les résultats de ces mesures ne s'imposent donc pas comme certains.

Expériences de M. Kirchhoff, de M. Okatow et de M. Schneebeli. — M. Kirchhoff [2] entreprit de nouvelles recherches au moyen d'une déformation spéciale consistant à la fois en une flexion et une torsion et dont il avait calculé préalablement la valeur théorique en fonction de σ, de sorte que la mesure de la flexion et de la torsion produites par un poids donné lui permit de déduire σ. Il opéra principalement sur l'acier trempé qu'il regardait comme parfaitement homogène et isotrope : avec trois verges différentes il trouva

1re verge d'acier trempé.	$\sigma = 0,293$
2e » » »	0,295
3e » » »	0,294
Moyenne. . .	0,294

Enfin, une verge de laiton écroui par le passage à la filière lui donna

Verge de laiton. . . . . $\sigma = 0,387$.

[1] En opérant par la méthode de Regnault sur quatre tubes de caoutchouc provenant de la même fabrique, MM. Naccari et Bellati ont trouvé des nombres variant entre 0,31 et 0,41 (*Nuovo Cimento* (3), II, 217; 1877).

[2] Kirchhoff, *Pogg. Ann.*, CVIII, 369; 1859.

en que ce dernier nombre ne soit pas exactement comparable à lui qui se rapporte à l'acier trempé, le laiton passé à la filière ant certainement beaucoup moins homogène que l'acier, l'écart nsidérable qu'il présente avec le résultat relatif à l'acier semble diquer une différence réelle entre les valeurs de σ afférant aux ux corps.

M. Okatow (¹), reprenant les mesures sur l'acier, a trouvé que σ arie avec la nature et l'état du métal.

	AIGUILLE A TRICOTER.	FIL D'ACIER ANGLAIS.
lans son état initial.	$\sigma=0,275$	$\sigma=0,299$
.près une chauffe dans l'huile. .	0,297	0,319
Complètement recuit.	0,304	0,328

Par l'étude des vibrations de verges d'acier qui avaient jusqu'à un mètre de long et deux centimètres de diamètre, M. Schneebeli (²) a confirmé les nombres de M. Kirchhoff et de M. Okatow ; il a trouvé en effet :

Acier écroui.	$\sigma=0,296$
» recuit	0,303

De tous ces travaux et d'autres que nous exposerons en leur place, il paraît résulter que, dans les solides naturels, σ est variable d'un corps à l'autre, variable même avec l'état du corps.

Recherches de M. de Saint-Venant; expériences de M. Cornu. — N'oublions pas cependant que M. de Saint-Venant, appliquant aux actions moléculaires la loi de Newton, arrive à la valeur $\sigma=\frac{1}{4}$ pour tous les vrais solides isotropes (142). M. Cornu, par des expériences récentes (162), est conduit à la même conclusion.

154. Déformation d'un corps pressé également sur toute sa surface. — Un cas particulièrement important à considérer dans l'étude de l'élasticité de compression est celui où un corps, plein ou creux, est pressé normalement et également sur

(¹) OKATOW, *Pogg. Ann.*, CXIX; 11; 1863.
(²) SCHNEEBELI, *Pogg. Ann.*, CXL; 598; 1870.

toute sa surface. Toutes les dimensions du corps diminuent alo
le volume diminué restant semblable à lui-même quand le cor
est isotrope ; et si l'on appelle k le *coefficient de compressibilité* (14
on a

$$V = V_0(1 - kP).$$

Compressibilité théorique. — Le coefficient k est lié au coefficie
d'allongement a par la relation très simple

$$k = 3(1 - 2\sigma)a. \tag{26ter}$$

D'après Navier et la plupart des savants français, dans les cor
solides isotropes $\sigma = \frac{1}{4}$, d'où

$$k = \frac{3}{4}a.$$

Suivant Wertheim, on a dans tous les solides $\sigma = \frac{1}{3}$ et par suite

$$k = a.$$

Selon d'autres enfin, σ est variable d'un corps à l'autre et

$$k = ma,$$

$m = 3\ (1 - 2\sigma)$ étant un coefficient variable suivant les différents
corps.

Expériences de Regnault. — Peu d'expériences ont été faites pour
mesurer directement la compressibilité cubique. Dans son travail
sur la compressibilité des liquides, Regnault (¹) a pris accessoirement
quelques mesures de compressibilité des solides. Il opérait sur des
vases d'une forme géométriquement déterminée, sphériques ou cylindriques à bases hémisphériques. Le vase soumis à l'expérience, surmonté d'une tige divisée, était rempli d'eau récemment bouillie
et placé au centre d'une enceinte métallique également pleine d'eau.

(¹) Regnault, *loc. cit.*, 429.

système de tubes et de robinets, facile à imaginer, permettait tablir ou de supprimer les communications du vase et de l'enceinte avec un grand réservoir à air comprimé ou avec l'air exté-

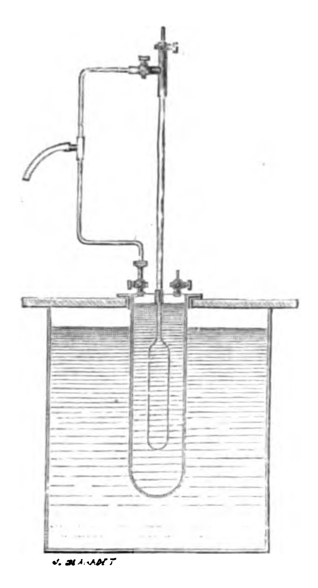


Fig. 215

rieur, de manière à exercer la pression soit à l'intérieur seulement, soit en même temps à l'intérieur et à l'extérieur. On plaçait l'enceinte elle-même dans une grande cuve pleine d'eau, afin d'annihiler les effets thermiques de la compression.

Pour l'objet qui nous occupe actuellement, les jaugeages préliminaires étant faits, il suffit d'observer sur le tube divisé la variation de volume de la capacité intérieure lorsque le vase est pressé à l'extérieur seulement. La capacité intérieure du vase éprouve alors une diminution de volume plus considérable que celle qu'eût éprouvée un noyau solide de la même substance remplissant cette capacité : car l'enveloppe ne supportant à l'intérieur aucune pression se resserre plus que si elle subissait la réaction d'un noyau interne. Mais la mesure de la diminution du volume intérieur, jointe à la détermination du coefficient d'élasticité de la substance, permettra encore d'obtenir σ (et par suite k), comme nous l'avons vu plus haut (149).

Regnault a successivement opéré sur une sphère creuse de cuiv une sphère creuse de laiton et un cylindre creux de verre à fo hémisphériques.

Si l'on calcule la valeur de $\frac{9}{2}\frac{1-\sigma}{E}$ (34) au moyen des expérien effectuées sur la sphère de cuivre, on trouve que cette qua tité, constante jusqu'à 6 atmosphères, croît ensuite, indiquant ai qu'à partir de cette pression la limite d'élasticité était dépass En se bornant aux expériences faites à des pressions inférieu à 6 atmosphères, on a, les pressions étant ramenées au kil gramme et au millimètre carré,

$$\frac{9}{2}\frac{1-\sigma}{E}=0,000\,3039.$$

Or, d'après Wertheim, le coefficient d'élasticité du cuivre recuit est, à la température ordinaire,

$$E=10519$$

et par suite

$$a=\frac{1}{E}=0,000\,0951.$$

On aurait donc

$$\sigma=0,290$$

et

$$k=0,000\,1199.$$

La sphère de laiton donna des valeurs de $\frac{9}{2}\frac{1-\sigma}{E}$ constantes jusqu'à 10 atmosphères, ce qui prouve qu'à cette pression la limite d'élasticité n'était pas atteinte. On peut donc ici faire entrer en ligne de compte toutes les expériences : on obtient ainsi

$$\frac{9}{2}\frac{1-\sigma}{E}=0,000\,3256.$$

D'après Wertheim

$$E=9271$$

et par suite

$$a=0,000\,1078.$$

aurait donc

$$\sigma = 0,329$$

$$k = 0,000\,110\,5.$$

Enfin, pour le vase cylindrique en verre, si l'on part d'une for-
ule analogue à celle qui se rapporte aux vases sphériques et de la
leur

$$E = 6\,040,$$

'où

$$a = 0,000\,165\,5,$$

n trouve

$$\sigma = 0,319$$

t

$$k = 0,000\,179.$$

Si donc on pouvait comparer ainsi en toute sécurité le coefficient d'élasticité déterminé sur un échantillon à la compressibilité cubique mesurée sur un autre échantillon de la même substance, si l'on pouvait supposer l'enveloppe parfaitement homogène, ayant exactement la forme voulue et se maintenant semblable à elle-même dans la déformation, on serait encore amené à regarder σ comme variant d'un corps à l'autre.

155. Manomètre Cailletet fondé sur la compressibilité du verre. — M. Cailletet a imaginé pour les hautes pressions un manomètre fondé sur les déformations que subit un réservoir cylindrique en verre lorsqu'on le comprime sur ses parois extérieures. Des mesures faites au moyen d'un manomètre à air libre de grandes dimensions lui ont montré, en effet, que la diminution de volume d'un réservoir de verre reste proportionnelle à la pression jusqu'à un point voisin de la rupture et que de plus, si la pression n'agit pas trop longtemps, le verre ne subit pas de déformation permanente sensible. Le manomètre de M. Cailletet est d'une grande simplicité : il se compose d'une sorte de thermomètre de verre dont le réservoir cylindrique, fermé par des calottes sphériques, est rempli d'un liquide quelconque. Le tube capillaire T exactement calibré, qui est soudé au réservoir, porte un renflement

destiné à le fixer, au moyen de gutta-percha, dans un ajutage cuivre. Ainsi disposé, cet ajutage ferme hermétiquement, à l'ai de la vis B, l'orifice d'un tube d'acier A très résistant, faisant fon tion de réservoir et recevant la pression par le tube fixe en cuivre C

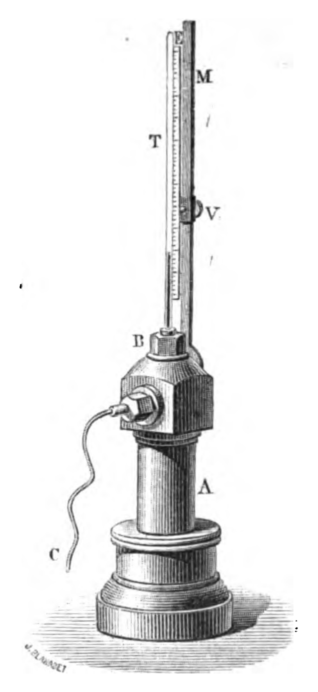


Fig. 216

Avant de donner la pression, on a soin d'amener le zéro de l'échelle divisée au niveau du liquide dans le tube capillaire, en faisant glisser l'échelle sur la tige M, à l'aide du bouton à vis V. La hauteur à laquelle s'élèvera le liquide déplacé par la diminution de volume de l'enveloppe indiquera immédiatement la pression.

B. — TORSION.

156. Travaux de Coulomb. — Les lois de la torsion ont été établies par Coulomb (¹) de la manière suivante : Un fil métallique

(¹) Coulomb, *loc. cit.*, et *Traité de physique* de Biot, I.

s fin AB, fixé à sa partie supérieure dans un étau solide, porte à partie inférieure un poids sphérique ou cylindrique C, sous lequel collée une aiguille très légère, mobile sur un cercle divisé MN nt le centre se trouve dans le prolongement du fil. Saisissant

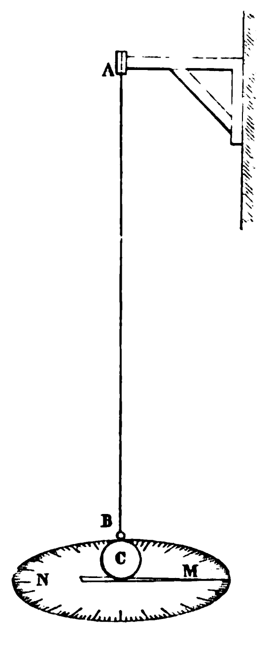


Fig. 217

le cylindre à la main, on le tourne d'un certain angle et on abandonne l'appareil à lui-même. Alors la réaction de torsion produit son effet, le fil se détord et le système revient à sa position d'équilibre ; mais la vitesse acquise fait dépasser cette position et le fil se tord en sens contraire d'un angle sensiblement égal à celui dont on l'avait tordu d'abord. Le système s'arrête alors, puis repart en sens inverse, exécutant ainsi une série d'oscillations qui se continueraient indéfiniment sans les résistances passives et qui, pratiquement, se prolongent très longtemps avec une amplitude lentement décroissante.

Or, ces oscillations présentent un caractère remarquable, qui frappa immédiatement Coulomb, à savoir qu'elles sont iso-

chrones, quel que soit l'angle de torsion (¹). Pour constater ce fait toute rigueur, on emploiera la méthode des passages (91) en vis à distance l'aiguille avec une lunette : on déterminera la dur d'un certain nombre d'oscillations ayant une amplitude quelconq mesurée sur le cercle inférieur ; puis on recommencera la mên opération pour une amplitude entièrement différente, et on retro vera exactement la même durée.

De cet isochronisme, il résulte que le moment du couple de to sion est proportionnel à l'angle de torsion. Nous savons en effet (8 que sous l'action d'une force proportionnelle à l'écart θ un pendul matériel exécute des oscillations isochrones dont la durée est

$$t=\pi\sqrt{\frac{Q}{T}},$$

Q étant le moment d'inertie du système relativement à l'axe d rotation et T le moment de la force pour un écart 1. La torsion agi donc comme une force proportionnelle à l'écart ; en d'autres terme le moment C du couple de torsion est proportionnel à l'angle d torsion

$$C=T\theta. \tag{44}$$

T, ou le moment du couple de torsion pour un angle égal à l'unité, se nomme la *constante de la torsion*.

La durée d'une oscillation simple du système est donc

$$t=\pi\sqrt{\frac{Q}{T}}. \tag{45}$$

Dans l'expérience de Coulomb, le moment d'inertie du fil est

(¹) Il est clair que cet énoncé ne doit pas être pris au pied de la lettre ; mais il faut entendre que la limite d'amplitude pour l'isochronisme est toujours très reculée. Ainsi, avec des fils de fer n° 12 et n° 7 de 9 pouces de longueur tendus par des poids de 1/2 livre ou de 2 livres, cette limite était de 180° ; avec des fils de cuivre de mêmes numéros et dans les mêmes conditions elle atteignait 360° ; avec un fil de cuivre n° 7 de 36 pouces de long elle s'élevait à 3.360°. Elle n'était plus que 45° pour un fil de fer et 50° pour un fil de cuivre, n° 1, de 9 pouces de longueur, et tendus par un poids de 2 livres.

ièrement négligeable devant le moment d'inertie du cylindre y est attaché.

Le moment d'inertie d'un cylindre de rayon r et de hauteur h, rapport à son axe, est $\frac{1}{2}Mr^2$, M désignant la masse $\pi r^2 hD$ du indre (60). On a donc alors

$$t=\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}Mr^2}{T}}.$$

Si au cylindre on substituait une boule de rayon r, on aurait

$$t=\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}Mr^2}{T}}.$$

Il serait d'ailleurs préférable de déterminer le moment d'inertie expérimentalement, ainsi que Gauss l'a fait dans ses mesures de intensité du magnétisme terrestre.

En tous cas, la mesure de t donnera la constante de la torsion T par la formule (45).

Si, conservant le même poids tenseur, laissant par conséquent Σmr^2 constant, on change les dimensions ou la nature du fil, les valeurs T, T′ de la constante de la torsion dans deux expériences différentes seront dans le rapport inverse des carrés des temps des oscillations

$$\frac{T}{T'}=\frac{t'^2}{t^2}.$$

On pourra donc, de la mesure du temps de l'oscillation dans chaque cas, déduire l'influence de chacune des conditions de l'expérience, les autres circonstances restant les mêmes.

C'est ainsi que Coulomb trouva :

1° *La loi des longueurs*. — La constante de la torsion pour un fil déterminé est en raison inverse de la longueur.

En effet, deux fils de cuivre n° 7, de longueurs différentes, 9 pouces et 36 pouces, donnèrent avec une même charge (2 livres) ([1]), pour

([1]) La constante de la torsion est indépendante du poids tenseur. Coulomb l'a établi en vérifiant qu'avec des poids différents de même diamètre, ayant

la durée de 20 oscillations, 110^{s} et 222^{s}, c'est-à-dire deux nombre dans le rapport de 1 à 2. La loi d'ailleurs peut être regarde comme évidente *a priori;* car un fil, attaché à son extrémit supérieure et tordu en bas par un couple déterminé, restera e équilibre dans sa moitié supérieure si l'on transporte le coupl au milieu du fil, là où l'angle de torsion n'est évidemment qu moitié de ce qu'il était en bas; un même couple ne tord donc qu d'un angle moitié un fil de longueur moitié, ou pour tordre d même angle un fil de longueur moitié il faut un couple de momen double.

2° *La loi des diamètres.* — La constante de la torsion pour un fi donné est proportionnelle à la quatrième puissance du diamètre

Coulomb arrive à cette loi par un raisonnement ingénieux. L force sollicitant un point quelconque du fil est proportionnelle a déplacement qui, toutes choses égales d'ailleurs, est proportionnel a diamètre; donc la force est elle-même proportionnelle au diamètre et le moment de cette force est proportionnel au carré du diamètre Comme d'autre part le nombre des points à considérer est proportionnel à la section du fil, c'est-à-dire au carré du diamètre, la somme de tous les moments des forces élastiques sera proportionnelle à la quatrième puissance du diamètre du fil. En effet, troi fils de cuivre de même longueur (9 pouces), mais de diamètres différents (nos 12, 7 et 1), tendus par un même poids (2 livres), ont donn à Coulomb, pour la durée de 20 oscillations, 442^{s}, 110^{s}, 32^{s}; or un même longueur (6 pieds) de chacun de ces fils pesait 5^{grains}, $18^{grains},5$, 66^{grains}; et si l'on multiplie chaque durée par le poids correspondant on a : 2210, 2035, 2112, c'est-à-dire trois nombres à trè

par conséquent même rayon de giration, la durée des oscillations était proportionnelle à la racine carrée de la masse. Ainsi il trouva pour la durée de 20 oscillations

avec un fil de fer n° 12 tendu par un poids de	1/2 livre......	120^{s}
» » » »	2 »	242
» » n° 7 »	1/2 »	42
» » » »	2 »	85
» un fil de cuivre n° 12 »	1/2 »	220
» » » »	2 »	442
» » n° 7 »	1/2 »	57
» » » »	2 »	110

(Les nos 12, 7 et 1 correspondent aux diamètres $0^{mm},15$, $0^{mm},45$ et $1^{mm},90$.

u près égaux, ce qui démontre la loi. Trois fils de fer (nos 12, 7 11 ont semblablement donné, à longueur égale et avec la même large, 242°, 85°, 23°, et les poids de ces fils pour 6 pieds de longueur étant 5 grains, 14 grains, 56 grains, on en conclut pour les produits 110, 1190, 1288 : la loi est donc vérifiée.

3° *L'influence de la substance.* — Evidente *a priori*, cette influence ressort immédiatement des expériences précédentes.

En résumé, la constante de la torsion pour un fil déterminé est en raison inverse de la longueur, en raison directe de la quatrième puissance du diamètre, et dépend enfin de la nature du fil.

On a donc

(46) $$T = A\frac{r^4}{l}$$

et par suite

(47) $$\theta = \frac{1}{A}\frac{l}{r^4}C,$$

A étant un coefficient constant pour une même substance, et C représentant le moment Pl du couple qui produit la torsion.

On voit qu'en prenant un fil de nature déterminée, assez long et assez fin, on pourra donner à T une valeur aussi petite que l'on voudra: on aura ainsi le moyen d'équilibrer par l'élasticité de torsion les forces les plus faibles et en même temps de les mesurer, le couple de torsion étant toujours proportionnel à l'angle de torsion. Tel est le principe de la balance de Coulomb, que sous une forme spéciale nous avons déjà vu servir à la mesure de la densité de la terre (105).

Coulomb reconnut encore qu'une torsion trop forte amène une déformation permanente ; mais le fil ainsi déformé obéit aux mêmes lois avec le même coefficient, et la limite d'élasticité a reculé : le fil supporte, sans éprouver une nouvelle déformation permanente, des torsions plus fortes que celle qui l'a déformé une première fois. On peut ensuite produire un nouvel effet permanent et l'on observe les mêmes phénomènes, jusqu'à ce qu'enfin on arrive à la rupture.

157. Expériences de Savart et de Wertheim. — Coulomb

n'avait opéré que sur des fils métalliques. Savart ([1]) étendit les r
cherches aux verges rigides. La verge, placée horizontalement s
un tour, était fixée dans un étau par l'un de ses bouts, tanc
que l'autre, appuyé contre une pointe, portait un levier auquel
attachait un poids.

Wertheim ([2]) reprit ces expériences. La barre à expérimenter A
était saisie à ses deux extrémités dans deux poupées montées s
un fort banc en fonte. L'une des poupées D était fixe ; l'autre

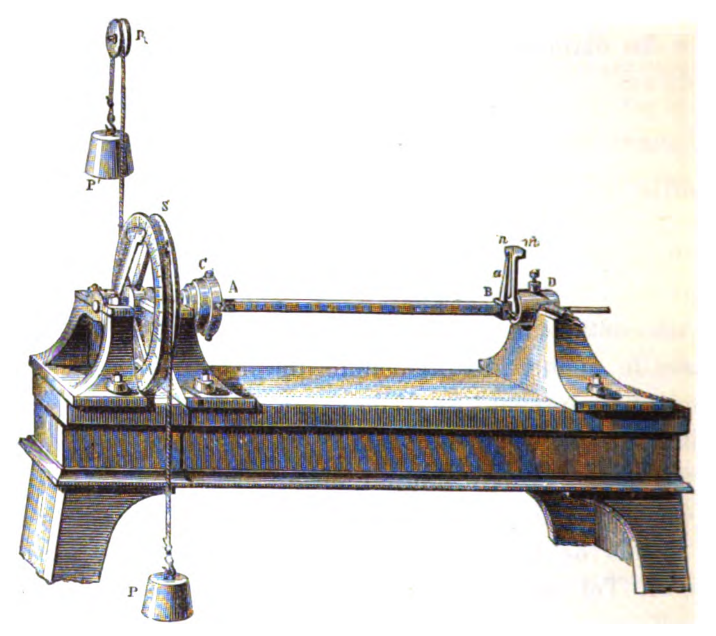


Fig. 218

mobile autour de son axe, portait une roue S sur laquelle deux poids égaux P et P′ agissaient à l'aide de cordes et d'une poulie de renvoi R de manière à réaliser un couple. Sous l'action de ce couple, la barre se tordait d'un angle que l'on mesurait au moyen de divisions tracées sur la roue en regard d'une alidade immobile. La poupée fixe portait aussi une graduation destinée à vérifier la parfaite immobilité de l'extrémité de la barre qu'on y avait en-

([1]) Savart, *Ann. de chim. et de phys.* (2), XLI, 373 ; 1829.
([2]) Wertheim, *Ann. de chim. et de phys.* (3), L, 195 ; 1857.

astrée et qui était munie à cet effet d'une alidade *a* placée vis-à-vis les divisions *mn*.

Wertheim trouva que l'angle de torsion croît un peu plus vite que e moment du couple qui produit la torsion, comme si la résistance liminuait à mesure que la torsion augmente. Il trouva aussi que l'angle de torsion augmente moins rapidement que la longueur, tendant vers une limite qu'il atteindrait si les dimensions transversales étaient négligeables par rapport à la longueur. En opérant avec des tubes creux prolongés par un tube capillaire, il reconnut une diminution du volume intérieur d'autant plus considérable que les deux dimensions transversales différaient plus entre elles. Enfin, quelque faible que fût la torsion, il observa toujours un certain effet permanent. Sauf ces restrictions, les lois établies par Coulomb sont exactes ; et l'on a

$$\theta = \frac{1}{\mu}\frac{lC}{B^4}, \tag{48}$$

B^4 étant un terme du quatrième degré dont la valeur est :

pour une tige circulaire de rayon r. . . . $\frac{\pi r^4}{2}$,

pour un tube de rayons r et r'. . . . . . . $\frac{\pi(r^4 - r'^4)}{2}$,

pour une verge rectangulaire, de largeur b et d'épaisseur e . . . . $\frac{be(b^2 + e^2)}{12}$.

Voici quelques coefficients de torsion μ calculés par M. Wüllner [1] sur les expériences de Wertheim ; en les rapprochant des coefficients d'élasticité E déterminés également par Wertheim, on a pu à l'aide de la formule

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)} \tag{b}$$

établir les valeurs de σ contenues dans la dernière colonne du tableau.

[1] WÜLLNER, *Lehrbuch der Experimentalphysik*, 4e éd., I, 227. Leipzig ; 1882.

	Rayon de la verge.	μ d'après la torsion	E d'après l'allongement.	
Acier anglais. . .	$5^{mm},055$	7458	19542	o,[illegible]
Fer.	8 ,220	6837	17805	o,[illegible]
	5 ,501	6677		
Cuivre.	5 ,031	3612	9395	o,[illegible]
Verre	3 ,535	2383	6200	o,[illegible]
	3 ,423	2308		

MM. Kohlrausch et Loomis (¹), en opérant par la méthode de Coulomb, ont trouvé pour μ des nombres un peu différents :

	μ d'après la torsion	E d'après les vib. long.
Fer.	6940	20310
Cuivre	3900	12140
Laiton	3200	9810

Il en résulterait pour σ des valeurs plus élevées encore que celles qui se déduisent des expériences de Wertheim ; mais les mesures de E faites ici par une méthode indirecte sont trop incertaines pour permettre un calcul exact (²).

158. Retard dans l'effet de torsion; expériences de M. Kohlrausch. — Wertheim avait constaté dans les phénomènes de torsion le retard signalé par Weber pour l'élasticité de traction (152). M. Kohlrausch (³) l'étudia en détail. A cet effet, il prit une balance de torsion munie d'un fil de verre très fin supportant une petite aiguille aimantée : il tordit le fil par en haut de trois

(¹) Kohlrausch et Loomis, *Pogg. Ann.*, CXLI; 1870.

(²) Le but principal des expériences de MM. Kohlrausch et Loomis était d'étudier l'influence de la température sur le coefficient de torsion. Ils ont trouvé que ce coefficient décroissait constamment avec la température dans tous les corps sur lesquels ils ont opéré ; et, regardant σ comme constant, ils ont calculé la variation de E, ce qui leur a donné les nombres suivants :

Fer........ $E = E_0(1 - 0,000\,483\,t - 0,000\,000\,12\,t^2)$,
Cuivre..... $E = E_0(1 - 0,000\,572\,t - 0,000\,000\,28\,t^2)$,
Laiton..... $E = E_0(1 - 0,000\,485\,t - 0,000\,001\,36\,t^2)$,

résultats concordant, sauf pour le fer, avec ceux de Wertheim (152).

(³) Kohlrausch, *Pogg. Ann.*, CXIX, 337 ; 1863 ; CXXVIII, 1 ; 1866 ; CLVIII, 337 ; 1876 ; et CLX, 225 ; 1877.

conférences entières, ce qui amena l'aiguille presque à 90° du ridien magnétique. Mais l'aiguille ne se se tint pas dans cette poon, elle se rapprocha graduellement du plan du méridien magnéne. On tourna le tambour supérieur de façon à conserver, mal- ce déplacement, une torsion d'exactement trois circonférences, l'on nota aux époques successives t les valeurs du sinus de l'angle α mé par l'aiguille et le méridien magnétique, sinus qui peut re pris pour mesure du moment du couple de torsion ; on trouva nsi :

t	$\sin\alpha$	t	$\sin\alpha$
1m,25	0,9247	110m	0,9120
2 ,50	0,9231	206	0,9071
5 ,25	0,9211	452	0,9051
12	0,9181	1310	0,9042
25	0,9154	1780	0,8995
50	0,9138	2760	0,8995

Le moment du couple de torsion pour un angle déterminé n'atteint donc que progressivement sa valeur définitive.

Réciproquement, un fil tordu ne revient pas à sa position d'équilibre immédiatement après la suppression de l'effort extérieur. Un fil d'argent ayant été tordu de 180° pendant 2, 5, ou 10 minutes, on observa, par la méthode de Poggendorff, la quantité x dont le fil était encore distant de sa position d'équilibre t minutes après la suppression de l'effort ; les valeurs de x rapportées ci-dessous sont exprimées en divisions de l'échelle (pour les convertir en minutes d'arc il faudrait les multiplier par 0,706).

t	x		
0m,17	38	»	74
0 ,33	33,6	53,5	65,9
1	24,3	41,3	53,4
2	19,3	33,6	44.8
5	13,9	23,8	33,7
10	11,0	17,9	26,0
20	7,9	13,4	19,6
50		8,9	12,6
80		7,2	10,5

Ainsi, même après une torsion de courte durée, le retard est appréciable. Il augmente rapidement avec la durée et avec l'importance de la torsion. Mais le fait le plus curieux observé par M. Kohlrausch est la superposition des retards correspondant à des torsions successives. Tandis que le fil, après une torsion énergique et prolongée dans un certain sens, se rapproche progressivement de sa position d'équilibre, faisons-lui subir pendant quelques instants une nouvelle torsion en sens contraire, et nous le verrons, débarrassé de cette deuxième torsion, se rapprocher de la position où on l'avait saisi pour le tordre la deuxième fois, l'atteindre, s'y arrêter un instant, puis repartir en sens contraire pour se rapprocher de la position d'équilibre initial, comme si la deuxième torsion n'avait pas eu lieu.

Tous ces effets de retard ont beaucoup occupé les physiciens allemands [1]. De tels phénomènes sont sans doute intéressants comme indiquant à l'intérieur des corps une sorte de frottement d'une nature spéciale. Il n'en existe toutefois jusqu'à ce jour aucune explication satisfaisante.

159. Torsion permanente; recherches de M. G. Wiedemann. — Outre l'effet temporaire, affecté d'un retard plus ou moins marqué, il y a toujours un effet permanent que l'on constate aisément dès que l'effort a été un peu considérable (156). M. G. Wiedemann [2] a particulièrement étudié la torsion permanente [3]. Un fil de laiton, de $0^m,50$ environ de longueur et de 2^{mm} de diamètre, tendu par un poids de 10 kilogr., pouvait être tordu sans secousse au moyen d'une poulie actionnée par un poids p : une disposition convenable permettait d'observer la torsion soit temporaire soit permanente. Dans le tableau suivant, T désigne la torsion observée au premier instant : cette torsion croît peu à peu jusqu'à une valeur T_1. Quand elle a cessé d'aug-

(1) O.-E. Meyer, *Pogg. Ann.*, CLI, 108; 1874; Neesen, *Pogg. Ann.*, CLVIII, 579; 1876; Boltzmann, *Pogg. Ann.*, Erg. band VII, 624; 1876; Schmidt, *Wied. Ann.*, II, 48 et 241; 1877; Warburg, *Wied. Ann.*, IV, 232; 1878; et X, 13; 1880.

(2) G. Wiedemann, *Wied. Ann.*, VI, 485; 1879; et *Journal de physique* (Bouty), VIII, 349.

(3) Voir aussi Boltzmann, *Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch., in Wien*; 1874; et Warburg, *Wied. Ann.*, X, 13; 1880.

menter, on supprime le poids p et l'on observe une torsion résiduelle R qui décroît peu à peu jusqu'à une limite R_1; cette limite est la torsion permanente proprement dite. Les poids p sont exprimés en grammes, les torsions en unités arbitraires.

[illegible]	0	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140
[illegible]	0	312	416	523	628	733	844	956,5	1070	1191	1338	1510	1725
[illegible]$_1$	0	312	416	523	628	734	845	959	1074	1204	1351	1543	1820
R	0	0,6	1,3	2,3	3,8	5,8	9,8	16	26,3	44	73,3	132,8	253
R_1	0	0,6	1,3	2,3	3,8	5,8	9,8	16	26,3	43,3	71,8	130	245
$-R_1$	0	311,4	414,7	520,7	624,2	728,2	835,2	943	1048,7	1160,7	1279,2	1413	1575
Δ		(3.103,8)	103,3	106	103,5	104	107	107,8	105,7	112	119,5	134	162

Les différences Δ inscrites dans la dernière ligne horizontale montrent que l'accroissement de l'effet temporaire dû à un même accroissement de poids p augmente avec la valeur absolue de p.

Si sur le fil ayant servi à cette première série d'expériences on en recommence une deuxième série avec les mêmes poids 0, 30, 40... grammes, la torsion permanente acquise sous l'action du dernier poids 140 grammes se conserve intégralement, et la torsion temporaire $T_1 - R_1$ reprend les mêmes valeurs que dans le premier cas.

Quand un fil bien recuit est tordu dans un sens, puis en sens inverse, les torsions de sens contraire se superposent sans se détruire, comme on le voit aux stries longitudinales que montre toujours la surface du fil. Il en résulte que la loi exacte des oscillations de torsion doit être très compliquée et que le mouvement ne doit acquérir cette régularité absolue constatée par MM. Cornu et Baille (105) qu'après que le fil s'est accommodé à un régime invariable par des oscillations très nombreuses. Les expériences de M. G. Wiedemann mettent nettement en évidence cette accommodation du fil, mais sans dégager la loi des premières oscillations.

160. Loi des oscillations de torsion. — Quand le fil s'est ainsi accommodé, les oscillations présèntent une amplitude régulièrement décroissante. Gauss et Weber [1], qui ont les premiers suivi avec exactitude ce décroissement de la grandeur des oscillations,

[1] GAUSS et WEBER, *Resultate aus der Beobachtungen des magnetischen Vereins*. Leipzig; 1841.

avaient trouvé que, quand elles sont suffisamment petites (inférieures à 4° ou 5°), les *amplitudes successives décroissent en progression géométrique*. Si $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ ..... désignent les écarts extrêmes en valeur absolue, on a

$$\frac{\theta_0}{\theta_1}=\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{\theta_2}{\theta_3}=\ldots\ldots=a,$$

ou

$$\text{Log}\,\theta_0-\text{Log}\,\theta_1=\text{Log}\,\theta_1-\text{Log}\,\theta_2=\ldots\ldots=\text{Log}\,a:$$

la différence des logarithmes naturels de deux amplitudes consécutives, le *décrément logarithmique* est constant. De ce fait il résulte que le mouvement du fil éprouve à chaque instant une résistance proportionnelle à sa vitesse actuelle. Car si l'on se reporte au calcul développé plus haut (86) pour établir l'effet de la résistance de l'air sur le mouvement du pendule simple, on voit que, soumis à une résistance égale, en valeur absolue, à $2\varepsilon\frac{d\theta}{dt}$, le fil exécutera des oscillations isochrones de durée

$$(49)\qquad \tau=\pi\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{\text{T}-\Sigma mr^2\times\varepsilon}},$$

Σmr^2 désignant toujours le moment d'inertie du système (fil et poids), T la constante de la torsion ; et les amplitudes consécutives aux époques $0, \tau, 2\tau, \ldots\ldots n\tau$, abstraction faite du signe, seront θ_0, $\theta_0 e^{-\varepsilon\tau}, \theta_0 e^{-2\varepsilon\tau}, \ldots\ldots \theta_0 e^{-n\varepsilon\tau}$; en d'autres termes, elles formeront une progression géométrique décroissante, la différence des logarithmes naturels de deux amplitudes consécutives étant

$$(50)\qquad \Lambda=\varepsilon\tau.$$

Le décrément logarithmique permettra ainsi d'évaluer la résistance qui s'oppose au mouvement. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

La loi du décroissement en progression géométrique ne convient en réalité qu'à des amplitudes extrêmement petites. Dès que l'écart devient un peu grand, le retard dans l'effet élastique intervient, il se

anifeste une perturbation que MM. Cornu et Baille [1] ont étudiée nalytiquement par l'évaluation de l'influence des termes proportionnels au carré des écarts et expérimentalement par l'observation leur appareil pour la mesure de la densité moyenne de la terre. Ils nt reconnu que « le mouvement troublé peut être considéré comme superposition de deux mouvements : le premier est l'oscillation, xaminée plus haut, à amplitudes décroissantes autour d'une position d'équilibre $\omega = 0$; le second est le déplacement périodique de cette position d'équilibre considérée comme mobile par le fait de a perturbation ». L'étude de ce mouvement conduit aux conclusions suivantes :

1° La position moyenne ω_1, déduite de l'observation des élongations [2], ne coïncide pas avec la position moyenne ω_2, déduite des observations de temps dans le voisinage du milieu de l'oscillation [3], comme cela a lieu lorsque la perturbation est négligeable.

2° Ni l'une ni l'autre de ces positions moyennes ne représente la position d'équilibre, c'est-à-dire celle que prendrait le corps au repos sous l'action des forces qui le sollicitent ; la position réelle d'équilibre ω_0 est la position symétrique de ω_2 par rapport à ω_1.

C. — FLEXION.

161. Étude expérimentale de la flexion. — La barre à expérimenter étant saisie dans un étau à l'une de ses extrémités et sollicitée à l'autre par une force perpendiculaire à sa longueur, on vise au cathétomètre un repère tracé sur l'extrémité libre ; on a soin, à chaque visée, de s'assurer, au moyen même du cathétomètre, que l'extrémité saisie dans l'étau est restée immobile. On peut aussi, comme l'a fait G. Wiedemann, souder à l'extrémité libre de la barre un petit miroir perpendiculaire à sa longueur et mesurer les déplacements par la méthode

(1) Cornu et Baille, C. R., LXXXVI; 1878.

(2) C'est le point de l'oscillation qui partage la distance de deux élongations successives dans le rapport de 1 à z, z étant la raison de la progression géométrique décroissante des amplitudes, laquelle n'est pas sensiblement altérée par la perturbation actuelle.

(3) C'est le point de l'oscillation auquel trois passages successifs ont lieu à des intervalles égaux.

de Poggendorff. Kupffer, dans ses longues « recherches expéri mentales sur l'élasticité des métaux, faites à l'Observatoire physi que central de Russie en 1860 », a employé un procédé analogue mais moins commode : en face d'un miroir fixé normalement l'extrémité de la règle AB, il installait un théodolite qu'il élevai

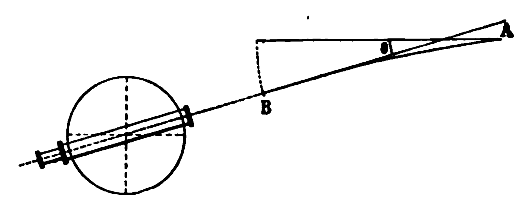


Fig. 219

ou abaissait, en même temps qu'il en faisait tourner la lunette, jusqu'à ce qu'il vît l'image du réticule de la lunette dans le miroir coïncider avec le réticule (éclairé par une ouverture latérale) : l'axe optique de la lunette était alors normal au miroir, et l'angle de la lunette avec l'horizon donnait l'*angle de flexion* θ. Cet angle étant lié à la flèche par la relation $f=\frac{2}{3}l\,\text{tg}\,\theta$ (¹), sa mesure équivaut à celle de la flèche. En opérant sur une barre prismatique on constate ainsi toutes les lois contenues dans la formule

$$f=\frac{1}{E}\frac{4l^3P}{be^3}. \tag{43}$$

S'il s'agissait d'une barre cylindrique, la formule serait la même; on remplacerait seulement be^3 par $3\pi r^4$, r étant le

(¹) Si, en effet, on intègre l'équation

$$\frac{E}{12}be^3d\theta=Pxdx, \tag{41}$$

on a

$$\theta=\frac{6l^2P}{Ebe^3}$$

d'où, en comparant avec l'équation (43) et en confondant l'arc θ avec sa tangente,

$$f=\frac{2}{3}l\,\text{tg}\,\theta.$$

on de la barre ; avec un tube de rayon intérieur r', on aurait $(r^4 - r'^4)$.

Dans tous les cas, quelle que soit la forme de la section, la flèche est proportionnelle au poids fléchissant : la force qui tend à ramener la verge dans sa position d'équilibre est donc toujours proportionnelle à l'écart, et par suite les oscillations que la verge décrira, pour revenir à cette position d'équilibre, seront isochrones, quelle que soit leur amplitude (dans les limites d'élasticité). L'expérience vérifie entièrement cette conclusion : le son produit par les vibrations transversales d'une verge est d'une hauteur absolument fixe, quelle que soit l'amplitude des vibrations (dans les limites convenables). Ce phénomène d'acoustique constitue une démonstration rigoureuse de la première loi. Il est à remarquer que le fait, et par conséquent la loi subsiste, de quelque manière que soit maintenue la barre, soit qu'on la fixe invariablement, soit qu'on l'appuie simplement à l'une seule de ses extrémités ou aux deux extrémités ou par des points intermédiaires.

Si l'on écrit d'une manière générale

$$f = \frac{1}{E} \cdot \frac{kl^3 P}{m^4},$$

m^4 étant le terme relatif aux dimensions transversales (be^3, $3\pi r^4$ ou $3\pi(r^4 - r'^4)$, suivant le cas), on a :

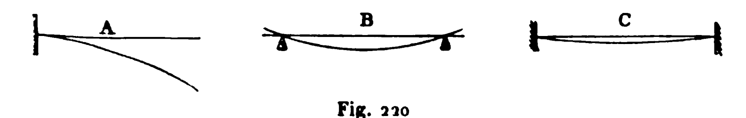


Fig. 220

A) avec un bout fixe et un bout libre . . . . $k = 4$

B) avec les deux bouts appuyés . . . . $\frac{1}{4}$

C) avec les deux bouts fixes . . . . $\frac{1}{16}$

Ainsi, sous une même charge, les flèches de flexion d'une même barre sont dans ces trois cas comme $1 : \frac{1}{16} : \frac{1}{64}$; les résistances à

une même flexion sont en raison inverse des mêmes nombr
Revenons au cas d'une barre prismatique horizontale fix par l'une de ses extrémités et sollicitée à l'autre par une for extérieure verticale P. Outre la courbure que nous avons consid rée, se produisant dans le plan vertical, la flexion amène enco une courbure des dimensions transversales. Une section droi PQP'Q' reste normale pendant la flexion, comme l'a vérifi Kupffer, mais la section de la barre fléchie présente la forme ci contre $P_1Q_1P'_1Q'_1$, la face supérieure $P_1P'_1$ s'étant creusée, et la fac

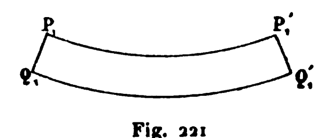


Fig. 221

inférieure $Q_1Q'_1$ s'étant, au contraire, bombée. Il résulte, en effet, de l'allongement des filets situés au-dessus du plan des filets moyens que la section transversale de tous ces filets supérieurs a dû diminuer, tandis que les filets inférieurs se sont renflés en même temps que raccourcis : les faces latérales ont donc dû s'écarter par le bas et se rapprocher par le haut, la face supérieure devenant concave, et la face inférieure convexe. Cette déformation, très visible sur le caoutchouc, est insensible dans les conditions ordinaires pour les corps ayant un coefficient d'élasticité élevé, tels que les métaux ou le verre ; M. Cornu a pu cependant rendre ces déformations parfaitement visibles et les mesurer avec précision sur le verre pour les plus faibles charges, de manière à en déduire σ (1).

162. Expériences de M. Cornu. — La méthode suivie par M. Cornu repose sur le même principe que M. Fizeau avait appliqué à la mesure des dilatations. Un prisme rectangulaire étant posé horizontalement sur deux appuis et fléchi par l'addition de poids à ses extrémités, on produit des anneaux colorés entre la face supérieure de la lame et une deuxième lame plane, transparente, maintenue à très petite distance. On a ainsi une véritable

(1) Cornu, *loc. cit.*

rte topographique de la surface déprimée. Or, l'examen optique e cette carte montre un système d'hyperboles conjuguées ayant iêmes asymptotes. D'après les formules de M. de Saint-Venant, tangente trigonométrique de l'angle que fait chaque asymptote vec la direction de l'axe du prisme est égale à l'inverse de la raine carrée du rapport cherché σ. Des mesures micrométriques, rises sur des clichés photographiques, ont permis d'évaluer exactement cette tangente et par suite σ. Le tableau suivant résume es expériences faites sur des lames un peu longues de glace de Saint-Gobain, bien pures, et qui ont paru à M. Cornu réaliser beaucoup mieux les conditions d'isotropie que des métaux, lesquels, s'ils ont été laminés, sont toujours fibreux, et, s'ils ont été fondus, sont cristallins.

Lame.	Épaisseur.	Rapport des dimensions transverses.	σ
N° 2	1,380	18,4	0,225
3	2,037	12,3	0,226
4	1,370	7,3	0,224
5	2,040	6,4	0,257
7	1,554	8,7	0,236
1	8,500	3,8	{ 0,243 0,250 (*)

(*) Ce dernier nombre a été obtenu par une autre méthode optique.

Toutes ces valeurs de σ sont à peu près égales à 0,25 ou $\frac{1}{4}$: $\sigma=\frac{1}{4}$, telle serait donc la caractéristique des corps isotropes.

163. Retard; effets permanents. — Relativement au retard dans l'effet élastique, relativement à la limite d'élasticité et à l'influence du temps sur la déformation permanente, la flexion présente des phénomènes analogues à ceux que nous avons signalés pour la tension et pour la torsion.

D'après M. G. Wiedemann, qui s'est spécialement attaché à l'étude de la torsion et de la flexion des solides considérées soit en elles-mêmes, soit dans leurs rapports avec les phénomènes magnétiques, il n'y aurait pas, à proprement parler, de limite d'élasticité. Ne voyons-nous pas, en effet, les barres ou les tubes de métal ou de verre, appuyés à leurs deux extrémités, arriver toujours à contracter

sous leur propre poids une courbure durable? Les ressorts l meilleurs se fatiguent, c'est-à-dire se déforment, à la longue.

La trempe et le recuit exercent d'ailleurs une influence cons dérable sur la résistance à une déformation permanente. Ains Coulomb prit trois lames d'acier, la première trempée très raid la deuxième complètement recuite, et la troisième amenée au degr de trempe des bons ressorts; il les fixa horizontalement par une d leurs extrémités, et il attacha des poids à l'autre. Tant que la charg n'atteignit pas 7 livres, les barres s'infléchirent de même (1), e une fois déchargées, elles se redressèrent complètement. Sous cett charge de 7 livres, la première se rompit, la deuxième se courb d'une manière permanente; quant à la troisième, elle put supporter jusqu'à 18 livres sans cesser de revenir à sa position initiale quand on la déchargeait.

164. Applications. — C'est l'élasticité de flexion qui intervient dans la plupart des ressorts (dynamomètres, pesons, serrures, voitures, etc.); c'est elle qui donne leur élasticité aux cous-

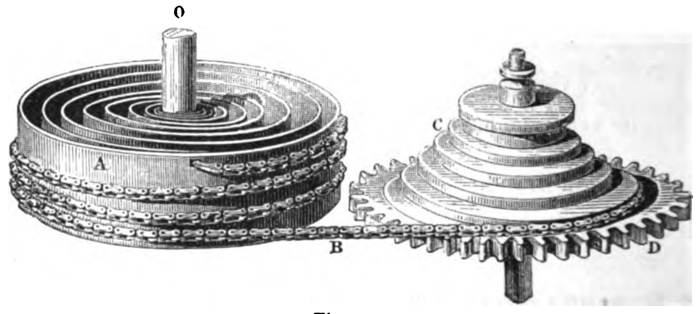


Fig. 222

sins rembourrés de crins comme aux sommiers élastiques ou qui est mise en jeu dans les baromètres et manomètres métalliques. C'est elle enfin qui commande le mouvement des montres et pendules : un ressort d'acier contourné en spirale est fixé d'un bout à un axe fixe O, de l'autre à un tambour A ou barillet pouvant tourner

(1) Par des expériences plus étendues, M. Kymball a montré depuis que le coefficient d'élasticité varie en raison inverse de la dureté de l'acier. Plus la trempe est dure, plus grande est la flexion produite par un poids donné. (*American Journal of science*; 1876.)

our de cet axe : quand on a *monté* l'horloge, c'est-à-dire serré plis du ressort, celui-ci, en se débandant, fait tourner le tambour quel il est attaché et, à l'aide de la chaîne B et de la fusée C, prime le mouvement à tout le mécanisme.

Nous trouvons encore un ressort *spiral* adapté au balancier des

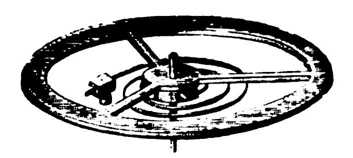


Fig. 223

montres et réglant par ses oscillations isochrones le mouvement e tout le système. En établissant la formule exacte des oscillations, M. Phillips (¹) a créé une méthode précise pour mesurer le coefficient d'élasticité d'un métal : il suffit de construire avec un fil du métal le spiral du balancier d'un chronomètre dont la marche fait connaître exactement la durée de l'oscillation. Ce procédé a l'avantage de n'exiger qu'une quantité extrêmement faible de matière et par conséquent de permettre d'opérer sur les substances rares aussi facilement que sur les métaux communs et, dans tous les cas, sur des échantillons très purs.

D. — FROTTEMENT INTÉRIEUR.

165. Manifestation du frottement intérieur dans les phénomènes d'élasticité. — L'étude expérimentale de l'élasticité a mis en lumière plusieurs phénomènes qui attestent dans les solides une résistance intérieure aux déplacements moléculaires.

Parmi ces phénomènes l'un des plus nets, l'un de ceux qui se prêtent le mieux à des mesures précises est le mouvement oscillatoire se produisant sous l'influence de la torsion. Le décroissement de l'amplitude des petites oscillations d'un fil tordu indique, comme nous le savons (160), une résistance proportionnelle à la

(¹) Phillips, *loc. cit.*, 296.

vitesse; et si l'on représente cette résistance par $2\varepsilon v$, ε est égal au décrément logarithmique Λ divisé par la durée d'une oscillation :

$$\varepsilon = \frac{\Lambda}{\tau}. \tag{50}$$

La résistance ainsi déterminée est la somme de deux quantités 1° la résistance de l'air, que nous apprendrons plus tard à mesurer 2° la résistance due au frottement intérieur.

Il est aisé de comprendre comment, en retranchant de l'effet total la part, très faible, afférente à l'air, on peut évaluer le frottement intérieur. MM. Warburg[1], Streintz[2], Schmidt[3], ont procédé de cette manière.

Le frottement intérieur diminue avec le temps et il prend à la longue une très petite valeur qu'il conserve si, laissant les choses en état (ne touchant pas au poids tenseur, ne produisant aucune déformation accidentelle, vibration ou échauffement du fil), on se borne à des oscillations assez petites pour n'amener aucun retard dans l'effet élastique.

Au delà d'une certaine limite, les amplitudes ne forment plus une série géométrique : la résistance n'est plus proportionnelle à la vitesse; le problème devient très compliqué.

Même dans le cas simple où la résistance est proportionnelle à la vitesse, on n'a pas encore réussi à démêler nettement l'influence des dimensions et de la nature du fil sur le frottement intérieur.

(1) Warburg, *Monatsber. d. Berliner Akad. für* 1869.
(2) Streintz, *Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien*; 1874 et 1879.
(3) Schmidt, *Wied. Ann.*, II; 1877.

CHAPITRE III

DÉFORMABILITÉ. SOLIDITÉ.

I. — DÉFORMABILITÉ.

166. Divers modes de déformabilité. — Tout corps solide peut éprouver sans se briser des déformations permanentes, plus ou moins étendues. Entre la limite d'élasticité et la rupture s'intercale ainsi pour chaque solide une série d'états d'équilibre intéressants, mais encore peu étudiés. La déformabilité se manifeste d'ailleurs sous divers aspects : propriété de s'aplatir sous le marteau, propriété de s'étendre au laminoir (*malléabilité*), propriété de s'allonger à la filière (*ductilité*), pour ne citer que les plus importantes. Nous y joindrons la propriété de se laisser rayer ou user : c'est par la résistance à ce genre de déformation superficielle que se définit la *dureté*.

167. Malléabilité; ductilité. — Bien que le marteau, le laminoir et la filière agissent essentiellement de la même manière, comprimant le solide dans certains sens, pour l'étendre dans d'autres, ce phénomène général se complique de circonstances particulières (choc avec le marteau, traction avec le laminoir [1] et plus encore avec la filière), de telle sorte qu'un même corps ne se prête pas également à ces trois modes d'action. D'après Prechtl, les métaux les plus importants se rangeraient dans l'ordre suivant relativement à la facilité avec laquelle ils s'allongeraient dans les trois cas :

[1] C'est encore avec le laminoir que le mode d'action est le plus simple et le plus régulier.

Sous le marteau.	Au laminoir.	A la filière.
Plomb.	Or.	Platine.
Étain.	Argent.	Argent.
Or.	Cuivre.	Fer.
Zinc.	Étain.	Cuivre.
Argent.	Plomb.	Or.
Cuivre.	Zinc.	Zinc.
Platine.	Platine.	Étain.
Fer.	Fer.	Plomb.

Les deux premières listes ne diffèrent pas notablement. Cependant le marteau permet d'amincir les métaux mous plus qu'on ne le peut au laminoir. C'est par martelage que se fabriquent ces feuilles d'or si minces qu'il en faut superposer plus de 10 000 pour atteindre la hauteur d'un millimètre. Les différences considérables que présente la troisième liste relativement aux deux premières proviennent de ce que, pour supporter le passage aux plus petits trous de la filière, un métal doit être non seulement très malléable [1], mais encore assez tenace pour ne pas se rompre sous la traction qu'on lui applique. Les fils très fins s'obtiennent par le procédé de Wollaston : un gros cylindre d'argent fourré suivant son axe d'un fil fin de platine étant passé à la filière, les deux métaux s'étirent ensemble et, après un certain nombre de passes, en enlevant l'argent au moyen de l'acide azotique, on a un fil de platine d'une extrême ténuité.

Diverses circonstances influent sur la malléabilité :

1° La structure : une structure amorphe ou fibreuse est favorable.

2° La présence, même en faible quantité, de certains éléments chimiques. L'or est particulièrement sensible à ce genre d'action : $\frac{1}{1000}$ d'arsenic l'empêche de se bien laminer.

3° La température : la chaleur rend en général les corps plus mous et plus malléables. Cet effet est bien connu pour les substances organiques, telles que la résine, la poix, la cire, etc. Il apparaît encore très nettement dans la plupart des métaux, et particulièrement dans le fer et le platine (152). Le zinc ne se laisse laminer que vers 150° : peu malléable à la température ordinaire, il est tellement cassant au-dessus de 200° qu'on peut alors le pulvériser dans un mortier.

(1) Si malléable que soit le métal, un fil sortant de la filière a toujours un diamètre un peu supérieur à celui du trou par lequel il vient de passer, une partie seulement de la déformation persistant quand l'action cesse.

168. Écoulement des solides. — M. Tresca a fait sur la déformation permanente par compression des expériences importantes qui montrent comment une pression exercée suivant une direction déterminée se transmet latéralement dans le solide et repousse la matière jusqu'aux parois.

Le bloc qu'il s'agit de comprimer est constitué par une série de lames parallèles superposées : la déformation individuelle de chaque lame permet de constater le déplacement des différentes particules de la masse.

La figure 224 représente une coupe de la galette obtenue par la

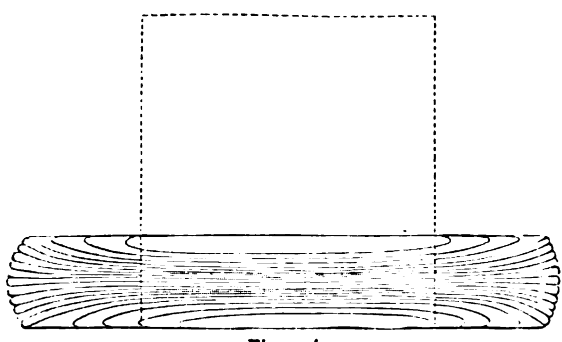


Fig. 224

compression d'un bloc cylindrique (indiqué par les traits ponctués) composé de vingt lames de plomb. On voit qu'il s'est produit

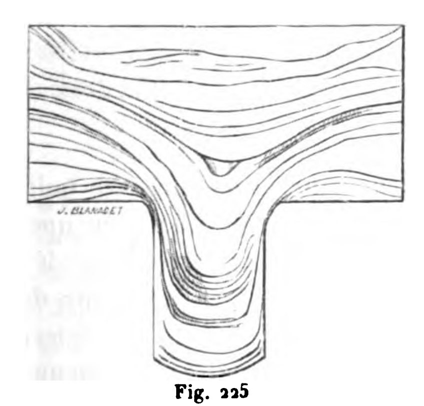


Fig. 225

surtout au centre du bloc un *écoulement* vers la circonférence : les lignes de joint, qui étaient d'abord parallèles, forment après la

compression une sorte de gerbe, très resserrée au milieu et épanouie sur les bords.

La figure 225 montre une coupe du solide résultant de l'écoulement de deux rondelles de fer pressées à chaud par un marteau pilon sur une matrice en acier percée d'un trou circulaire; la figure 226

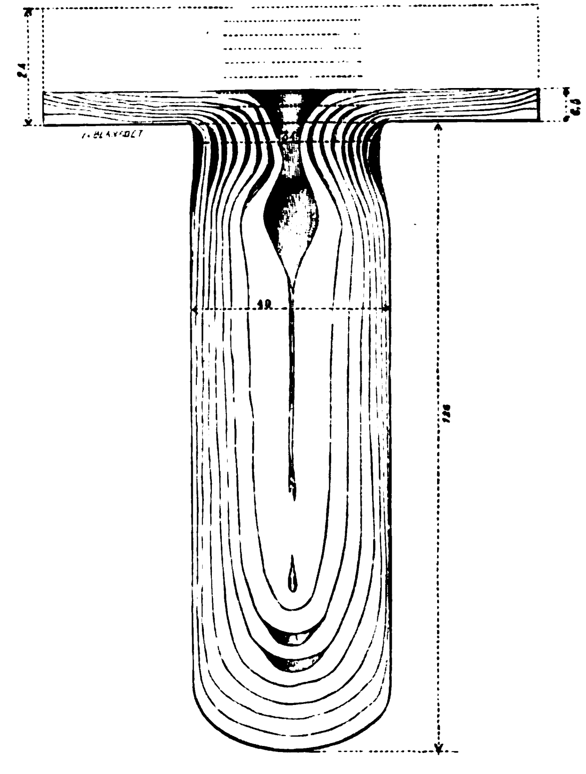


Fig. 226

représente une coupe du jet obtenu avec huit plaques de plomb comprimées par une presse hydraulique sur une matrice semblable.

En passant au laminoir une mince lame de plomb sur laquelle il avait préalablement fait graver une suite de rectangles égaux. M. Tresca a reconnu que chaque passe déterminait un allongement commun à tous les rectangles et qu'aucun d'eux n'augmentait de largeur. Toutes les files de molécules parallèles à l'axe de la lame se sont donc étirées simultanément. Quant à l'absence d'allongement appréciable dans le sens perpendiculaire, il faut l'attri-

buer aux résistances de frottement développées le long de la génératrice de contact de la lame avec les cylindres du laminoir. La même expérience ayant été répétée sur un bloc formé de plusieurs lames minces superposées, les rectangles des bords se sont seuls élargis d'une petite quantité, la matière des lames intermédiaires, non retenue par le frottement, s'étant écoulée entre les deux surfaces supérieure et inférieure par une sorte de bavure. On a observé également que les couches extérieures, directement entraînées, s'étirent plus que les couches intérieures, la différence étant d'autant plus marquée que la passe est plus faible.

Dans l'étirage des tubes sur mandrin, dans le tréfilage à la Wollaston, nous retrouverions des exemples très nets d'étirage parallèle. Sans insister sur ces opérations, nous indiquerons encore une application curieuse de l'écoulement des corps solides à la fabrication des tubes d'étain destinés à renfermer les couleurs broyées à l'huile. Un flan de métal de la dimension d'une pièce de deux francs étant placé dans une matrice de même diamètre, on appuie bien concentriquement sur ce flan un poinçon dont le diamètre est un peu plus petit, d'une fraction de millimètre seulement. La matière comprimée ne peut absolument s'échapper que par l'étroit espace annulaire resté libre entre la matrice et le poinçon ; et, à mesure que celui-ci s'enfonce, l'étain se soulève en une véritable nappe cylindrique qui s'écoulerait jusqu'à épuisement complet. En s'arrêtant quand il reste une pellicule métallique au fond de la matrice, on obtient un vase qui peut avoir jusqu'à trente centimètres de profondeur et qui répond parfaitement à sa destination.

169. Écrouissage. — Toute opération mécanique (martelage, laminage ou étirage) par laquelle un corps est fortement comprimé constitue un mode d'*écrouissage*. Le corps écroui est en général devenu plus dense, plus dur, plus élastique, et aussi plus cassant. L'augmentation de densité, presque sans exception sous le marteau et au laminoir [1], est moins constante à la filière. C'est

[1] Cependant le capitaine Caron (C. R., LXX, 1263; 1870) a trouvé :

Fer pur fondu dans l'hydrogène	7,880
Le même forgé	7,868 ;

que dans l'étirage, outre la compression latérale tendant à augmenter la densité, il y a une traction longitudinale tendant à la diminuer.

Un *recuit* suffisant fait disparaître les effets de l'écrouissage : le corps redevient doux, malléable, et reprend sensiblement la densité qu'il avait à l'état fondu.

M. Baudrimont[1] a mesuré la densité de divers métaux, fondus, martelés, laminés, étirés : il a trouvé que le tréfilage en fil fin amène un accroissement de densité dépassant celui que produisent toutes les autres préparations.

Wertheim[2] a repris et étendu ces déterminations; le tableau suivant résume son travail :

	DENSITÉ DU MÉTAL		
	fondu.	étiré.	recuit.
Plomb	11,215	11,169	11,232
Étain	7,285	7,313	7,290
Cadmium	8,605	8,665	8,520
Argent	10,366	10,369	10,304
Or	19,407	19,514	19,035
Zinc du commerce	6,938	7,008	7,060
Palladium	»	11,359	11,225
Platine	»	21,275	21,207
Cuivre	8,729	8,933	8,936
Fer du Berry	»	7,748	7,757
Acier fondu	»	7,717	7,719
Acier anglais	»	7,718	7,628

170. Trempe. — La trempe est une sorte d'écrouissage obtenu par immersion dans un liquide, plus généralement par refroidissement brusque du corps, au préalable fortement chauffé.

Les couches extérieures, saisies par le froid et contractées, pressent énergiquement le noyau intérieur qui réagit et cherche à agrandir son enveloppe. Puis le noyau se refroidit à son tour, et, se contractant, tire sur l'enveloppe qui résiste. De là fina-

et M. Riche (*Ann. de chim. et de phys.* (4), XXX, 351; 1873) a reconnu que le travail mécanique (laminage ou frappe) diminue légèrement la densité de l'acier recuit.

[1] BAUDRIMONT, *Ann. de chim. et de phys.* (2), LX, 78; 1835.

[2] WERTHEIM, *Ann. de chim. et de phys.* (3), XII, 386; 1844.

ement, d'ordinaire, dans le noyau une tension considérable et une ensité au-dessous du chiffre normal; dans l'enveloppe au contraire ne forte compression et un excès de densité; dans la plus grande artie de la masse enfin, par suite des obstacles apportés au libre mouvement des molécules pendant le refroidissement, une structure voisine de l'isotropie parfaite (134).

Acier et métaux trempés. — Pour tremper l'acier, on le chauffe au rouge, et on le plonge dans l'eau ou dans quelque autre liquide ([1]).

Bien que, comme nous venons de l'indiquer, le phénomène soit complexe (et nous ne parlons pas ici des réactions chimiques), l'effet dominant est assez exactement comparable à l'action d'un marteau ou d'une frette sur le métal incandescent ([2]) : cette comparaison est justifiée par les récentes expériences de M. Clémandot ([3]) sur la trempe de l'acier par compression. L'acier, chauffé au rouge cerise, est comprimé brusquement à 1000, 1500, 2000 kilogrammes par centimètre carré, puis laissé sous pression jusqu'à complet refroidissement : il présente alors la finesse de grain et la dureté caractéristiques de l'acier trempé. On n'a même pas besoin de le soumettre au *recuit* nécessaire avec la trempe ordinaire pour enlever l'aigreur que celle-ci communique toujours.

Ce recuit, diminuant en même temps la dureté, sera proportionné aux usages auxquels l'acier doit servir. Pour apprécier la température du recuit, on utilise la propriété que possède le métal, préalablement poli, de revêtir par oxydation superficielle les couleurs des lames minces. L'acier réchauffé passe successivement au jaune paille (220°), au jaune doré (240°), puis au pourpre (260°), au violet (270°), au bleu clair (290°), au bleu foncé (320°), et enfin au bleu noir (330°). D'après cette échelle, d'après aussi la nature du métal dont la dureté se perd d'autant moins par la chaleur qu'il est de meilleure qualité, on s'arrête à telle ou telle teinte. Ordinairement les instruments destinés à travailler les métaux se recuisent

([1]) Le mercure produit un refroidissement très rapide. On produit des trempes moins fortes en plongeant l'acier dans la résine ou dans des corps gras fondus. Le capitaine Caron a obtenu de très bons résultats par immersion dans de l'eau à 55° ou à 100°.

([2]) Caron, C. R., LVI, 211; 1863.

([3]) Clémandot, C. R., CXIV, 703; 1882.

au jaune paille ou au jaune d'or; les objets de coutellerie pourpre, les ressorts de montre au violet ou au bleu; enfin on jusqu'au bleu noir pour les outils qui doivent être plutôt tena que durs, comme les scies fines ou les forets.

Les pièces d'acier soumises à la trempe se déforment, leurs verses dimensions variant inégalement; mais dans tous les cas densité diminue. Ce fait, annoncé par Réaumur, confirmé par Ri mann, contesté par Karsten, a été mis hors de doute par Caron ([1] dans une de ses expériences, après trente trempes successives la de sité de 7,817 devint 7,743. Fromme ([2]) a trouvé que l'accroisseme de volume d'un morceau d'acier par une trempe complète ét de 0,010 à 0,013; le recuit au jaune réduisit cette augmentation moitié; au bleu elle n'était plus que 0,003; au noir le volum reprenait sa valeur primitive.

La trempe diminue aussi la densité du cuivre ([3]) et celle d verre ([4]); mais elle augmente celle du laiton ([5]) et surtout celle de bronzes riches en étain, tels que le métal des tam-tams, préalable ment recuits ([6]). Il est à noter qu'entre le bronze et l'acier l'opposi tion est complète : d'Arcet ([7]), au commencement du siècle, a montr que la trempe adoucit le bronze riche en étain, à ce point qu'o peut alors l'aplatir au balancier, tandis que le même métal, ré chauffé et refroidi lentement, supporte difficilement la frappe sans se briser ([8]). Le recuit est au contraire préférable à la trempe dans le travail du cuivre jaune.

Verre trempé. — On a remarqué depuis longtemps les effets curieux de la trempe sur le verre.

([1]) Caron, C. R., LVI, 211; 1863.
([2]) Fromme, *Göttingen's Nachr.*, 165; 1876.
([3]) Riche, *loc. cit.*, 390.
([4]) Wertheim et Chevandier, *loc. cit.*, 137, et Riche, *loc. cit.*, 415.
([5]) Riche, *loc. cit.*, 407. L'effet est faible, le laiton qui s'écrouit fortement par le tréfilage se modifiant peu par la trempe.
([6]) Riche, *loc. cit.*, 363.
([7]) D'Arcet, *Bulletin de la Société d'encouragement*, 289; 1814.
([8]) Toutefois l'adoucissement découvert par d'Arcet n'est pas suffisant pour qu'on puisse travailler industriellement à froid les bronzes riches en étain. M. Riche a montré que, semblables au zinc, ces alliages, d'une extrême dureté à froid, pulvérisables au rouge cerise, se forgent, se laminent, vers le rouge sombre, avec une remarquable facilité. Il a pu ainsi introduire en France la fabrication des tam-tams par la méthode même des Orientaux.

Si on laisse tomber dans de l'eau froide des gouttes de verre fondu, on obtient des espèces de larmes solides que l'on appelle en France *larmes bataviques* ou *larmes de Hollande*, du pays d'où elles nous vinrent vers le milieu du dix-septième siècle [1], et que l'on nomme *gouttes de Rupert* en Angleterre où le prince Rupert les apporta vers la même époque [2].

Résistant très bien au choc du marteau sur leur panse, ces gouttes se réduisent en poussière si on en rompt la queue; et cette pulvérisation, accompagnée d'un dégagement de chaleur et de lumière, est assez violente et instantanée pour briser un épais vase de verre plein d'eau, à l'intérieur duquel on l'a provoquée.

Une larme batavique est donc dans un état d'équilibre instable, caractérisé par une tension considérable de certaines parties de la masse.

On admettait autrefois [3] que le noyau intérieur, encore rouge et fortement dilaté alors que la couche extérieure était déjà refroidie, avait dû conserver un volume supérieur à celui qu'il aurait pris si toute la larme s'était refroidie lentement; d'où à l'intérieur un état de dilatation forcée ne se maintenant que par la résistance de la couche superficielle et déterminant l'explosion si, par la rupture en un point, cette résistance venait à être détruite. Mais M. de Luynes [4], avec l'acide fluorhydrique, dont l'action se modère et se localise à volonté, a pu dissoudre progressivement toute la queue à partir de l'extrémité effilée sans produire l'explosion; toutefois, lorsqu'il arrivait au *col* de la larme, la masse se séparait en une infinité de fragments. Inversement, en plongeant une larme dans l'acide fluorhydrique par la partie renflée jusqu'au voisinage du col, il a vu l'acide ronger peu à peu les différentes couches de verre, et au bout d'un certain temps dissoudre entièrement la larme sans donner lieu à aucune explosion. De là il conclut que la masse intérieure forme un système stable par lui-même et que les propriétés des larmes bataviques sont dues principalement à un état d'extension des couches extérieures. A l'appui de cette opinion,

(1) MONCONIZ, *Journal des voyages*. Lyon, 1665-66.
(2) *Collection académique*, t. VI, p. 261; éphémérides d'Allemagne.
(3) Voir en particulier DUFOUR, C. R., LXVIII, 398; 1869.
(4) DE LUYNES, *Ann. de ch. et de phys.* (3), XXX, 229; 1873.

M. de Luynes rappelle que le verre brusquement refroidi re dilaté : une lame de verre à faces parallèles se courbe et devi convexe du côté de la surface trempée. Les couches extérieu d'une larme sont donc en quelque sorte gonflées et tendues com le seraient une série de poires de caoutchouc dilatées de mani à s'emboîter les unes sur les autres et réunies toutes par le cols assujettis à l'aide d'une seule ligature [1]. Il est clair qu supprimant la partie commune à tous les cols, on détruirait l'éq libre du système, tandis qu'on pourra enlever successivem chaque enveloppe sans compromettre l'équilibre général, ma tenu par les poires intérieures ; mais on fera éclater la lar en la coupant par le gros bout de façon à rendre encore lib toutes ensemble les couches de verre inégalement trempées de l'e veloppe.

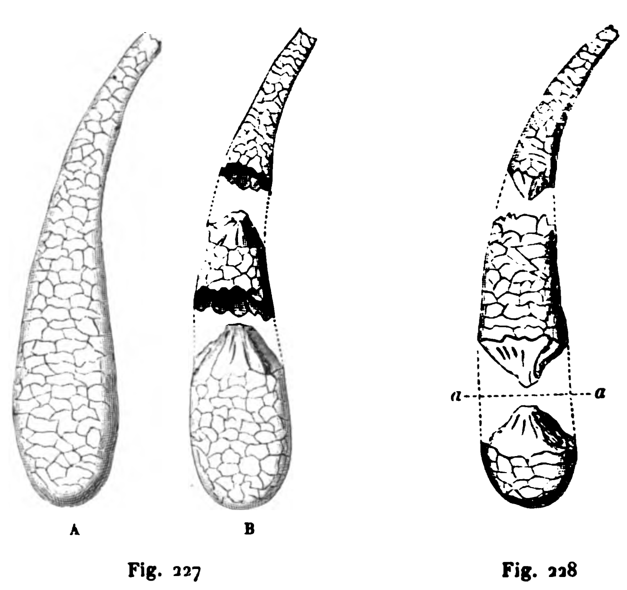


Fig. 227 Fig. 228

[1] Pour comprendre ce fait, il suffit, nous semble-t-il, de remarquer que, pa suite de la mauvaise conductibilité du verre, la première phase du phénomène de la trempe, tel que nous l'avons décrit plus haut, doit avoir ici un effet très prédominant, toute la partie extérieure et moyenne de la larme étant déjà refroidie et définitivement dilatée quand le centre se solidifie. On peut effectivement faire des larmes bataviques en d'autres corps mauvais conducteurs, en colophane par exemple, ainsi que l'a montré M. Marangoni (*Nuovo Cimento*, V, 116 ; 1879).

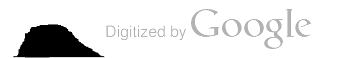
ıi les couches extérieures déterminent la rupture par leur force ressort lorsqu'on les rend libres de se détendre, les molécules chaque couche doivent se déplacer en sens inverse suivant qu'on ıque la goutte du côté de la queue ou du gros bout. Une section ne prendra donc l'apparence d'une surface conique, le sommet cône étant dirigé du côté où s'est faite la coupure. En noyant la me dans du plâtre gâché, M. de Luynes a réussi à maintenir les gments en place après la rupture, puis, séparant avec précaution s tronçons, il a vérifié ces conséquences, comme le montrent les ;ures 227 et 228. La figure 227 représente en A une larme après ıpture par destruction du col et en B la disposition des fragments ıns cette larme ; la figure 228 indique le mode de cassure d'une ırme sciée par le gros bout en *a*. On voit que dans chaque cas les ouches extérieures se sont retirées à partir de la section, ainsi que 'auraient fait les parois d'une série de poires de caoutchouc superosées et gonflées, suivant la comparaison de M. de Luynes.

A une fragilité *sui generis* les larmes bataviques unissent une grande solidité puisque, comme nous l'avons vu, on peut frapper sur la partie renflée à coups de marteau sans la briser. M. de la Bastie a réussi à développer cette propriété par une trempe spéciale dans des matières grasses très chaudes ([1]), et à fabriquer ainsi des objets en verre, sinon incassables, du moins remarquablement résistants et élastiques. Quand ils se brisent, ils se réduisent en une infinité de fragments à la façon les larmes bataviques. On amène infailliblement la rupture en détruisant les couches extérieures; on ne peut donc ni scier le verre trempé, ni le percer, ni le couper au diamant, sauf en certains points particuliers que décèle l'examen dans la lumière polarisée (de Luynes et Feil) ([2]); il faut donc avant la trempe tailler les vitres à la grandeur voulue.

Soufre trempé. — La trempe produit sur le soufre un effet extrê-

([1]) Cette trempe est une opération délicate, les conditions variant avec la composition du verre et avec les dimensions des pièces. Le cristal, qui fond à basse température, se trempe dans un bain de graisse pure chauffée entre 60° et 120°; on plonge le verre ordinaire dans un mélange d'huile et de graisse porté à une température variant de 150° à 300°; pour les verres peu fusibles, on opère à une température encore plus élevée.

([2]) On peut percer un disque en son centre, couper une plaque carrée suivant une parallèle à un côté par le centre, mais si on essaie de la scier selon une diagonale, elle éclate quand on atteint une certaine profondeur.



mement remarquable : elle donne le *soufre mou*, dont les curieus propriétés sont trop connues pour qu'il soit nécessaire de les rapp ler ici.

171. Dureté. — Le diamant raie tous les autres corps et n'est rayé par aucun d'eux : c'est le corps le plus dur. Mohs ([1]) dressé la table suivante, très employée par les minéralogistes, dans laquelle il a placé 10 minéraux usuels, du plus tendre a plus dur, dans un ordre tel que chacun est rayé par tous ceux qu le suivent et raie au contraire tous ceux qui le précèdent.

1. Talc.	Rayés par l'ongle.	6. Orthose.	
2. Gypse.		7. Quartz.	Rayant le verre.
3. Spath calcaire.		8. Topaze.	
4. Spath fluor.		9. Corindon.	
5. Apatite.		10. Diamant.	

Le polissage consistant simplement dans le tracé de séries de fines rayures parallèles, l'ordre d'usure semblerait devoir être le même que celui de rayure. Mais il est loin d'en être ainsi, parce que certaines substances, formées de parcelles très dures séparées par des intervalles pleins d'air (pierre ponce) ou de matière molle (pierre de grès), se laissent facilement rayer, se brisant aux points attaqués, tandis que la dureté de leur trame agit efficacement sur une surface à user.

M. Hugueny ([2]), qui a mesuré le poids nécessaire pour enfoncer de $\frac{1}{10}$ de millimètre une pointe d'acier dans les divers métaux, les classe comme il suit par ordre de dureté croissante :

Plomb, étain, aluminium, or, argent, zinc, cuivre, platine, fer, acier.

Une petite quantité d'un autre corps modifie beaucoup la dureté d'un métal : ainsi les alliages monétaires à $\frac{1}{10}$ de cuivre sont notablement plus résistants que l'or et l'argent purs.

([1]) Mohs, *Grundriss der mineralogie*, I, 374; 1822.
([2]) Hugueny, *Recherches expérimentales sur la dureté des corps et spécialement des métaux*. Strasbourg, 1865.

Dans les cristaux, la dureté est différente aux diverses faces [1]; le peut même, suivant une ligne donnée, changer avec le sens, mme Huyghens l'a observé pour le spath d'Islande. Il n'y a rien qui ne soit parfaitement d'accord avec les idées généralement lmises sur le groupement des molécules dans ces corps (129).

La vitesse a, dans les phénomènes d'usure, une importance consi-érable. Perkins [2] a montré qu'une lime d'acier ne pouvait plus ttaquer un disque de laiton tournant très rapidement. S'il possède ne vitesse suffisante, un corps mou peut au contraire entamer n corps plus dur. Ainsi une chandelle de suif lancée par un fusil erce une planche de sapin. Colladon [3] avec un disque de fer oux faisant plusieurs centaines de tours à la minute coupait de 'acier trempé et même de l'agate et du quartz. On sait comment n grave, comment on scie les substances les plus dures avec du able projeté contre un disque de bronze en rotation rapide.

II. — SOLIDITÉ.

172. Diverses formes de solidité. — La *solidité* ou *résis-tance à la rupture* se manifeste sous différentes formes :

Résistance à la rupture par traction, ou *résistance absolue*, ou *ténacité*.

Résistance à la rupture par flexion, ou *résistance relative*.

Résistance à la rupture par torsion.

173. Résistance à la rupture par traction, ou ténacité. — Toutes choses égales d'ailleurs, l'effort nécessaire à la rupture par traction est proportionnel à la section [4]. Il varie beaucoup avec la substance.

Les tableaux suivants contiennent les résultats des principales mesures effectuées à ce sujet. Les coefficients de rupture sont exprimés en kilogrammes et rapportés au millimètre carré.

[1] Voir Frankenheim, *loc. cit.*

[2] Perkins, *Journal of Science*, XVI, 153; 1823.

[3] Colladon, *Biblioth. univ. de Genève*, XXV, 281; 1824.

[4] Au sortir de la filière, les fils fins sont proportionnellement plus tenaces que les gros, parce qu'ils sont plus écrouis.

1° *Métaux* (1).

	En fils de 0m,001 de diamètre.					
	coulés.		étirés.		recuits.	
	COEFFICIENT DE RUPTURE					
	lente.	subite.	lente.	subite.	lente.	subite.
Plomb.......	1,25	2,21	2,07	2,36	1,80	2,04
Étain........	3,40	4,16	2,45	2,97	1,70	3,60
Zinc.........	1,50	»	12,80	15,77	»	14,40
Or...........			27,00	27,50	10,08	11,05
Argent.......			29,00	29,60	16,02	16,40
Platine......			34,10	35,00	23,50	26,75
Cuivre.......			40,30	41,00	30,54	31,82
Fer.........			61,10	63,80	46,88	50,25
Acier fondu..			»	83,80	65,70	»
Acier anglais.			70,00	92,50	40,00	53,90

Lorsque les molécules ont atteint une distance telle que la résultante des forces moléculaires devient inférieure à la charge employée, un fil homogène ne devrait pas se rompre en un endroit. mais tomber tout entier en poussière. Les coefficients de rupture « reposent donc pour ainsi dire sur la non-homogénité des corps soumis à l'expérience » et ne sont par conséquent guère propres à nous indiquer la nature des forces moléculaires.

Les nombres précédents sont relatifs à la température ordinaire (15 à 20°). Wertheim a mesuré également la résistance à la rupture à 100 et 200°. Ces mesures ont été reprises avec beaucoup de soin par M. Baudrimont (2) qui a trouvé :

	0°	100°	200°
Or...............	18,400	15,224	12,878
Platine...........	22,625	19,284	17,277
Cuivre...........	25,100	21,873	18,215
Argent...........	28,324	23,266	18,577
Palladium........	36,481	32,484	27,077
Fer (fil fin).......	205,405	191,725	210,270

L'élévation de la température diminue la ténacité. Si le fer fait momentanément exception, il rentre ensuite dans la règle générale :

(1) Wertheim, *Ann. de chim. et de phys.* (3), XII, 385; 1844.
(2) Baudrimont, *Ann. de chim. et de phys.* (3), XXX, 304; 1850.

rouge sombre, il n'a plus que le $\frac{1}{6}$ de la ténacité qu'il possédait à
›id (Tremery).

Le travail mécanique augmente beaucoup la ténacité; le recuit diminue. La structure a également une influence considérable. ›ufflot [1] a obtenu pour les différentes sortes de fer :

Fer à cassure	grossièrement grenue	17,96
» »	moyennement grenue	23,68
» »	finement grenue	35,02
» »	demi-fibreuse	62,28
» »	franchement fibreuse	90,01

.a résistance de la fonte varie de 3 à 13. Pour le cuivre, le coeffi-ient oscille de 16 à 53; pour le platine, de 22 à 41 ; les autres mé-aux présentent des variations analogues (Frankenheim [2]).

2° *Alliages* [3].

Alliage des caractères d'imprimerie, Pb^2Sb	1,87
Soudure des plombiers, PbSn	2,46
Laiton tomback, $ZnCu^2$	32,50
Laiton pur, $ZnCu^2$	60,22
Argentan, $Zn^4Cu^{13}Ni^5$	61,88
Packfong, $Zn^2Cu^5Ni^3$	68,10

Ces nombres n'offrent aucune régularité; ils ne sont d'ailleurs pas constants pour un même alliage.

3° *Verre* [4].

Verre à vitres	1,763	Verre à gobeleterie	1,002
Verre à glaces	1,400	Cristal de Baccarat	0,665

L'ordre est le même que pour les coefficients d'élasticité.

(1) Soufflot, dans Rondelet, *Art de bâtir*, IV, 500. Paris; 1802.
(2) Frankenheim, *loc. cit.*, 487.
(3) Wertheim, *Ann. de chim. et de phys.* (3), XII, 581 ; 1844.
(4) Wertheim et Chevandier, *Ann. de chim. et de phys.* (3), XIX, 120 et 252 ; 1847.

4° *Bois*, contenant 20 o/o d'humidité (¹).

	RÉSISTANCE longitudinale.	radiale.	tangentielle.
Peuplier	1,97	0,146	0,214
Pin sylvestre	2,48	0,256	0,196
Hêtre	3,57	0,885	0,752
Érable	3,58	0,716	0,371
Sapin	4,18	0,220	0,297
Bouleau	4,30	0,823	1,063
Aulne	4,54	0,329	0,175
Chêne	5,66	0,582	0,406
Frêne	6,78	0,218	0,408
Acacia	7,93	»	1,231

Comme pour les coefficients d'élasticité des mêmes bois, la direction de l'effort a une grande influence.

5° *Fibres organiques* (²).

Crin de cheval	de 0mm,26 de diamètre	9,644
Cheveu humain	» 0 ,10 »	11,595
Laine	» 0 ,50 »	13,951
Fil d'araignée	» 0 ,0025 »	18,809
Fil de chanvre	» 0 ,26 »	25,949
Fil de cocon	» 0 ,0013 »	27,500

La réduction à l'unité de section dans le calcul du coefficient de rupture n'est exacte que pour les fibres sensiblement homogènes, telles que les fils d'araignée ou de cocon : la ténacité se rapproche alors de celle des métaux usuels.

La résistance d'une corde varie de 4 à 8.

6° *Tissus organisés* (³).

Muscles	0,04	Nerfs	1,35
Artères	0,14	Tendons	6,25
Veines	0,18	Os	8

(¹) Wertheim et Chevandier, C. R., XXIII, 663; 1846.

(²) Frankenheim, *loc. cit.*, 453.

(³) Wertheim, *Ann. de chim. et de phys.* (3), XXI, 385; 1847. Cf. Valentin, *Physiologie*, I, 34. Brunswick; 1844.

Indépendamment de l'incertitude de la réduction à l'unité, ces mbres sont des moyennes de résultats en réalité fort différents : ısi pour les os, la charge de rupture a varié, suivant les échantil-ıs, de 3^{kg},30 à 15^{kg},03 par 1 millimètre carré.

En opposition à la rupture par traction se place naturellement la pture par compression, l'*écrasement*, intimement lié aux phé-mènes d'écoulement cités plus haut. La résistance à l'écrase-ent a été surtout étudiée dans les matériaux de construction. Voici elques-uns des nombres déterminés par Navier pour les pierres [1], ır Rondelet pour les mortiers [2], par Hodgkinson pour les ntes [3] et les bois [4]; les coefficients de rupture sont, comme tou-urs, exprimés en kilogrammes et rapportés au millimètre carré.

Porphyre.........	24,80	Fonte.......	100 à 60
Granit............	17,30	Chêne............	7,10
Marbre dur........	10,40	Frêne............	6,60
Pierre à bâtir.	9,50 à 2,50	Sapin............	5,10
Bonne brique.....	1,50	Pin..............	4,80
Mortier ordinaire..	0,50	Peuplier..........	3,60

Ces coefficients sont tous supérieurs à ceux qui pour les mêmes substances mesurent la résistance absolue.

Vicat a distingué sous le nom de *résistance transverse* la résistance à la séparation par cisaillement ou par poinçonnement. Après l'écrasement, dont il se rapproche d'ailleurs, ce mode de rupture est celui qui exige le plus de force : ainsi, la résistance transverse de la pierre à bâtir est plus de 6 fois sa résistance à la traction.

174. Résistance à la rupture par flexion, ou résistance relative. — La résistance d'un solide à la flexion se mesure, ainsi que les précédentes, par la charge nécessaire pour le rompre de cette manière.

Soit une barre encastrée à l'une de ses extrémités et sollicitée à l'autre par une force normale à la barre. L'intensité F que doit atteindre cette force pour amener la rupture est en raison inverse

(1) Navier, *Mécanique appliquée*, I, 5. Paris; 1826.
(2) Rondelet, *loc. cit.*, 305.
(3) Hodgkinson, *Brit. Assoc. Report*; 1833 et 1837.
(4) Hodgkinson, *Phil. Trans.*, 385; 1840.

de la longueur L de la barre, proportionnelle à sa largeur b, proportionnelle au carré de l'épaisseur e, proportionnelle enfin à un coefficient spécial r qui mesure la résistance de la substance à la rupture par flexion :

$$F = \frac{1}{6}\frac{rbe^2}{L}\ (^1).$$

Le coefficient r diffère ordinairement peu de celui qui mesure la résistance à la rupture par traction, la flexion agissant principalement par l'étirement excessif des couches supérieures au voisinage de l'extrémité encastrée [2].

Voici, par exemple, d'après Barlow [3], la résistance à la flexion de quelques bois, les unités étant toujours le millimètre et le kilogramme :

Sapin	4,435	Chêne	7,050
Hêtre	6,562	Frêne	8,543

Stephenson a trouvé pour la fonte une moyenne de 32.

Si la force agit au milieu d'une barre posée à ses deux extrémités, pour rompre la barre elle devra, toutes choses égales d'ailleurs avoir une intensité 4 fois plus forte que dans le premier cas.

Il lui faudra une intensité 8 pour rompre au milieu et à ses deux extrémités la barre encastrée des deux bouts.

La résistance d'une barre à section rectangulaire, encastrée à l'une de ses extrémités et chargée à l'autre, est minima au bout fixe. Si l'on veut que la résistance de la barre soit la même en chaque section, il faudra que l'on ait $\frac{by^2}{x} = C^{te}$, y étant l'épaisseur à la distance x de l'extrémité libre. Le profil de la barre sera donc une parabole ayant son sommet au point d'application de la force. Si la barre est fixée en son milieu et sollicitée à ses deux extrémités par des efforts égaux, le profil sera une double parabole : o

(1) Pour une verge circulaire de rayon R, on a : $F = \frac{\pi}{4}\frac{rbR^2}{L}$.

(2) En même temps, il y a compression des parties inférieures, de sorte que si le coefficient de rupture par écrasement est très supérieur au coefficient de rupture par traction, la résistance à la flexion, se plaçant entre les deux, pourra différer sensiblement de la ténacité.

(3) Barlow, dans Morin, *Leçons de mécanique pratique*, I, 233. Paris ; 1845.

nne souvent cette forme au balancier des machines à vapeur. A poids égal, la résistance à la flexion est d'autant plus grande e la matière est distribuée plus loin de l'axe de la pièce considérée : la solidité d'un tube est supérieure à celle d'un cylindre ein, de même section effective. Cette loi, découverte par Galilée, dont la nature nous montre des applications dans les os longs des nimaux, les plumes des oiseaux, les tiges creuses de certains égétaux, permet d'allier la solidité à la légèreté ; on en fait usage onstamment dans les constructions en fer : fers à T et à double T, onts tubulaires, etc.

La résistance des matériaux est l'une des questions les plus importantes et les plus difficiles de la mécanique appliquée.

175. Résistance à la rupture par torsion. — La rupture peut aussi être opérée par torsion. Dans les corps raides, elle a lieu par glissement; dans les corps flexibles, elle se produit par allongement des fibres extérieures : la cassure a une forme différente dans les deux cas (Wertheim). Généralement, le moment de la force amenant la rupture peut se représenter par tB^3, t étant le coefficient de rupture par torsion, et B^3 un terme du troisième degré qui dépend des dimensions transversales :

pour une tige circulaire de rayon R. . . . $B^3 = \frac{\pi}{2} R^3$,

pour une verge rectangulaire, de largeur b et d'épaisseur c. . . . . $B^3 = \frac{2}{3} \frac{b^3 c^3}{\left(b^2 + c^2\right)^{\frac{1}{2}}}$.

Les expériences sur la rupture par torsion font défaut; on a seulement quelques mesures du coefficient de rupture de la fonte, variant de 17,273 à 25,701 (¹).

(¹) MOUSSON, *Physik auf Grundlage der Erfahrung*, I, 247. Zürich, 1879.

CHAPITRE IV

DIVISIBILITÉ

176. Porosité. — Nous rappellerons, sans insister, l'expérience de la pluie de mercure dans le vide, traversant une plaque de bois ou une peau de chamois, l'expérience de Bacon sur le suintement de l'eau à travers une sphère de plomb fermée et comprimée (nous y reviendrons), l'expérience de la submersion dans le vide d'un morceau de bois ne flottant sur l'eau que grâce à l'air qu'il contenait, les phénomènes bien connus de filtration et de pétrification, les propriétés des pierres gélives et des *hydrophanes*. Tous ces faits indiquent dans le plus grand nombre des solides l'existence de pores plus ou moins étroits.

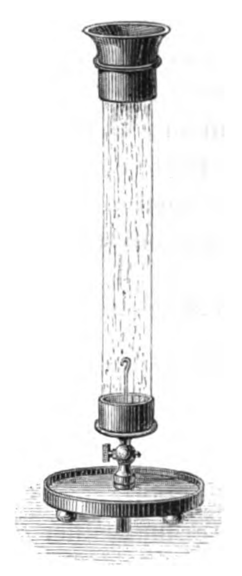


Fig. 229

Ces pores s'ouvrent par la chaleur : l'acier est poreux à chaud ur l'hydrogène qui, dans les conditions ordinaires, ne peut le pé-trer à froid. Ils sont d'ailleurs plus ou moins facilement accessi-es aux divers corps : l'huile s'introduit facilement dans le marbre l'eau ne semble pas entrer.

177. Divisibilité (1). — La fragmentation des solides peut re poussée très loin, comme on en jugera par le tableau suivant ı, selon l'usage, la lettre μ représente le micron.

Verre pilé ou soufflé	1μ
Fil de platine à la Wollaston	0,8
Feuilles d'or battu	0,1 (2)
Feuilles de mica clivé (Haüy)	0,043
Couche d'or recouvrant un fil d'argent	0,004

Ces fils d'argent doré s'obtiennent par l'étirement d'un cylindre d'argent recouvert d'une mince couche d'or; un milligramme d'or peut ainsi donner une surface continue de six millions de petits carrés nettement visibles, de $0^{mm},1$ de côté : il renferme donc certainement beaucoup plus de six millions de molécules.

L'état de division des solides influe particulièrement sur la résistance qu'ils éprouvent de la part des fluides (78) : ainsi s'explique la suspension dans l'air ou dans l'eau de corps denses, mais très divisés.

Au repos, ces poussières se déposent d'autant plus lentement qu'elles sont plus fines; de là un moyen de recueillir à part les grains les plus ténus (*lévigation*).

Pour amener les solides à cet état de division extrême, on peut employer :

1° Des moyens mécaniques (battage, laminage, tréfilage, pilage);

2° Des moyens physiques, tels que la dissolution et l'évaporation rapide du dissolvant (phosphore dissous dans le sulfure de carbone), ou la condensation brusque d'une vapeur (soufre, calomel);

3° Des moyens chimiques (or déposé au mercure, fer pyrophorique, pourpre de Cassius).

(1) Voir Gariel, *Propriétés générales des corps*, 14. Paris, Savy; 1880.

(2) L'épaisseur de ces feuilles peut encore être beaucoup réduite par immersion dans le cyanure de potassium (Faraday).

Des poudres très ténues, soumises à des pressions énergiques, s
soudent complètement. M. Spring ([1]) a obtenu ainsi des mass
aussi compactes que celles que donne la fusion, offrant mên
la structure cristalline. Cette structure est très nette dans le bi
muth aggloméré à 6000 atmosphères, dans le zinc soudé à 5000 a
mosphères et à 130°. Les métaux se soudent d'autant plus facilemen
qu'ils sont moins durs; à 5000 atmosphères le plomb s'écoule pa
tous les joints de l'appareil. Les poudres cristallines s'agglomèren
avec une remarquable facilité. La silice résiste. Le graphite se soud
complètement à 5 500 atmosphères, tandis que le charbon de sucr
reste pulvérulent à 10 000 atmosphères.

178. Diffusion des solides. — Tait remarqua qu'une poudre infusible, impalpable, devient très mobile sous l'action de la chaleur et se comporte à maints égards comme un liquide, avec courants de transport manifestes et petites projections à la surface. Il se demanda en conséquence s'il n'y aurait pas diffusion entre deux poudres infusibles et impalpables de même qu'entre deux liquides, et il entreprit des recherches à ce sujet avec M. Sydney Marsten. Mais l'expérience présenta des difficultés spéciales, tant au point de vue physique qu'au point de vue chimique, et la question, ainsi envisagée, attend encore une solution.

Si l'on chauffe à haute température un creuset de porcelaine entouré de poussière de charbon, ou simplement contenu dans un creuset de plombagine, le carbone pénètre dans la porcelaine à une profondeur d'autant plus grande que l'expérience a été prolongée plus longtemps ([2]).

Le carbone pénètre également dans le fer ([3]), et c'est ainsi que se fait la conversion du fer en acier dans la cémentation.

Par des mesures très précises de différence de potentiel, M. Pellat ([4]) a montré que deux surfaces métalliques placées parallèlement l'une à l'autre et à petite distance (quelques dixièmes de mil-

([1]) Spring, *Ann. de chim. et de phys.* (5), XXII, 170; 1881.
([2]) Sidney Marsten, *Proceed. of the royal Society of Edinburgh*, 712; 1880. — Violle, C. R., XCIV, 28; 1882.
([3]) Colson, C. R., XCIII, 1074; 1881; et XCIV, 26; 1882.
([4]) Pellat, *Journal de physique* (2), I, 416; 1882.

nètre) subissent l'une et l'autre une légère altération dans les
opriétés de leur couche superficielle. Sur chaque métal, cette
tération, en rapport avec la nature du métal voisin, demande
uelques minutes pour se produire, croît d'abord, puis tend vers
ne limite. Quand le métal influençant est écarté, le métal influencé
vient peu à peu et spontanément à son état primitif. Tout, en un
ot, se passe « comme si les métaux émettaient à la température
rdinaire une substance volatile qui, pouvant se déposer à la surface
les objets, en modifie chimiquement la nature ; si l'influence du
nétal cesse, le corps volatil quitte ensuite petit à petit cette sur-
ace, ce qui amène lentement le retour à l'état primitif. »

Nous retrouverons dans les *figures de Moser* des phénomènes de
même ordre.

CHAPITRE V

ADHÉRENCE. FROTTEMENT

I. — ADHÉRENCE.

179. Adhérence entre deux solides en contact. — Deux solides en contact manifestent dans maintes circonstances une *adhérence* marquée. C'est ainsi que les poussières s'attachent à tous

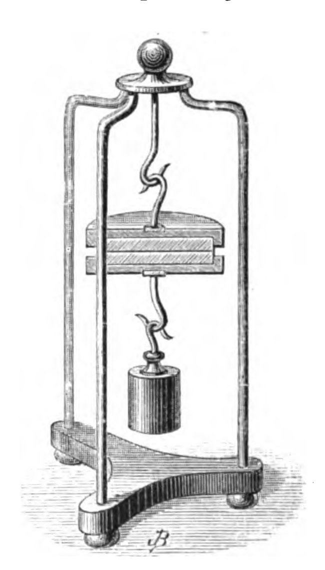


Fig. 230

les corps, que le crayon se fixe au papier, la craie au tableau, que le tain se maintient derrière une glace, le dépôt d'argent contre un miroir, les feuilles d'or sur les objets qu'elles recouvrent. Dans les cours de physique on démontre cette adhérence au moyen des *plans de Magdebourg;* ce sont deux plans de verre bien dressés

ıe l'on place l'un contre l'autre en les faisant glisser et en les presnt de façon à établir un contact étroit. On peut alors accrocher ın des plans à un support et même suspendre à l'autre des poids ns les séparer (1). L'expérience réussissant également dans le vide, fait observé ne saurait être attribué à la pression atmosphérique; ıais on doit le rapporter aux actions moléculaires. La cause de adhérence, ou *adhésion*, n'est qu'un cas particulier de la cohéon : c'est la cohésion considérablement amoindrie par une augıentation de la distance. Toutes les circonstances du phénomène onfirment cette manière de voir : l'adhérence augmente avec a perfection géométrique des surfaces, leur netteté physique, 'étroitesse du contact. Une lame d'or et une lame d'argent superposées se soudent intimement par une passe au laminoir. En appliquant une feuille d'argent sur un objet en laiton bien décapé et légèrement chauffé, on l'argente très bien. Deux moitiés d'une balle de plomb, séparées par un rasoir et aussitôt rapprochées, adhèrent fortement. L'adhérence d'une poussière est favorisée par la présence momentanée d'un liquide disparaissant ensuite (mortiers, colles, vernis). L'épaisseur des surfaces ne joue aucun rôle, les actions moléculaires devenant insensibles aux distances appréciables. Pour la même raison, il n'y a plus adhérence entre deux solides distants seulement d'une fraction de millimètre.

Le rapprochement des corps mous peut être amené à un point tel que l'adhésion acquière l'intensité de la cohésion. Le fer, ramolli par la chaleur, se soude à lui-même par le martelage ou le corroyage, propriété précieuse sur laquelle repose tout le travail de ce métal. Le platine est dans le même cas. Le caoutchouc fraîchement coupé se soude à lui-même à la température ordinaire.

Ce phénomène ne doit pas être confondu avec ce que l'on appelle en mécanique l'*adhérence*, laquelle n'est autre chose qu'une forme de frottement, c'est-à-dire une sorte d'engrènement réciproque des saillies et des cavités de deux corps en présence. Le poli des surfaces diminue le frottement; il augmente au contraire l'adhésion. Ce fait seul suffirait à différencier les deux phénomènes.

(1) Dans les dépôts de glaces, on a soin de les isoler les unes des autres; l'adhérence entre de grandes glaces serait telle en effet qu'on ne pourrait les séparer sans les briser.

II. — FROTTEMENT.

A. — FROTTEMENT DE GLISSEMENT.

180. Expériences de Coulomb. — Amontons (¹) est le premier qui ait cherché à évaluer le frottement des solides. Ses expériences l'amenèrent à conclure que le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces en contact et proportionnel à la pression (²).

Mais les premières recherches exactes sont dues à Coulomb (³); elles ont été exécutées à Rochefort où il était alors capitaine du génie.

L'appareil de Coulomb se composait essentiellement d'un traîneau pouvant glisser sur un madrier horizontal, solidement fixé à deux

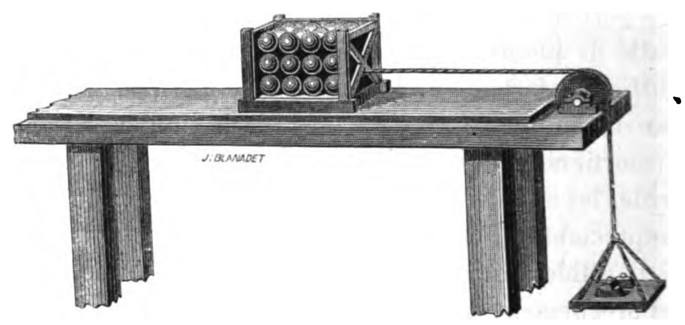


Fig. 231

poutres de chêne établies elles-mêmes sur une forte table. A l'une des extrémités des poutres, dans l'intervalle qui les sépare, était installée une poulie dont la corde, attachée d'une part au traîneau, portait de l'autre un plateau pouvant recevoir des poids; à l'autre

(¹) Amontons, *Mémoires de l'Académie des sciences* pour 1699.

(²) Suivant Amontons, tous les corps, bien graissés, ont le même frottement. Musschembroeck (*Essai de physique*. Leyde; 1729) montra que cela n'était pas exact. D'autre part, des Camus (*Traité des forces mouvantes*. Paris; 1722) et Desaguliers (*Cours de physique*. Londres; 1725) distinguèrent le frottement au départ du frottement pendant le mouvement. Vint ensuite Bossut (*Traité de mécanique*. Paris; 1763) qui, admettant les théories d'Amontons, posa nettement les conditions des expériences à effectuer et en prévit même les résultats.

(³) Coulomb, *Théorie des machines simples*; 1781. Ce travail, publié en 1785 dans le tome X des *Savants étrangers*, a été réédité en 1821 par Bachelier avec les autres mémoires de Coulomb.

extrémité des poutres on avait disposé un petit treuil horizontal qui servait, au moyen d'une deuxième corde, à rappeler le traîneau de ce côté. Le madrier dormant avait huit pieds ($2^m,60$) de long sur 16 pouces ($0^m,43$) de large : on y adaptait au besoin les plaques des matières à étudier. On employa successivement divers traîneaux de plusieurs longueurs, garnis par-dessous de substances différentes et chargés de poids variables.

Les expériences eurent d'abord pour objet de mesurer la force nécessaire pour mettre le chariot en mouvement, c'est-à-dire pour vaincre le frottement au départ après un temps de repos donné. On substituait alors au plateau une espèce de romaine, le long de laquelle on faisait glisser un poids jusqu'à ce que le levier emportât le traîneau. De la valeur et de la position de ce poids, du poids même et de la position du centre de gravité du levier, on déduisait aisément le premier effort nécessaire pour vaincre le frottement. Dans tous les cas cet effort s'est montré proportionnel à la pression. L'influence du temps de repos parut variable : avec les métaux cette influence sembla généralement nulle ; avec les bois, l'intensité de la force de frottement se montra sensiblement croissante pendant les premiers instants pour arriver toutefois assez rapidement (en quelques minutes) à son maximum ou à sa limite ; dans le cas enfin des bois en contact avec des métaux, une augmentation très lente se manifesta pendant plusieurs jours.

Pour étudier le frottement des surfaces en mouvement, le plateau étant chargé d'un poids convenable, on le mettait en mouvement d'un coup de marteau, ou à l'aide d'un levier, et on suivait ce mouvement sur une division en pouces tracée sur le côté du madrier. Voici par exemple une expérience prise au hasard parmi celles qui furent effectuées avec deux surfaces de chêne, glissant l'une sur l'autre sans enduit, parallèlement aux fibres du bois; dans cette expérience, comme d'ailleurs dans presque toutes, on observa le mouvement pendant une course de quatre pieds de longueur, divisée en deux parties égales de deux pieds chacune.

« *VIe Expérience.* — Le traîneau chargé, son poids compris, de 1647 livres.

1er *Essai.* — Traîneau ébranlé sous une traction de 166 livres, les

deux premiers pieds franchis en $\frac{11}{2}$ secondes, les deux autres en secondes.

2° *Essai.* — Avec une traction de 172 livres, deux pieds franchis en $\frac{9}{2}$ secondes, deux pieds en $\frac{4}{2}$ secondes. »

Coulomb fit ainsi sur ces deux surfaces neuf expériences avec des charges différentes, et dans ces divers cas « il a paru qu'en général les deux premiers pieds ont été parcourus dans un temps un peu plus que double des deux derniers. Or, lorsqu'un corps est mis en mouvement par une force constante, et que conséquemment le mouvement est uniformément accéléré, deux espaces égaux sont consécutivement parcourus dans des temps qui sont entre eux à peu près comme 100 est à 42 (¹); ainsi notre traîneau a parcouru sa course de quatre pieds d'un mouvement à peu près uniformément accéléré; ainsi, comme il était mené par un poids constant, il fallait que la force retardatrice du frottement fût aussi une quantité constante : conséquemment elle est à peu près la même sous tous les degrés de vitesse. »

Les mêmes expériences déterminent la force de frottement. Soient, en effet, P le poids (plateau compris) qui tire le traîneau, F la force de frottement, t le temps observé pendant que le traîneau fournit sa course e (de 4 pieds), Q le poids total du système à mouvoir (traîneau et plateau avec leurs charges, plus un poids constant de 7 livres pour tenir compte de la masse de la poulie), on a, la force de la traction P — F étant constante,

$$P - F = \frac{2Qe}{gt^2},$$

équation qui permet de calculer F.

(¹) Soient en effet t_1 le temps nécessaire pour parcourir un espace e_1, et t' le temps nécessaire pour parcourir un espace $2e_1$,

$$e_1 = \frac{gt_1^2}{2}, \quad 2e_1 = \frac{gt'^2}{2}$$

d'où

$$t' = t_1\sqrt{2} = 1,42\,t_1.$$

Si donc nous posons $t_1 = 100$, nous aurons $t' = 142$, et le temps $t' - t_1$ nécessaire pour parcourir le 2ᵉ espace e_1 sera

$$t_2 = t' - t_1 = 42.$$

On trouve ainsi, par exemple, pour le deuxième essai de l'expérience rapportée plus haut, F = 160. Dans cette expérience, la surface de contact était de 36 pouces carrés ou d'un quart de pied. Dans d'autres (marquées d'un astérisque au tableau ci-dessous), la surface de contact fut de 3 pieds. Ramenons tout à une surface moyenne de 1 pied carré ($0^{mq},1055$) dont chaque point subirait la même pression qu'il supportait dans les expériences réelles, et nous aurons les résultats suivants :

	Pression.	Frottement.	$\frac{\text{Pression.}}{\text{Frottement.}}$
Ire expérience (2e essai) *.	25 livres.	4,3	5,7
IVe » »	188 »	20	9,4
IIe » » *	291 »	34	9,5
IIIe » » *	825 »	84	9,4
Ve » »	1788 »	196	9,2
VIe » »	6588 »	640	10,4

Ainsi, « depuis 2 quintaux jusqu'à 4 ou 5 milliers », le rapport du frottement à la pression s'est montré constant et égal à $\frac{1}{9,5}$. On voit, en outre, que le frottement est indépendant de l'étendue des surfaces frottantes : ce qui, d'ailleurs, se conçoit aisément, le frottement étant moitié moindre en chaque point (la pression en chaque point étant réduite à moitié), si le nombre des points frottants devient double.

Coulomb obtint, à quelques exceptions près, des résultats tout semblables dans le frottement des métaux entre eux ou contre les bois; et il fut ainsi amené à formuler les lois générales du phénomène :

La résistance due au frottement des corps solides est proportionnelle à la pression exercée par l'un des corps contre l'autre, indépendante de l'étendue des surfaces en contact, indépendante aussi de la vitesse du mouvement.

Il faut reconnaître toutefois que les expériences de Coulomb présentent d'assez grandes inégalités, et que si les lois formulées par l'illustre physicien sont exactes, plus exactes même et moins sujettes à exceptions qu'il ne l'avait pensé, les coefficients numériques ne sont pas entièrement certains.

Il était donc nécessaire de reprendre ces déterminations et de les étendre (¹). C'est ce que fit le capitaine (depuis général) Morin par ses expériences effectuées à Metz dans l'ancienne fonderie, en 1831 et pendant les années suivantes.

181. Expériences de Morin (²). — Ces expériences se distinguent des précédentes par trois perfectionnements principaux :

1° On a fait parcourir au traîneau un espace beaucoup plus grand (près de 4 mètres), ce qui a permis de reconnaître avec plus de certitude la nature du mouvement imprimé.

2° L'effort exercé sur le traîneau a été évalué de deux manières : d'abord par la connaissance du poids descendant, correction faite des résistances opposées par le frottement et l'inertie de la poulie ainsi que par la roideur de la corde; puis, suivant le conseil de Poncelet, au moyen d'un dynamomètre placé sur la corde même. Ce dynamomètre était constitué par un ressort à deux branches, dont l'une était munie d'un pinceau appuyant sur un disque horizontal entraîné avec l'appareil. Sur la circonférence du disque s'enroulait un fil tendu parallèlement au madrier dormant, de sorte que, quand le traîneau marchait, le disque tournait, et la vitesse d'un point de la circonférence était précisément celle du traîneau. Le pinceau, convenablement alimenté d'encre de Chine, traçait sur le plateau une courbe dont les rayons vecteurs indiquaient les flexions successives du ressort et par suite les valeurs successives de l'effort à mesurer. Or la courbe fut toujours exactement un cercle; la constance de la tension se trouva ainsi rigoureusement démontrée en même temps que sa valeur était établie en parfait accord avec celle que donnait le premier procédé.

3° La nature du mouvement imprimé au traîneau fut déterminée avec une exactitude non moins grande et par un procédé analogue. A l'axe de la poulie de renvoi C dont le mouvement est intimement

(¹) En 1785, le Dr Vince publia dans les *Phil. Trans.* des recherches expérimentales dont les résultats ne s'accordent pas entièrement avec ceux de Coulomb. Mais ces expériences, faites fort en petit, ne sont pas concluantes. La même incertitude pèse sur les résultats des expériences de Rennie (*Phil. Trans.*; 1829), qui avait cherché à étendre les travaux de Coulomb par une méthode semblable.

(²) Morin, *Nouvelles expériences sur le frottement*. Paris; 1833.

à celui du traîneau, on fixa un disque de cuivre E parfaitement essé, et en regard de ce disque on plaça un style recevant d'un écanisme d'horlogerie un mouvement de rotation iiforme suivant un cercle de 14 centimètres de imètre. La courbe tracée, résultat de la combinai-1 du mouvement régulier du style et du mouve-ent, quelquefois uniforme, mais plus souvent va-ible, du traîneau, permet de déterminer la loi de dernier mouvement. Soit, en effet, ABC la courbe crite, il est visible qu'un point quelconque B de tte courbe a été marqué lorsque le point B du disque se trouvait us la pointe *b* du style ; de sorte que si nous prenons sur le petit

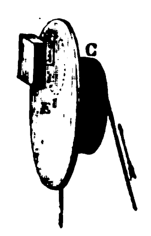


Fig. 232

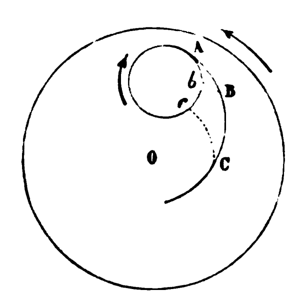


Fig. 233

cercle A*bc* des arcs égaux correspondant à des intervalles de temps égaux A*b*, *bc*....., et si des points *b*, *c*..... nous décrivons de O comme centre les arcs de cercles *b*B, *c*C....., les points B, C..... ainsi obtenus définissent les angles AOB, AOC..... dont le disque a tourné pendant 1, 2..... intervalles de temps. En général, ces angles se sont montrés croissant comme les carrés des temps. Si donc, relevant ces angles, on les convertit en déplacements du traîneau, on pourra tracer la *courbe du mouvement* du chariot

$$t^2 = 2pe,$$

p étant une constante que l'on détermine graphiquement ; et la formule



$$P-F=\frac{Q}{g}\cdot\frac{1}{p}$$

donnera alors F.

Les expériences ont été très complètes : les vitesses furent portées jusqu'à 3 mètres par seconde, l'étendue des surfaces en contact jusqu'à 30 décimètres carrés, et les pressions jusqu'à plus de 1100 kilogrammes. Dans toutes les expériences, le mouvement fut trouvé rigoureusement uniforme, ou uniformément accéléré ou uniformément retardé; ce qui montre que, dans tous les cas la résistance due au frottement est constante et indépendante de la vitesse. On vérifia également que cette résistance est indépendante de l'étendue des surfaces en contact et exactement proportionnelle à la pression.

Le frottement au départ est moins constant et moins régulier. On doit cependant encore le regarder comme proportionnel à la pression et indépendant de l'étendue des surfaces en contact. Pour les corps durs, tels que les métaux et les pierres, il ne diffère pas sensiblement du frottement pendant le mouvement. Pour les corps mous, il est, ainsi que l'avait reconnu Coulomb, plus grand que pendant le mouvement. Pour les surfaces graissées, sous des pressions grandes la graisse est à la longue expulsée, et le frottement au départ est souvent alors plus que double du frottement avec des surfaces récemment graissées. Enfin, Morin a observé que, quand le traîneau était sollicité par un effort capable de vaincre le frottement pendant le mouvement, mais qui n'aurait pu triompher du frottement au départ, une simple vibration produite par une cause extérieure et légère en apparence suffisait à déterminer le mouvement. Cette observation importante s'applique aux constructions toujours plus ou moins exposées à des vibrations et montre que, dans les calculs relatifs à la stabilité, on ne doit introduire que la valeur du frottement qui convient au mouvement.

A l'appui des conclusions qui précèdent, nous rapporterons quelques résultats d'expériences, et d'abord deux séries concernant le frottement au départ :

Frottement au moment du départ.

Nature des surfaces frottantes.	Étendue de la surface de contact.	Pression.	Frottement.	Frottement / Pression
	mq	kg		
...êne sur chêne, fibres croisées, sans enduit....	0,0880	54,66	30,45	0,55
		224,44	68,12	0,51
		1 145,63	114,42	0,51
	0,0040	176,54	92,41	0,52
		662,48	387,58	0,52
...erre calcaire oolitique tendre sur même pierre.	0,0880	142,39	103,79	0,73
		578,08	422,99	0,73
	0,0464	140,36	103,79	0,74
		570,17	445,79	0,78
	arêtes arrondies.	135,30	103,79	0,77
		273,00	200,68	0,74

Ces deux séries manifestent suffisamment qu'au départ le frottement est proportionnel à la pression et indépendant de l'étendue de la surface de contact.

Voici maintenant quelques résultats relatifs au cas des surfaces en mouvement les unes sur les autres :

Frottement pendant le mouvement.

Nature des surfaces frottantes.	Étendue de la surface de contact.	Pression Q.	Tension de la corde P.	Paramètre. $2p$.	$\frac{1}{p}$	Frottement.	Frottement / Pression
Fonte sur fonte avec saindoux.	mq 0,0319	499,96	54,44	5,52	0,362	35,10	0,072
		2803,77	247,09	10,84	0,184	200,03	0,071
Cuivre jaune sur fonte sans enduit.	0,0285	213,35	63,18	2,40	0,833	45,06	0,211
	0,0072	215,86	63,34	2,45	0,813	45,45	0,210

Ces exemples justifient les lois posées pour le frottement pendant le mouvement.

Des expériences précédentes, il résulte que toute surface, outre la réaction normale, considérée seule dans les chapitres précédents, est susceptible d'exercer sur les corps une réaction tangentielle que

l'on appelle la force de frottement. En conséquence, l'équilibr d'un solide naturel posé sur un plan ne se trouve plus astreint i des conditions rigoureuses dont la nécessité équivaudrait à un impossibilité physique : il suffit, en effet, que la résultante de forces extérieures (abstraction faite du frottement) soit non pa nulle, mais seulement inférieure à une certaine limite. De même pendant le mouvement, la résultante des forces extérieures doit êtr sans cesse supérieure au frottement, sinon le corps ne tarderai pas à s'arrêter.

182. Coefficients de frottement d'après Morin. — L force de frottement est, nous le savons, proportionnelle à la pres sion ou à la réaction normale N du plan : le *coefficient d frottement* f est le rapport de ces deux forces. On considèr souvent ce rapport comme la tangente d'un certain angle φ qu

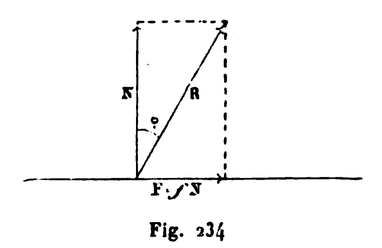


Fig. 234

n'est autre chose que l'angle de la réaction totale du plan R ave la normale, et que l'on nomme l'*angle de frottement*. On a donc pa définition

$$\frac{F}{N}=f=tg\varphi.$$

Le tableau suivant contient les valeurs expérimentales de f dé terminées par le général Morin. On y a joint quelques résultats de expériences du même auteur relatives au frottement des tourillon sur leurs coussinets, expériences faites au moyen d'un dynamo mètre de rotation disposé pour l'enregistrement, à la manière d dynamomètre de traction décrit plus haut.

. *Coefficients de frottement des surfaces planes au départ, après quelque temps de contact.*

Chêne sur chêne.	Fibres parallèles	Surfaces sans enduit	0,62
		— frottées de savon sec	0,44
	Fibres perpendiculaires	Surfaces sans enduit	0,54
		— mouillées d'eau	0,71
	Bois debout sur bois à plat.	Surfaces sans enduit	0,43
Fer sur chêne	Fibres parallèles au mouvement	Surfaces sans enduit	0,62
		— mouillées d'eau	0,65
Cuir de courroie sur chêne (Fibres perpendiculaires)		Surfaces sans enduit	0,47
Cuir de courroie sur fonte		Surfaces sans enduit	0,28
Fer sur fonte		Surfaces sans enduit	0,19
Fonte sur fonte		Surfaces un peu onctueuses	0,16
Chêne, orme, charme, fer, fonte, bronze (deux à deux)		Surfaces grasses (huile ou saindoux)	0,15

II. *Coefficients de frottement des surfaces planes en mouvement.*

Chêne sur chêne.	Fibres parallèles	Surfaces sans enduit	0,48
		— frottées de savon sec	0,16
	Fibres perpendiculaires.	Surfaces sans enduit	0,34
		— mouillées d'eau	0,25
	Bois debout sur bois à plat.	Surfaces sans enduit	0,19
Fer sur chêne	Fibres parallèles au mouvement	Surfaces sans enduit	0,62
		— mouillées d'eau	0,26
		— frottées de savon sec	0,21
Fer sur fonte ou bronze		Surfaces un peu onctueuses	0,18
Chêne, orme, charme, fer, fonte, acier, bronze (deux à deux)		Surfaces légèrement onctueuses	0,15
		Surfaces grasses (enduit ordinaire)	0,07 à 0,08
		Surfaces grasses (enduit sans cesse renouvelé)	0,04 à 0,05

III. *Coefficients de frottement des tourillons sur leurs coussinets.*

		Graissage Ordinaire.	Graissage Continu.
Bois et métaux (deux à deux).	Surfaces grasses (huile, saindoux ou suif)	0,07	0,05
	— onctueuses	0,15	
	— très peu onctueuses	0,25	

L'influence du graissage est évidente : le meilleur enduit est le pl[us] fluide. L'air est l'enduit le plus parfait ; seulement, il réclame u[ne] vitesse assez considérable en présence des pièces : M. Hirn a v[u], non sans étonnement, le frottement presque supprimé entre de[s] pièces tournant à sec avec une vitesse énorme. Après l'air, l'eau co[n]stitue un excellent enduit : dans le chemin de fer glissant de Girard de l'eau injectée sous pression entre les rails de la voie et les patin[s] du wagon réduisait le coefficient de frottement de 0,52 à 0,004.

183. Influence du frottement dans quelques machines simples. — Pour bien faire comprendre le rôle du frottement, nous reprendrons à ce point de vue une question très simple, celle du *plan incliné*. Un corps étant placé sur un plan incliné, cherchons à quelles conditions il pourra s'y tenir en équilibre. Ces conditions ne sont plus, à proprement parler, susceptibles d'être formulées par des équations. Aux forces extérieures agissant directement sur le corps, on doit, en effet, ajouter une force de frottement capable de résister au mouvement jusqu'à une certaine limite et s'exerçant toujours en sens contraire de celui dans lequel le mouvement tend à se produire. Il faut donc, pour préciser, supposer que le mouvement soit sur le point de s'effectuer dans une direction déterminée. Admettons, par exemple, que le corps tende à descendre sous la seule action de son poids P. La composante effi-

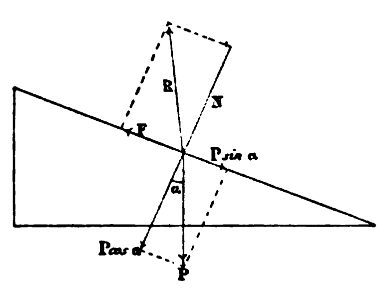


Fig. 235

cace du poids est $P \sin \alpha$; la composante normale $P \cos \alpha$ est détruite par la réaction normale du plan N ; mais il reste la réaction tangentielle $F = N \operatorname{tg} \varphi = P \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi$, parallèle au plan et en sens contraire de la force $P \sin \alpha$.

Pour l'équilibre, il suffit que l'on ait

$$P \sin \alpha \leqslant P \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi,$$

a

$$\operatorname{tg} \alpha \leqslant \operatorname{tg} \varphi,$$

est-à-dire

$$\alpha \leqslant \varphi.$$

Si α est supérieur à φ, le corps descendra d'un mouvement uniormément accéléré sous l'action de la force $P \sin \alpha - P \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi$, ou , $\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$. Pour le tenir alors en équilibre, il faudrait une force Q, parallèle au plan et tirant le corps vers le haut avec une intensité égale *au minimum* à $P \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$.

Mais la force Q pourra être plus grande que cette quantité, pourvu qu'elle ne dépasse pas une certaine grandeur aisée à déterminer. Maintenant, en effet, le mouvement tend à se produire vers le haut et, pour avoir la valeur maximum de Q compatible avec l'équilibre,

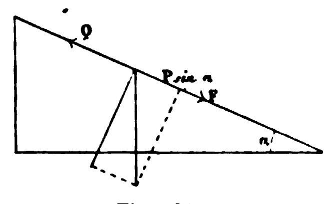


Fig. 236

il suffit d'écrire que cette force Q fait juste équilibre : 1° à la composante efficace du poids $P \sin \alpha$; 2° à la résistance $P \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi$, dirigée présentement dans le même sens que $P \sin \alpha$. On doit avoir *au maximum* $Q = P \sin \alpha + P \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi = P \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}$ (¹). Si Q dépassait cette valeur, le mobile monterait le long du plan avec un mouvement uniformément accéléré.

Dans la *poulie*, s'il n'y avait pas de frottement, la réaction de l'axe fixe *c* contre la surface du trou central ou œil *o* devant équi-

(¹) Pour passer du mouvement descendant au mouvement ascendant, il suffit de changer le signe de φ.

librer les deux forces P et Q (supposées parallèles et verticales vers le bas) serait elle-même verticale : le point de contact *a* se placerait

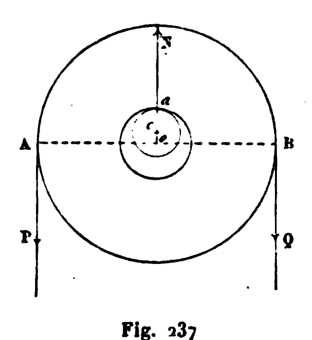


Fig. 237

donc au sommet du diamètre vertical de l'axe *c* et au sommet du diamètre vertical de l'œil *o* : par suite, le centre *o* de cet œil serait le centre fixe de rotation. Enfin, le point d'application *o* de la résultante étant à égale distance de A et de B, la puissance P égalerait la résistance Q.

Voyons maintenant comment le frottement modifie ces résultats. Le frottement intervenant, la réaction de l'axe cesse d'être normale à la surface de contact, et comme elle doit toujours rester verticale, le point de contact se transporte en *b* à l'extrémité du diamètre de *c* qui est incliné de φ sur la verticale en sens contraire du mouvement. Le

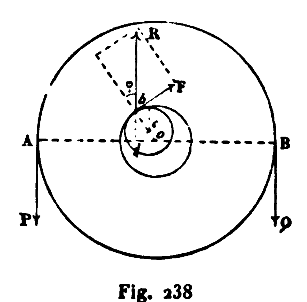


Fig. 238

centre *o* de l'œil est encore fixe; mais le point d'application de la résultante des deux forces P et Q tombant en *d* du côté de A, la puissance doit être supérieure à la résistance de $Q\dfrac{2\dfrac{r}{R}\sin\varphi}{1-\dfrac{r}{R}\sin\varphi}$, comme on

voit aisément en prenant les moments par rapport au point o : est le rayon de l'œil, et R le rayon de la poulie.

De même, dans le *treuil*, le frottement déplace le point d'appui u tourillon o sur le coussinet c, l'amenant en b, et détruit l'égalité

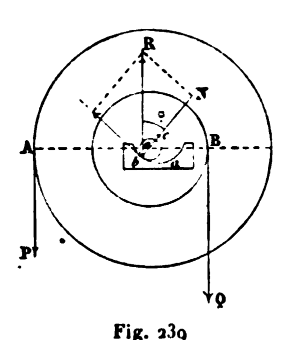


Fig. 239

des moments de la puissance et de la résistance par rapport à l'axe de rotation ; l'équation des moments devient

$$PR - QR_1 - (P + Q + p) r \sin\varphi = 0,$$

P étant la puissance appliquée à la roue de rayon R, Q la résistance appliquée au cylindre de rayon R_1, p le poids du treuil, r le rayon du tourillon. Ainsi, la puissance se trouve augmentée de

$$\frac{\left(Q + Q\frac{R_1}{R} + p\right)\frac{r}{R}\sin\varphi}{1 - \frac{r}{R}\sin\varphi}.$$

Dans tous les cas où il y a ainsi frottement, le travail moteur est supérieur au travail utile, et pour rétablir l'égalité, il faut introduire le travail du frottement. Lorsque, par exemple, on monte un corps le long d'un plan incliné, de longueur l et d'inclinaison α, le travail moteur doit non seulement faire face au travail utile $Pl \sin\alpha$, mais encore au travail de frottement $Pl \cos\alpha \operatorname{tg}\varphi$. De même dans la poulie ou dans le treuil, à chaque tour de roue correspond un travail résistant, produit de la force de frottement par la circonférence de l'œil (poulie) ou du tourillon (treuil). L'équation des forces vives n'est exacte qu'à la condition que l'on tienne compte de ce travai-

résistant, qui est, en fin de compte, la véritable forme sous laquelle le frottement s'introduit dans les équations.

B. — FROTTEMENT DE ROULEMENT.

184. Expériences de Coulomb. — Quand une roue, ou plus généralement un cylindre solide roule sur une surface plane, il se produit au contact des deux surfaces une certaine résistance au roulement : c'est cette résistance que l'on appelle improprement [1] *frottement de deuxième espèce* ou *frottement de roulement*. Pour étudier ce frottement, Coulomb plaçait un rouleau transversalement sur deux madriers horizontaux en chêne, laissant entre eux un espace vide. Des poids égaux, attachés aux bouts des ficelles *aaaa* passant dans cet espace vide, permettaient de faire varier la pression totale. A une autre ficelle *b*, enroulée sur le milieu

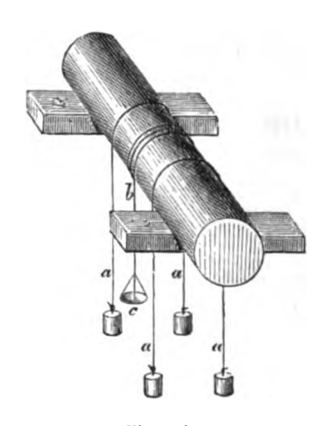


Fig. 240

du rouleau, était suspendu un plateau *c* dans lequel on mettait le poids *p* nécessaire pour obtenir un mouvement *lent et continu*, voisin de l'uniformité. Supposons cette uniformité exactement atteinte, les forces agissant sur le rouleau se font équilibre ; ces forces sont d'une part le poids Q du rouleau (y compris les poids dont il est chargé) et la force *p* nécessaire pour maintenir le mouvement uni-

[1] Cette résistance est plutôt due en effet à une déformation qu'à un véritable frottement des surfaces.

rme, d'autre part la réaction du plan. Or, les deux premières rces sont verticales, donc la réaction du plan doit être aussi ver-

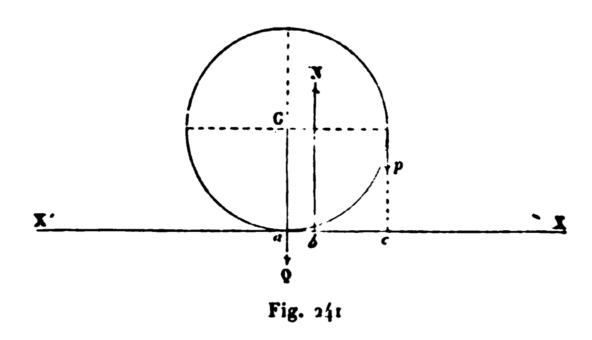


Fig. 241

ticale, et alors il faut pour l'équilibre qu'elle soit égale et contraire à la résultante des deux premières. Mais cette résultante des deux premières passe en un point b tel que

$$Q.ab = p.bc,$$

ou, si l'on pose $ac = r$, $ab = \delta$, et si l'on remarque que δ est très petit dans tous les cas utiles à considérer,

$$Q\delta = pr.$$

La réaction normale du plan doit donc être une force verticale $N = Q + p$, *appliquée en* b (ce qu'on ne peut concevoir qu'en admettant une déformation des surfaces), le point b étant défini par la relation

$$\delta = \frac{pr}{Q}.$$

Si la force p était appliquée horizontalement à une distance h du plan X'X, il devrait encore y avoir équilibre entre la résultante des deux forces Q et p d'une part et la réaction du plan X'X d'autre part. Mais la résultante des deux premières forces étant oblique, la réaction devrait être elle-même oblique ; par conséquent, à la réaction normale N s'ajoute une réaction tangentielle F, et le point d'application de la réaction totale R doit rencontrer la

droite X′X au même point b que la résultante des deux premières forces Q et p. L'expérience montre que ce point b occupe la même

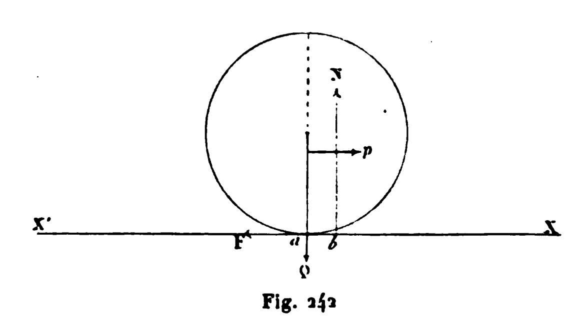


Fig. 242

position que dans le premier cas; et, en prenant les moments par rapport à ce point, on a

$$Q\delta = ph.$$

Sous cette deuxième forme, l'expérience conduit donc également à la mesure de δ. La seule différence, c'est qu'ici, pour qu'il y ait roulement et non pas glissement, il faut que $p < f\,Q$, ou que

$$h > \frac{\delta}{f},$$

f étant le coefficient de frottement de glissement.

La distance toujours très petite δ se nomme *coefficient de roulement*. Coulomb a trouvé que ce coefficient était constant pour deux mêmes substances. On peut encore exprimer ce résultat en disant qu'entre deux corps donnés la résistance au roulement est proportionnelle à la pression et en raison inverse du rayon du rouleau

$$p = \delta\frac{Q}{r}.$$

Le tableau suivant, résumant les expériences de Coulomb, justifie ces conclusions.

Nature des rouleaux.	Pression Q.	Résistance p pour un diamètre de 12P° (0m,325).	de 6P° (0m,162).	de 2P° (0m,054).	Coefficient de roulement. δ.
	liv.	liv.	liv.	liv.	lig. mm.
iayac. . . .	100	»	0,60	1,6	0,21 = 0,47
	500	»	3,00	9,4	
	1 000	»	6,00	18,0	
Irme. . . .	1 000	5,00	10,00	»	0,36 = 0,81

Le général Morin a répété les expériences à l'aide d'appareils plus précis et il a vérifié la loi de Coulomb, avec cette réserve toutefois que δ augmente quand la largeur des parties en contact diminue.

185. Avantage que présente le roulement substitué au glissement. — Bien que la loi de Coulomb ne soit probablement qu'approchée, au moins en ce qui regarde les diamètres [1], un fait ressort de toutes les expériences sur le roulement, c'est la petitesse de la résistance due au frottement dans ce genre de mouve-

[1] D'après Dupuit (*Sur le tirage des voitures*; Paris, 1837), on aurait $\delta = \varepsilon\sqrt{r}$. Mais si la formule de Coulomb ne convient évidemment qu'aux cylindres un peu gros (appliquée aux cylindres déliés, elle conduirait à conclure que l'on ne pourrait pas faire rouler sur un plan un cylindre dont le rayon serait inférieur à δ), celle de Dupuit rejette à l'infini la réaction d'un plan sur la face plane d'un solide en contact avec le plan. M. Résal (*Traité de mécanique générale*, II, 32) propose la formule

$$\delta = \mu\sqrt{\frac{r}{r+a}}$$

qui représenterait à la fois les résultats des expériences de Morin et de celles de Dupuit. On devrait prendre alors

$$\mu = 0{,}0007, \quad a = 1 \quad \text{pour fer sur fer,}$$
$$\mu = 0{,}0016, \quad a = 2{,}116 \quad \text{pour bois sur bois.}$$

Si le cylindre de rayon r roulait sur un autre de rayon r', on aurait

$$\delta = \mu\sqrt{\frac{rr'}{(r+a)(r'+a)}},$$

formule applicable à tous les cas, que les cylindres opposent leurs concavités ou leurs convexités, r et r' représentant des valeurs absolues.

ment. Le cylindre en gayac, de $0^m,162$ de diamètre, n'éprouvait qu'une résistance au roulement de 6 livres sous une charge de 1,000 livres, tandis qu'un plateau du même bois aurait rencontré une résistance au glissement d'au moins 200 livres sous la même charge.

Aussi, toutes les fois que cela est possible, substitue-t-on le frottement de roulement au frottement de glissement. Tel est, par exemple, le principe de la disposition généralement adoptée pour soutenir la poulie de la machine d'Atwood (fig. 109). La poulie est portée par un essieu faisant corps avec elle; mais, au lieu que les deux bouts de cet essieu reposent sur deux coussinets, ils sont soutenus par les jantes croisées de deux paires de galets mobiles eux-mêmes sur leurs propres tourillons. Le frottement sur l'essieu est ainsi remplacé par un roulement dont l'effet est complètement négligeable. Il est vrai qu'entre les tourillons des galets et leurs coussinets se retrouve tout le frottement, et même un frottement plus considérable; car le système, qui se composait de la poulie, du cordon et des poids attachés à ses deux extrémités, pesant en tout P, comprend en outre maintenant les quatre galets, de poids $4p$: le frottement, qui est proportionnel au poids total du système, a donc augmenté. Mais la combinaison n'en est pas moins avantageuse, car le travail du frottement est en réalité beaucoup réduit. Remarquons en effet que si le tourillon principal reposait directement sur un coussinet, le travail du frottement pendant un tour de la poulie serait égal au produit du frottement $f\mathrm{P}$ par la circonférence de ce tourillon $2\pi r$, tandis qu'ici, pour un tour de la poulie, chaque galet, si l'appareil est bien construit, n'avance que d'une très petite fraction de tour $\frac{r}{a}$, a étant le rayon du galet, et le travail résistant est le produit du frottement actuel $f(\mathrm{P}+4p)$ par cette fraction $\frac{r}{a}$ de la circonférence $2\pi\rho$ du tourillon du galet, c'est-à-dire une quantité plus petite que dans le premier cas: $\frac{\mathrm{P}+4p}{\mathrm{P}}\frac{\rho}{a} < 1$, $\frac{\rho}{a}$ étant notablement inférieur à l'unité.

L'usage des *rouleaux* pour le transport horizontal des far-

leaux vient aussi de l'avantage que l'on trouve à remplacer le

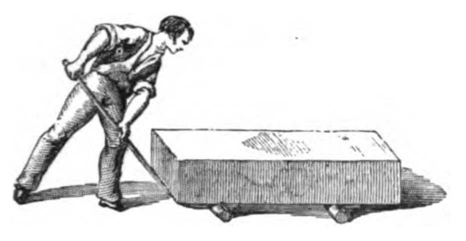


Fig. 243

glissement par le roulement, qui oppose une résistance beaucoup moindre.

Au contraire, le *sabot* sert à retenir les voitures sur les pentes

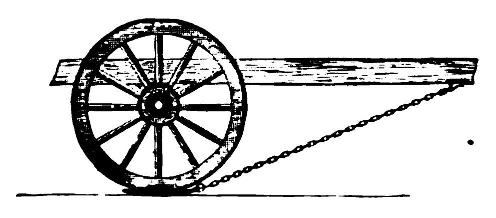


Fig. 244

trop rapides par la substitution du glissement au roulement.

C. — FREINS DYNAMOMÉTRIQUES.

186. Frein de Prony. — Parmi les applications les plus importantes des lois du frottement, il faut citer les appareils destinés à *mesurer directement le travail disponible* sur un arbre donné, appareils ayant pour type le *frein de Prony* (1).

Le principe du frein de Prony est des plus simples : on remplace sur l'arbre donné, sans changer le régime normal de la machine, les efforts ordinaires par une résistance dont le travail soit facile à évaluer. Si donc on mesure ce travail pendant un certain temps, en s'astreignant à ce que la vitesse de l'arbre reste exactement la même

(1) De Prony, *Ann. de chim. et de phys.* (2), XIX, 165; 1822.

à la fin de l'essai qu'au début, de manière que le travail moteur égal au travail résistant, le travail ainsi mesuré indiquera immédiatement le travail disponible.

L'appareil [1] se compose essentiellement de deux *mâchoires*

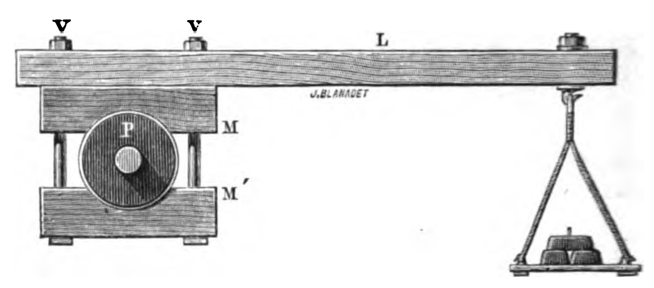


Fig. 245

bois M, M′ que l'on peut presser à l'aide des vis V, V contre une poulie P calée sur l'arbre, et d'un *levier* L fixé à l'une des mâchoires, et portant un plateau destiné à recevoir des poids.

Pour faire un essai, on serre plus ou moins les vis des mâchoires, on charge plus ou moins le plateau, de façon à conserver à la machine sa marche normale et à maintenir le frein en équilibre.

Supposons l'équilibre obtenu. En chaque point de contact des mâchoires avec la poulie s'exerce une force de frottement, tangentielle à la poulie : soit F la somme de toutes ces forces ; leur travail pendant une seconde sera

$$F\omega r,$$

ω étant la vitesse angulaire de rotation de l'arbre, et r le rayon de la poulie. Tel sera donc le travail disponible pendant le même temps.

Mais, puisque l'équilibre existe, la somme des moments de toutes les forces par rapport à l'axe doit être nulle. Si donc nous appelons P le poids placé dans le plateau, l la longueur du levier comptée de l'axe à la verticale du point d'attache du plateau dans sa position

[1] Les indications qui suivent sont extraites, pour la plupart, d'un mémoire de M. Kretz *Sur les conditions à remplir dans l'emploi du frein dynamométrique* (C. R., LVIII, 459; 1864; et *Annales de l'École normale supérieure*, (2), II, 55; 1873).

tuelle, p le poids du frein, d le bras de levier de ce poids, ou la stance de l'axe à la verticale menée par le centre de gravité du ein, nous devons avoir

$$Fr - Pl - pd = 0,$$

, si nous posons $pd = ql$, q étant ce que l'on appelle la *tare* du ein,

$$Fr = (P + q)l.$$

onc le travail disponible pendant une seconde est

$$\omega(P + q)l,$$

u. si l'on désigne par n le nombre de tours à la minute et par T a valeur numérique du travail en chevaux,

$$T = 2n\pi\frac{(P + q)l}{60 \times 75};$$

et l'on voit qu'il n'est pas nécessaire de connaître la pression exercée par les mâchoires sur la poulie, ni le frottement qui en résulte : il suffit de régler constamment cette pression de manière à maintenir la vitesse normale et le levier horizontal.

On établira avant chaque essai la tare du frein en montant celui-ci

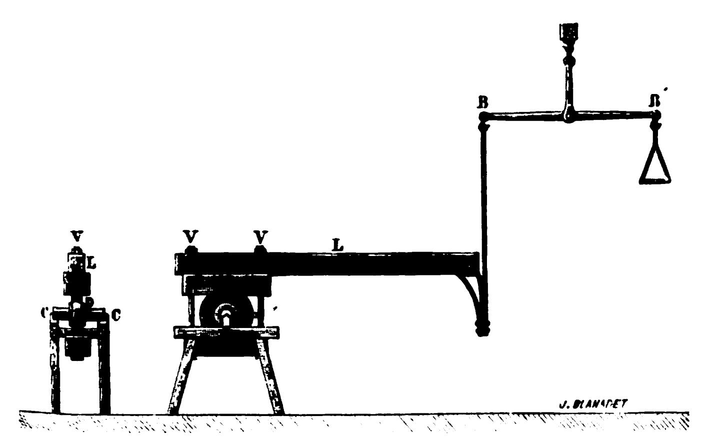


Fig. 246

sur un disque en bois D, bien centré, de même diamètre que la poulie

de l'arbre. Ce disque reposant par son axe sur l'arête supérieure d'un couteau en acier C (1), on attache l'extrémité du levier L à l'un des plateaux d'une balance BB'; le poids qu'il faut mettre dans l'autre plateau pour ramener le fléau à l'équilibre est la tare q du frein. Il sera bon de reprendre la tare après l'essai, l'eau dont on est obligé d'arroser l'appareil pendant toute la durée de l'expérience ayant pu modifier cette tare.

Dans un essai au frein, il est en effet nécessaire de lubrifier continuellement les surfaces pour empêcher l'échauffement et assurer un frottement constant. Mais, quoi que l'on fasse, on ne réussit jamais à obtenir cette constance; et il faut, en agissant sur les écrous, corriger par des changements de pression les variations du coefficient de frottement. Ces corrections ne peuvent pas être immédiates; le frein ne reste donc pas immobile comme nous l'avons supposé : il oscille sans cesse.

Supposons deux arrêts solides, deux forts madriers placés aux extrémités de la course la plus longue que l'on veuille permettre au levier (et quand ce ne serait que par des motifs de simple prudence, on devra toujours, avant toutes choses, disposer de tels arrêts); une fois l'expérience en marche, il ne sera pas, en général, très difficile de maintenir le frein de façon que le levier ne vienne toucher ni l'un ni l'autre des arrêts pendant la durée entière de l'essai. Mais il n'en exécutera pas moins des oscillations continuelles entre ces limites.

Avec la forme d'appareil représentée plus haut, forme qui, dans la pratique, se substitua très vite au modèle original, plus exact, mais incommode, de Prony, ces oscillations troublent absolument les résultats : en effet les bras du levier des forces P et p changent avec la position du frein, et en admettant pour l et $\frac{pd}{l}$ les valeurs que ces quantités ont quand le levier est horizontal, on est entièrement dans l'arbitraire.

187. Différentes formes de freins. — Mais on peut faire

(1) La méthode, souvent usitée, qui consiste à soutenir directement le frein par une barre passant sous la mâchoire supérieure est absolument mauvaise. En employant, au contraire, un disque en bois, comme l'a indiqué M. de Mondésir, on peut aisément tarer à 200 grammes près un frein à leviers parallèles du poids de 700 kilogrammes. Voir Kretz, *loc. cit.*

en sorte que l reste constant; il suffit pour cela d'attacher le plateau au levier par une courroie qui passe sur un arc en fer

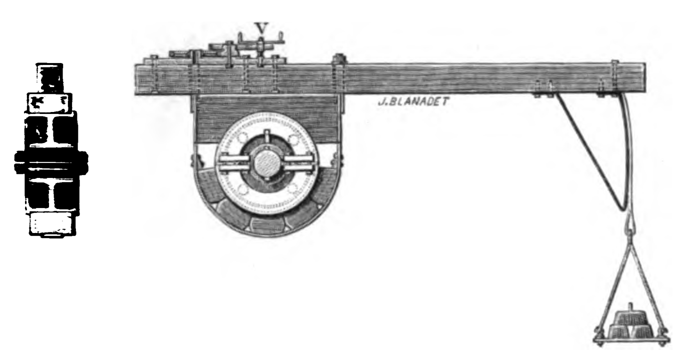


Fig. 247

ayant pour centre celui de l'arbre, comme l'a indiqué Fourneyron (¹). On peut aussi rendre pd constant, soit en prenant $d=0$, c'est-à-dire en équilibrant le frein autour de l'axe, ainsi

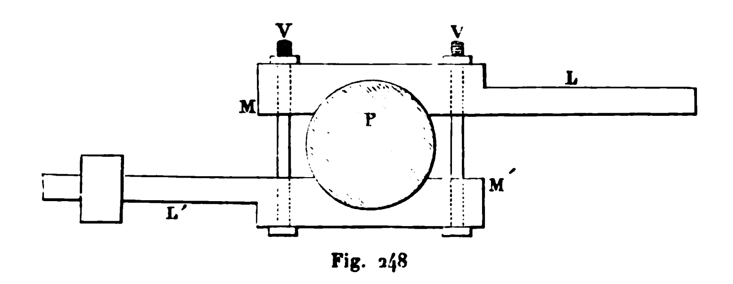


Fig. 248

que l'avait fait de Prony, par une disposition peu pratique (fig. 248), et comme l'a fait depuis M. Kretz (²), d'une manière

(¹) La figure 247 représente le frein employé en 1852 par M. Rolland et construit par M. Farcot pour l'essai des machines de la manufacture des tabacs de Strasbourg. Le serrage se fait à l'aide d'une clef double agissant sur l'écrou par une série de roues et de pignons. Cet arrangement et les dispositions principales de l'appareil avaient été recommandés par De Saint-Léger (*Annales des mines*; XII, 1837).

(²) Le frein circulaire, imaginé par M. Kretz pour l'essai de la machine de la manufacture des tabacs de Paris-Reuilly (1862), paraît être celui auquel on doit donner la préférence toutes les fois que l'on dispose d'un grand volant tourné.

au contraire très commode, dans son frein circulaire ; soit en mettant

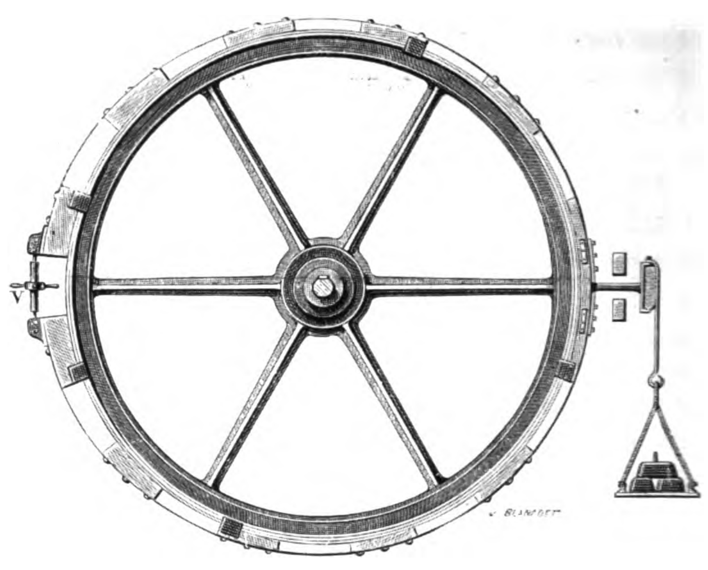


Fig. 249

le centre de gravité sur l'horizontale de l'arbre, comme dans le

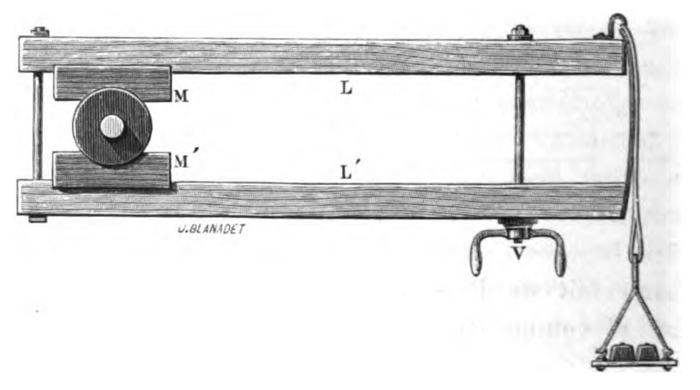


Fig. 250

frein à leviers parallèles construit par M. Rolland, sur les indications du général Poncelet (¹) : le déplacement du centre de gravité

(¹) Ce frein, dont le premier type fut construit à l'occasion de la réception des machines de la manufacture de tabacs de Lille (1860) est, parmi ceux de ces appareils qui sont exacts, le plus facile à manœuvrer, quand on n'a que des poulies de faible diamètre.

s'effectue alors sur un petit arc de cercle qui se confond avec sa tangente verticale dans les limites des oscillations habituelles, de sorte que, pratiquement, un tel frein équivaut à un frein équilibré.

Quand on a réussi, par une forme convenable de l'appareil, à rendre le moment $(P+q)\,l$ constant malgré les changements de position du levier, les oscillations sont sans influence sur la mesure (¹). Les soins de l'opérateur se borneront à empêcher le levier de venir toucher l'un ou l'autre des deux arrêts : car un choc amenant une perte de force vive, l'essai serait perdu ; il faudrait le recommencer.

Lorsque, le frottement venant à varier, l'équilibre est rompu, on doit manœuvrer les écrous, ce qui exige toujours un certain temps. Il faut donc, pour que le levier ne vienne pas buter contre un des arrêts, que les oscillations soient assez lentes. Or, l'accélération angulaire d'un point du levier est

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{Fr-(P+q)\,l}{\Sigma mr^2};$$

$(P+q)\,l$ est constant pendant un même essai ; le seul moyen de diminuer $\frac{d\omega}{dt}$ est donc d'augmenter Σmr^2, le moment d'inertie du frein.

188. Influence de la position du centre de gravité du frein. — D'après ce qui précède, on voit qu'un frein rigoureusement juste se mettra en mouvement à la moindre variation de frottement. Un tel frein exige donc beaucoup de soins pendant l'essai, mais il donne des résultats exacts.

Si le centre de gravité de l'appareil était au-dessous du plan horizontal passant par l'axe, l'appareil serait inexact, mais très stable, le moment du poids du frein dans les diverses positions du levier changeant de manière à compenser les variations du frottement.

Si, au contraire, le centre de gravité était au-dessus du plan horizontal passant par l'axe, le frein serait *fou*.

(¹) Voir Kretz, *loc. cit.*

Les figures 251 et 252 montrent comment, en effet, si le frottemen venait à l'emporter, se déplacerait le centre de gravité *g* du levie dans les deux cas et comment, par suite, le moment du poids croî

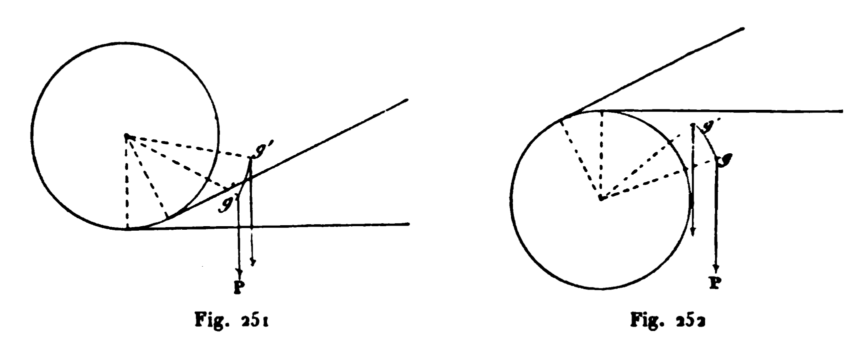


Fig. 251 Fig. 252

trait dans le premier cas de manière à rétablir l'équilibre, tandis qu'il décroîtrait dans le deuxième cas de façon à le compromettre davantage.

Ainsi la position du centre de gravité a ici la même influence que dans la balance. Le mieux sera donc de l'amener très près du plan horizontal passant par l'axe, tout en le laissant un peu au-dessous. En abaissant ainsi le centre de gravité, on n'aura, en effet, par suite des oscillations, qu'une erreur au-dessous de telle grandeur que l'on voudra ; et on donnera à l'appareil assez de stabilité pour n'avoir pas besoin de manœuvrer l'écrou à chacune de ces petites variations de frottement, qui se compensent rapidement d'elles-mêmes.

Outre que ces manœuvres sont fatigantes, il y a toujours à craindre d'introduire de ce fait des efforts dont les moments, par rapport à l'axe, ne soient pas nuls. Car, bien que l'on se serve de clefs doubles, si, en serrant ou en desserrant, on vient à déplacer le frein sur l'arbre dans un sens ou dans l'autre, on compromet l'exactitude de l'essai.

On ajoutera donc au frein, préalablement équilibré, un petit poids supplémentaire dans la verticale de l'axe, de manière à produire, suivant les cas, tel ou tel petit abaissement du centre de gravité.

189. Précautions à prendre dans un essai au frein. —

ppareil ainsi disposé, et taré, les précautions à prendre pour e un bon essai seront :

° De maintenir l'uniformité du frottement ;

° D'assurer la lenteur des oscillations et la facilité à manœuvrer écrous de façon à tenir aisément le levier entre ses arrêts ;

3° De prolonger l'essai assez longtemps (10 minutes au moins) ur être certain qu'il n'y a pas eu de variation dans la vitesse de machine et pour connaître exactement le nombre de tours accomis en une minute.

Dans ces conditions, un essai au frein à barres parallèles ou au ein circulaire donnera des résultats pleinement satisfaisants.

CHAPITRE VI

CHOC DES CORPS

190. Du choc. — Lorsqu'un corps en mouvement rencontre un autre corps en repos ou animé d'un mouvement différent, il y a *choc*.

Abstraction faite du frottement, le choc de deux corps se complique en général de phénomènes de glissement et de rotation, de sorte que la théorie complète présente d'assez graves difficultés (1).

Nous nous bornerons à quelques cas simples dont l'étude sera pour nous d'une grande importance.

191. Choc direct. — Considérons deux sphères A et B, dont les centres se meuvent suivant une même droite. La rencontre de ces systèmes produira ce que l'on appelle le *choc direct*. Supposons, pour

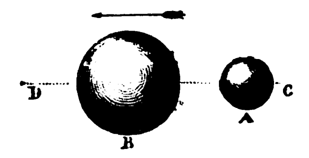


Fig. 253

préciser, que les deux sphères marchent dans le même sens, A plus vite que B. Quand la sphère A atteint B, elle tend à lui communiquer un accroissement de vitesse; mais cette communication ne se

(1) Voir Résal, *Traité de mécanique générale*, I et II.

ait pas instantanément : les molécules de B, directement atteintes, augmentent d'abord seules de vitesse ; elles se rapprochent donc des molécules suivantes, les poussent à leur tour, et la sphère B s'aplatit ainsi à l'endroit touché. De son côté, A s'aplatit également, les portions voisines de B étant d'abord seules retardées. Et la déformation [1] croît pour chacun des deux corps jusqu'à ce que les vitesses soient devenues égales.

A partir de cet instant, les choses se passeront différemment selon les cas. Et pour ne parler que des deux cas extrêmes, nous distinguerons les corps *complètement mous* et les corps *parfaitement élastiques*.

Avec les premiers, une fois l'égalité de vitesse établie, rien ne change plus : la déformation persiste, et la vitesse commune se maintient également.

Dans les corps élastiques, à la période de déformation succède au contraire une période de réaction, période exactement inverse de la première si l'élasticité est parfaite, le retour à l'état initial étant alors complet.

Ces diverses circonstances se traduisent aisément en formules. Soient m et m' les masses des deux corps, v et v' leurs vitesses avant le choc, w et w' leurs vitesses après le choc. Ces vitesses seront considérées comme positives quand le mouvement sera dirigé vers les x positifs, comme négatives dans le cas contraire.

Examinons d'abord la première période, commune à tous les cas.

Puisqu'il n'y a pas de forces extérieures, le mouvement du centre de gravité n'est pas altéré pendant le choc. Mais, les deux points m et m' étant au temps t en x et x', et leur centre de gravité en x_1, on a

$$mx + m'x' = (m + m')x_1,$$

[1] La déformation, qui persiste dans les corps mous, ne laisse pas de traces sensibles sur les corps élastiques tant qu'elle ne dépasse pas une limite, d'ailleurs assez rapprochée (on peut, sans grand effort, imprimer d'un coup de marteau une trace permanente sur un métal). Elle n'en est pas moins certaine. Qu'on laisse tomber, par exemple, une bille d'ivoire sur un plan de marbre légèrement huilé, la bille rebondit à peu près à la hauteur de chute et laisse sur le plan une trace beaucoup plus large que si on l'y avait simplement posée.



d'où, en différenciant,

$$m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}=(m+m')\frac{dx_1}{dt}.$$

Donc, pendant le temps extrêmement court du choc, on a en tout instant

$$m\frac{dx}{dt}+m'\frac{dx'}{dt}=(m+m')u_1,$$

u_1 étant la vitesse constante du centre de gravité pendant le choc.

Par conséquent, avant le choc,

$$mv+m'v'=(m+m')u_1;$$

et, comme la vitesse commune que les deux corps atteignent au bout de la première période n'est évidemment pas autre que la vitesse constante u_1 du centre de gravité, on a pour cette vitesse commune

$$u_1=\frac{mv+m'v'}{m+m'}.$$

1° Telle sera donc la vitesse des deux corps après le choc, dans le cas des corps mous.

On voit que finalement ils resteront en repos si

$$mv+m'v'=0,$$

c'est-à-dire si les quantités de mouvement sont égales et de signe contraire.

On verrait aussi aisément qu'il y a perte de force vive, perte nécessaire puisqu'un travail résistant s'est accompli, et que cette perte de force vive égale la somme des forces vives des vitesses perdues : ce qui constitue le *théorème de Carnot* (1).

2° Dans le cas des corps élastiques, à la période de déformation succède la période de retour pendant laquelle la vitesse de la masse

(1) Carnot, *Essai sur les machines en général*. Paris ; 1783.

éprouve encore une fois la diminution $v - u_1$, tandis que la vitesse m' augmente encore de $u_1 - v'$, de sorte que, à la fin de cette période, c'est-à-dire après le choc, on a

$$u_1 - w = v - u_1,\ w' - u_1 = u_1 - v',$$

où

$$w = \frac{(m - m')v + 2m'v'}{m + m'},$$

$$w' = \frac{(m - m')v' + 2mv}{m + m'}.$$

Dans ce cas, il n'y a pas de perte de force vive (1), ce qui d'ailleurs est évident *a priori*, le retour à la forme primitive étant complet. On aurait donc pu poser immédiatement

$$mw^2 + m'w'^2 = mv^2 + m'v'^2,$$

et, en y joignant la condition qu'après le choc, comme avant, on ait

$$mw + m'w' = (m + m')u_1$$

et par conséquent

$$mw + m'w' = mv + m'v',$$

on aurait été conduit aux valeurs précédentes de w et w'.

Si les deux masses sont égales, ces formules donnent

$$w = v', \quad w' = v,$$

c'est-à-dire qu'il y a échange de vitesse entre les deux corps.

Si donc l'un des corps est en repos avant le choc, l'autre demeure en repos après le choc, tandis que le premier prend la vitesse primitive du corps choquant. C'est ce qu'on vérifie aisément avec l'appa-

(1) En réalité, il n'y a pas de corps pour lequel le choc ne soit accompagné d'une certaine perte de force vive, par suite du mouvement vibratoire imprimé à ses molécules.

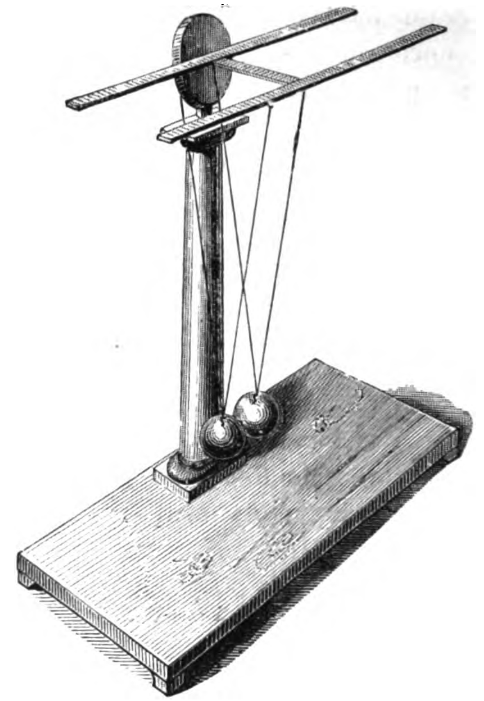


Fig. 254

reil ci-contre qui porte deux billes d'ivoire égales, suspendues l'une

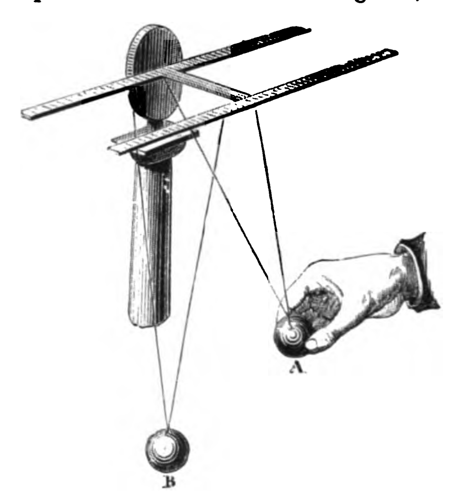


Fig. 255

à côté de l'autre. Si l'on écarte l'une d'elles et qu'on la laisse re-

ber, elle vient choquer la deuxième et s'arrête, tandis que la xième bille se soulève pour retomber ensuite sur la première, remonte à son tour, et ainsi de suite.

In prenant sept billes suspendues côte à côte, en ligne droite, a l'*appareil à sept billes d'ivoire*, qui permet de réaliser e expérience très instructive. Soulevant la première bille jusqu'à e certaine hauteur, on la laisse retomber, et l'on voit la septième

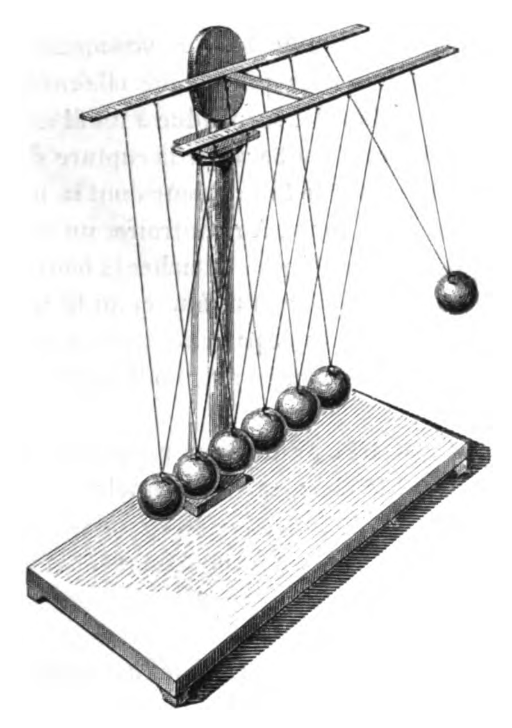


Fig. 256

bille partir, pour s'élever à la hauteur d'où on avait lâché la première. Elle retombe, son choc fait remonter la première, et ainsi de suite : les billes intermédiaires restent toujours immobiles. Cela se conçoit aisément, puisque la deuxième bille prend la vitesse de la première réduite immédiatement au repos ; le choc de la deuxième bille sur la troisième fait de même passer dans cette troisième toute la vitesse de la deuxième qui est ramenée au repos, et ainsi successivement sur toute la ligne. Ce fait confirme

la proposition précédente qu'il faut un certain temps pour la communication du mouvement au travers d'un corps ; car si, lorsque la première bille choque la deuxième, le mouvement se communiquait instantanément à toute la masse, les choses se passeraient comme si la première bille venait en choquer une six fois plu grosse qu'elle ; et il n'en est pas ainsi.

On peut d'ailleurs vérifier cette durée de la communication du mouvement par d'autres expériences :

1° Une carte placée sous une bille et vivement frappée par un ressort sera lancée au loin sans que la bille elle-même bouge.

2° Une boule un peu lourde, suspendue à un fil et tirée lentemen par un fil de même espèce, tombera par la rupture du fil supérieur ce fil en effet cassera avant le fil inférieur dont la tension est moindre de tout le poids de la boule. Au contraire, un coup brusque su le fil inférieur rompra celui-ci sans détacher la boule, le mouvemen n'ayant pas eu le temps de se communiquer au fil supérieur.

3° Une balle de plomb, chassée par une arme à feu, perce une vitr sans la briser, tandis que, lancée plus mollement, elle la brise infailliblement.

Si la masse m' est très grande par rapport à la masse m et elle est en repos avant le choc, sa vitesse finale

$$w' = \frac{2mv}{m+m'},$$

est à peu près nulle, et la masse m rebondit avec une vitesse

$$w = \frac{(m-m')v}{m+m'}$$

sensiblement égale à $-v$.

La faiblesse de w' dans ce cas explique pourquoi les cordonnie se mettent une pierre sur les genoux pour battre leur cuir comment les saltimbanques peuvent se faire casser des cailloux su une grosse masse posée sur leur ventre : le déplacement de cet masse est en effet presque nul, tandis que le marteau rebondit violemment.

192. Choc oblique. — Supposons maintenant que deux petites ules viennent se choquer obliquement. Les vitesses avant le choc, et V′, peuvent se décomposer chacune en deux autres, l'une v norale au plan tangent au point de contact, l'autre t tangentielle. es vitesses normales v et v' éprouveront les mêmes changements ne dans le choc direct et deviendront w et w'. Les vitesses tangenelles ne seront pas modifiées (nous négligeons toujours le frottement). On aura donc aisément les vitesses finales W et W′.

Si m' est très grande, $w' = 0$, $w = -v$; d'autre part t n'a pas arié; la vitesse finale W sera donc égale à V et dirigée symériquement par rapport au plan tangent MN au point de contact O :

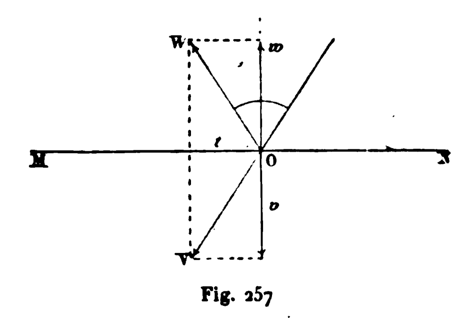


Fig. 257

ce qu'on énonce ordinairement en disant que la bille m' se réfléchit dans le plan d'incidence (plan déterminé par la normale à la surface et le rayon incident), et que l'angle de réflexion (angle que fait la vitesse après le choc avec la normale) est égal à l'angle d'incidence (angle de la vitesse avant le choc et de la normale).

COURS

DE

PHYSIQUE

4814-82. — CORBEIL. Typ. et Stér. CRÉTÉ.

COURS

DE

PHYSIQUE

PAR

J. VIOLLE

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LYON

TOME I

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE

Avec 565 figures dans le texte.

PARIS

G. MASSON, ÉDITEUR

LIBRAIRE DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE

120, Boulevard Saint-Germain, en face de l'École de Médecine

M DCCC LXXXIV

PRÉFACE

Cet ouvrage s'adresse à tous ceux qui veulent étudier sérieusement la physique. L'auteur ne s'est enfermé dans aucun programme spécial, ce qui lui a permis de développer particulièrement certaines questions, plus importantes ou moins connues, et de tracer ailleurs un exposé plus rapide, tout en s'efforçant de ne rien omettre d'essentiel.

Sans chercher de parti pris des innovations qui auraient paru singulièrement téméraires en un sujet tant de fois traité par des maîtres, on a adopté le plan qui semble le mieux en rapport avec l'état actuel de la science. Si nous osions prêter à la nature des sentiments comme le faisaient nos pères, nous dirions volontiers qu'elle a horreur du repos, Rien dans l'immensité de l'univers n'est immobile. Déplacement des mondes, frémissement des atomes, tout est agitation et mouvement. La science de la nature tend donc vers la mécanique par une évolution nécessaire, le physicien ne pouvant établir de théories solides que sur les lois du mouvement. Ces lois deviennent ainsi la préface obligée d'un cours de physique. Les phénomènes de la pesanteur en fournissent immédiatement une application simple et grandiose. A l'examen des propriétés générales des corps succède l'étude des mouvements vibratoires qui constituent à proprement parler le véritable champ de la physique. Par un enchaînement rationnel, l'acoustique où ces mouve-

ments sont nettement perceptibles prépare l'optique qui con-
elle-même à la chaleur. En dernier lieu viendra l'électricité,
les connaissances acquises jusqu'à ce jour ne permettent pas
rattacher directement à ces conceptions, bien qu'il soit possible
maintenant d'y appliquer sans conteste le grand principe de
conservation de l'énergie.

L'intelligence exacte de ce principe est une des plus belles conquêtes de la science moderne. Ce serait toutefois une méthode spécieuse que de vouloir en déduire toute la physique. Sans doute pour la pratique aussi bien que pour la philosophie d'une science qui peut justement s'appeler la science des transformations de l'énergie, comme la chimie est la science des transformations de la matière, il y a grand profit à savoir établir le rapport d'équivalence entre les deux termes de chaque transformation. Mais il importe avant tout de connaître ces transformations mêmes, que l'expérience seule apprend à effectuer.

Tel est l'objet de la physique, type et modèle de la science expérimentale. Quelle que puisse être, ici comme ailleurs, l'importance de l'idée première, qui sera toujours le point de départ du chercheur, les expériences, les mesures sont les véritables instruments de la certitude.

Si, dans l'étude de la physique, rien ne supplée le laboratoire, le livre est l'auxiliaire, indiquant sur chaque question comment la science s'est faite et où elle en est. Il montre le point de départ, les difficultés de la route, le terrain déjà conquis et les positions à enlever, présente le détail des idées, ainsi que celui des faits, en plaçant à côté des expériences, des mesures et des lois empiriques qui les résument, les hypothèses qui ont guidé les inventeurs, et les théories qui s'adaptent le mieux aux phénomènes connus.

Dès qu'il s'agit de lois, et à plus forte raison de théories embrassant un certain nombre de lois, le calcul intervient nécessairement. On l'a donc employé toutes les fois qu'il a paru utile ou seu-

nent avantageux à la précision et à la clarté; mais on n'a pas blié qu'en physique le calcul n'est qu'un outil dont l'usage doit re sagement limité. On a aussi laissé de côté ces développements génieux, ces investigations savantes qui mettent en jeu toutes les ssources de l'analyse mathématique la plus élevée, mais qui n'ont : physique que le point de départ, parfois même que le nom.

Sans sortir de son domaine, le physicien n'a-t-il pas un champ l'études assez vaste et assez fécond, où peuvent se donner carrière la fois l'observation, l'imagination et le raisonnement?

OUVRAGES A CONSULTER

Traités généraux. — Lamé, *Cours de physique de l'École polytechnique*. — Pouillet, *Éléments de physique expérimentale et de météorologie*, et Müller Pouillet, *Lehrbuch der Physik und Meteorologie*. — Verdet, *Œuvres, publiées par les soins de ses élèves*. — Desains, *Leçons de physique*. — Jamin et Bouty, *Cours de physique de l'École polytechnique*. — Daguin, *Traité de physique*. — Bohn, *Ergebnisse physikalischer Forschung*. — Mousson, *Die Physik auf grundlage der Erfahrung*. — Von Lang, *Einleitung in die theoretische Physik*. — Wüllner, *Lehrbuch der Experimentalphysik*. — Brisse et André, *Cours de physique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales*. — Drion et Fernet, *Traité de physique élémentaire*, et Fernet, *Cours de physique pour la classe de mathématiques spéciales*. — Gariel et Desplats, *Physique médicale*. — Gehler, *Physikalisches Wörterbuch*. — Karsten, *Encyclopädie der Physik*. — Poggendorff, *Histoire de la physique* (traduction Bibart et de la Quesnerie).

Propriétés générales. — Galilée, *Discorsi intorno a due nuove scienze*. — Huyghens, *Horologium oscillatorium*. — Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. — Laplace, *Mécanique céleste*. — Lagrange, *Mécanique analytique*. — Poisson, *Traité de mécanique*. — Poinsot, *Statique*, et *Théorie nouvelle de la rotation des corps*. — Duhamel, *Cours de mécanique*. — Bélanger, *Traité de mécanique*. — Delaunay, *Cours de mécanique*. — Résal, *Traité de mécanique générale*. — Kirchhoff, *Vorlesungen über mathematische Physik*. — Thomson et Tait, *Treatise on natural Philosophy*. — Ditte, *Propriétés générales des corps*. — Bertrand, *Les fondateurs de l'astronomie moderne*. — Everett, *Unités et constantes physiques* (traduction Raynaud).

Solides. — Carnot, *Essai sur les machines*. — Coulomb, *Théorie des machines simples*. — Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité*. — Clebsch, *Théorie de l'élasticité* (traduction de Saint-Venant). — Frankenheim, *Die Lehre der Cohäsion*. — Beer, *Einleitung in die mathematische Theorie der Elasticität und Capillarität*.

Liquides. — Bacon, *Novum organum*. — Pascal, *Traité de l'équilibre des liquides*. — Laplace, *Théorie de l'action capillaire*. — Poisson, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*. — Gauss, *Principia theoriæ figuræ fluidorum in statu equilibrii*. — Quet, *Rapport sur les progrès de la capillarité*. — Plateau, *Statique des liquides*. — Bernoulli, *Hydrodynamica*. — Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen*.

Gaz. — Pascal, *Expériences touchant le vide*, et *Traité de la pesanteur de l'air*. — Mariotte, *Essai sur la nature de l'air*. — Regnault, *Relation des expériences sur les données des machines à feu*. — Bunsen, *Méthodes gazométriques* (traduction Schneider). — P. Bert, *La pression barométrique*.

LIVRE III

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES LIQUIDES

CHAPITRE PREMIER

COMPRESSIBILITÉ

193. Expériences anciennes. — L'état liquide idéal serait celui d'un corps parfaitement fluide et absolument incompressible. Aucune substance naturelle ne répond rigoureusement à cette définition : tout liquide éprouve à une même température des variations de volume sensibles quand la pression extérieure change; et dans les plus mobiles on constate aisément une certaine viscosité.

La première expérience sur la compressibilité des liquides est due à Bacon (¹). « Nous fîmes préparer, dit-il, une sphère de plomb creuse, qui pouvait contenir environ deux pintes, et de parois assez épaisses pour résister à une force considérable. Nous remplîmes d'eau la sphère au moyen d'un trou que nous y avions pratiqué et que nous bouchâmes ensuite avec du plomb fondu de sorte que la sphère redevînt tout à fait solide. Nous l'aplatîmes alors de deux côtés opposés en la frappant avec un lourd marteau; l'eau était ainsi nécessairement comprimée, puisque la sphère est la figure de plus grande capacité. Lorsque le marteau ne produisit

(¹) Bacon, né à Londres (Yorkhouse) en 1561, mort à Highgate en 1626; *Novum Organum*; 1620.

… cause de la résistance plus grande du liquide à …primer, nous fîmes usage d'une presse jusqu'à ce qu'… ne pouvant supporter une compression plus forte, sui… plomb solide sous forme de rosée fine. Nous calculâm… diminution de volume que la sphère avait subie p… l'aplatissement, et nous sûmes ainsi que l'eau s'était co… d'autant, ce qui d'ailleurs avait exigé un violent effort [1]. …tte expérience est ordinairement attribuée aux académicie… Florence qui ne l'exécutèrent que cinquante ans plus tard …ide d'un globe d'argent, après avoir déjà opéré avec un aut… appareil dont ils n'avaient tiré qu'un résultat négatif [2] : c'était un système de deux boules A et B pleines d'eau, réunies par un tube

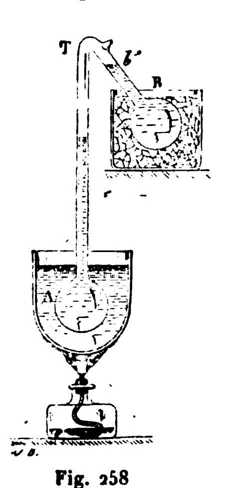


Fig. 258

étroit T contenant de l'air; en chauffant le liquide de l'une des boules A, on produisait de la vapeur qui comprimait le liquide contenu dans l'autre boule B, mais on ne voyait aucun abaissement *du niveau b'*. Il n'y a pas lieu d'insister sur la grossièreté de cet appareil qui eût aisément donné au contraire une élévation de niveau du côté froid par suite de la condensation de la vapeur.

En isolant l'eau à comprimer par une couche d'huile, on aurait

(1) *Novum Organum*, lib. II, cap. XLV, cité par Tyndall, dans la *Chaleur*, leçon V.

(2) *Saggi di naturali sperienze fatte nell' Accademia del Cimento*; cap. V. Firenze 1667.

pendant pu assez facilement reconnaître sa compressibilité qui de beaucoup supérieure à celle de la plupart des solides.

En 1761, John Canton ([1]) employa un appareil mieux conçu : tait une sorte de thermomètre à gros réservoir sphérique et à e étroite, rempli d'eau et fermé à la lampe après ébullition prongée du liquide. On brisait la pointe du tube, et l'on constait un abaissement brusque de niveau sous la pression de l'eau ntrant à l'intérieur de l'appareil. Mais comme cette pression issait en même temps sur les parois de l'enveloppe pour dilater lle-ci, l'effet observé n'était pas concluant. Canton reprit donc xpérience en plaçant son appareil sous la cloche d'une mahine pneumatique. Il fit d'abord le vide, puis ayant noté le nieau A, il cassa la pointe du tube : le liquide descendit en B; lais-

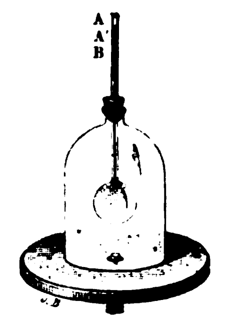


Fig. 259

sant ensuite rentrer l'air dans la cloche, il vit le liquide remonter, mais seulement jusqu'en A' au-dessous du niveau primitif. Regardant le vase comme revenu alors à son volume initial (tandis qu'en réalité sa capacité a diminué (149)), Canton en conclut que l'eau s'était comprimée (ce qui est vrai *a fortiori* avec la diminution de volume intérieur de l'enveloppe), et il fixa cette compressibilité à 0,000 046 par unité de volume et pour une pression d'une atmosphère. On n'a pas fait beaucoup mieux depuis.

Soixante ans plus tard, Jacob Perkins ([2]) exécuta sous fortes pressions des expériences qui, bien que peu précises, confirmèrent nettement la compressibilité de l'eau. Il prit d'abord un vase très

([1]) Canton, *Phil. Trans.*; 1761 et 1762.
([2]) Perkins, *Phil. Trans.*; 1820.

résistant, fermé par une soupape, et après l'avoir rempli d'eau
pesé, il l'introduisit dans un canon, également plein d'eau, dont
avait bouché la lumière, et dont la gueule était reliée à une pomp

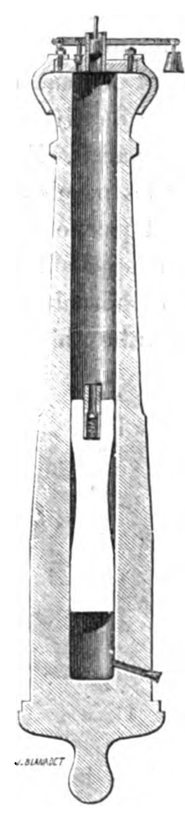


Fig. 260

En manœuvrant celle-ci, on refoulait de l'eau dans le canon sou
une pression approximativement connue. En même temps un
certaine quantité de liquide entrait dans le vase. Lorsqu'on cessai
de comprimer, la soupape se fermait et emprisonnait le liquid
intérieur. En pesant le vase à nouveau, on avait le poids de l'eau
introduite. Dans une seconde expérience, Perkins remplit d'eau
un tube métallique PP′, fermé à un bout et muni à l'autre d'une
boîte à cuir CC′. Cette boîte, serrée par un boulon à vis EE′, laissait
passer à frottement dur une tige pleine AB. Sur la tige pouvait
glisser une rondelle de cuir D que l'on plaçait d'abord contre l'ou-

rture. On introduisait le tube dans le canon et on pressait : la e s'enfonçait dans l'eau, et la rondelle, glissant sur la tige, res-

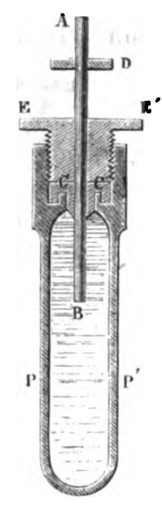


Fig. 261

tait appliquée contre le boulon. La pression supprimée, le liquide revenait à son premier volume, et la rondelle se trouvait soulevée d'une quantité qui permettait d'estimer la compression de l'eau. On opéra aussi en descendant le tube dans la mer à des profondeurs connues, ce qui donnait le moyen d'obtenir aisément des pressions considérables et exactement déterminées. Malheureusement, la manière d'évaluer la diminution de volume ne saurait inspirer aucune confiance; car, si la tige joint hermétiquement, elle obéira mal à la pression extérieure; si elle joint imparfaitement, il entrera de l'eau dans le vase pendant la compression, et il en sortira lors du retour à la pression initiale.

194. Expériences d'Œrstedt. — Œrstedt[1] entreprit d'apporter dans les mesures la rigueur nécessaire. A l'exemple de Canton, il prit un vase en forme de tube thermométrique, présentant un réservoir de grande capacité, surmonté d'un tube capillaire gradué que terminait un petit entonnoir. Cet appareil, qui a reçu le nom

[1] Œrstedt, *Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlingar*, IX ; 1822 ; et, par extraits, *Ann. de chim. et de phys.* (2), XXI, 99 ; XXII, 192 ; et XXXVIII, 326.

de *piézomètre* (πιέζω, presser), est rempli, comme un thermomè du liquide à expérimenter, au-dessus duquel on place, dans l'e tonnoir, une goutte de mercure; on le fixe ensuite sur u plaque de métal à laquelle on attache également un tube re

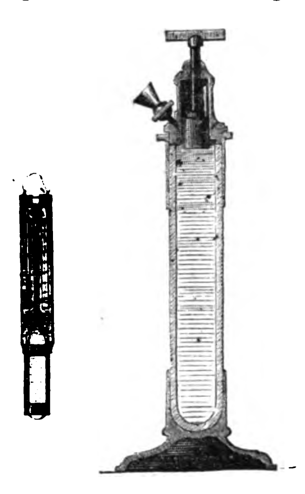


Fig. 262

versé, plein d'air, servant de manomètre, et un thermomètre. L tout est introduit dans une éprouvette en verre à parois très épais ses, munie à sa partie supérieure d'une garniture métallique. Su cette garniture on visse un corps de pompe dans lequel se meut u piston commandé par une vis surmontée d'une poignée. Une tubu lure, pourvue d'un robinet, permet de remplir d'eau l'éprouvett ainsi que le corps de pompe d'où l'air s'échappe par une petit ouverture latérale. On abaisse alors le piston; dès qu'il a dépassé l'ouverture, la pression se fait sentir, et l'index de mercure descend dans le tube capillaire. Si donc on a préalablement évalué le rapport du volume d'une division du tube à la capacité du réservoir, la position de l'index donnera immédiatement la *compressibilité apparente* du liquide pour la pression indiquée par le manomètre. Œrstedt pensait à tort que cette compressibilité apparente ne différait pas de la *compressibilité réelle*, le vase pressé intérieurement et extérieurement ne changeant pas sensiblement de volume, selon lui, si les parois sont peu épaisses. Pour vérifier cette idée, il mesura la compressibilité de l'eau dans deux piézo-

ètres de substances très inégalement extensibles, le verre et le lomb; et, ayant trouvé à très peu près le même nombre, il crut voir mis en défaut l'exactitude des déductions mathématiques 'après lesquelles la capacité intérieure aurait dû diminuer, et iminuer inégalement dans les deux cas. Son expérience prouvait implement qu'au degré de précision de ses mesures, la différence le compressibilité du verre et du plomb ne modifiait pas sensiblement la compressibilité apparente de l'eau (¹). Or ses mesures comportaient plusieurs causes d'erreur : emploi d'un manomètre très imparfait, l'eau dissolvant l'air de plus en plus à mesure que la pression s'élève; et surtout usage d'un index de mercure, dont la marche par soubresauts pendant la compression, et le non retour à la position initiale lorsqu'on supprime la pression, montrent assez les inconvénients. Un index de mercure ferme toujours mal et laisse glisser de l'eau entre le verre et le mercure. D'autre part, les ménisques extrêmes se déforment quand la pression change, et une différence notable de pression peut être équilibrée par cette déformation sans que l'index bouge : la pression croissant toujours, il finira par se déplacer; mais, ce mouvement ramenant les ménisques à leur forme première, l'index sautera, pour s'arrêter de nouveau. Les mesures n'offrent aucune sécurité.

195. Expériences de Despretz, de Colladon et Sturm, d'Aimé. — Despretz (²) atténua ces défauts de l'appareil en substituant au manomètre à eau un manomètre à mercure, et en mettant de l'air au-dessus de l'index. A cet effet, il recourba la partie supérieure du tube du piézomètre et la termina par une ampoule ouverte en bas. L'ampoule étant laissée pleine d'air, il n'y avait pas à craindre que l'eau extérieure se mêlât au liquide intérieur;

(¹) La compressibilité cubique du verre sous la pression de l'atmosphère étant environ $0,000179 \times 0,010333 = 0,0000019$, et celle du plomb à peu près $0,000579 \times 0,010333 = 0,0000059$, une erreur de 4 millionièmes dans les mesures suffisait pour faire trouver exactement la même compressibilité apparente avec les deux piézomètres. Si, au lieu d'opérer sur l'eau dont la compressibilité apparente est environ 46 millionièmes, Œrstedt eût expérimenté (avec des vases convenables) sur le mercure dont la compressibilité s'élève à peine à 2 millionièmes, il aurait certainement vu que le changement de volume de l'enveloppe n'est pas négligeable.

(²) Despretz, C. R., XXI; 1845 (Note sur des expériences exécutées en 1823).

pour plus de précaution, un peu de papier buvard était placé dans la partie supérieure de l'ampoule afin de retenir les gouttelettes

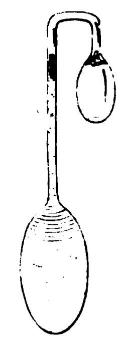


Fig. 263

qui auraient pu être projetées accidentellement, et de gêner la circulation des gaz et par suite l'évaporation. Enfin l'éprouvette contenant le piézomètre était elle-même plongée dans une grande masse d'eau froide, destinée à absorber complètement la chaleur dégagée par la compression. Cependant les résultats obtenus ne furent pas très précis. Despretz conclut que la compressibilité de tous les liquides diminue quand la pression augmente, ce qui est inexact, au moins dans les limites de pression où il a opéré. Ajoutons que, pas plus qu'Œrstedt, il ne tint compte de la variation de volume de l'enveloppe.

Cette variation de volume existe cependant, et il est manifeste que, pour obtenir la compressibilité vraie du liquide, il faut à la compressibilité apparente, telle que la fournit directement le piézomètre, ajouter la compressibilité cubique de l'enveloppe.

C'est ce que Colladon et Sturm [1] ont fait les premiers dans des recherches exécutées avec un appareil qui ne diffère pas essentiellement de celui d'Œrstedt. Le piézomètre était placé horizontalement dans un tube en verre épais, rempli et entouré d'eau; un index de sulfure de carbone séparait le liquide intérieur de l'eau du tube : bien que le frottement et la déformation des ménisques contrarient encore la marche d'un tel index, celui-ci offre du moins l'avantage d'une fermeture meilleure, le sulfure mouillant

[1] Colladon et Sturm, *Ann. de chim. et de phys.* (2), XXXVI, 113 et 225; 1827.

verre comme l'eau, dont il se distingue d'ailleurs nettement par sa grande réfringence. Colladon et Sturm supposèrent que le coefficient de compressibilité cubique k de l'enveloppe était le triple

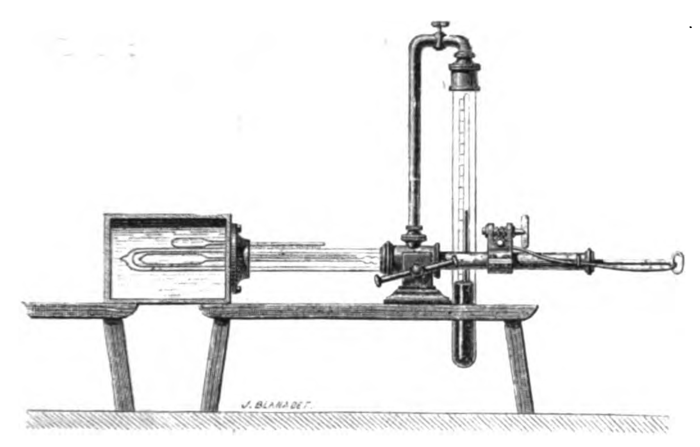


Fig. 264

du coefficient de l'allongement linéaire a observé sur une règle de la même matière, tirée dans le sens de sa longueur seulement. Cette hypothèse, qui revient à regarder σ comme égal à o (148), est certainement inexacte. D'autre part, il est toujours difficile de répondre que la matière du vase est physiquement identique à celle de la tige qui sert à mesurer a. Toutefois la plupart des liquides sont assez compressibles pour que ces imperfections n'altèrent pas sensiblement la marche générale du phénomène. Colladon et Sturm trouvèrent la compressibilité de l'eau parfaitement constante aux différentes pressions auxquelles ils la soumirent. Mais la compressibilité de l'éther leur parut nettement décroissante.

Peu après, Aimé [1] exécuta une série d'expériences avec un piézomètre fondé sur les mêmes principes, et en utilisant les pressions naturelles qui existent aux grandes profondeurs dans la mer. Il tint compte de la variation de volume du vase en prenant avec Poisson $k = \frac{3}{2}a$, mais en admettant encore pour a des valeurs mesurées sur des tiges. Ses résultats furent sensiblement d'accord avec ceux de Colladon et Sturm.

(1) Aimé, *Ann. de chim. et de phys.* (3), VIII, 257; 1843.

196. Expériences de Regnault. — Il était donc très désirable que la compressibilité de l'enveloppe fût déterminée sur l'enveloppe même. C'est ce que Regnault se proposa de faire [1]. Nous avons décrit plus haut (154) et nous reproduisons ici l'appareil qui lui servit dans ces recherches. Après avoir observé : 1° l'augmentation apparente du volume liquide lorsque le vase supporte à l'extérieur seulement une pression p, on mesure : 2° la contraction appa-

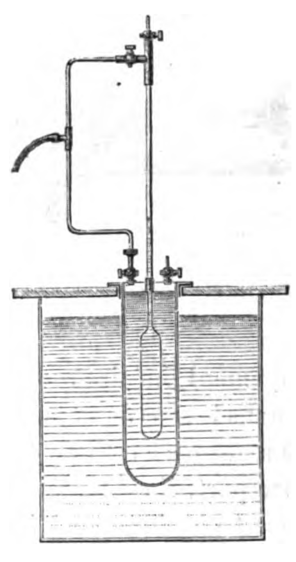


Fig. 265

rente du liquide, la même pression p s'exerçant à la fois intérieurement et extérieurement, et 3° enfin la diminution apparente du volume liquide quand la pression p n'existe qu'à l'intérieur. Appelons, avec Regnault, ω' l'augmentation apparente du volume liquide V dans la première expérience, ω'' la diminution apparente du même volume dans la deuxième, et ω la diminution apparente dans la troisième; désignons par $\varkappa$ le coefficient de compressibilité *cubique* du liquide; dans le cas d'une enveloppe sphérique, en remarquant que

$$\begin{aligned}\omega' &= \quad V\Delta v,\\ \omega'' &= -V\Delta u + \varkappa PV,\\ \omega &= \quad V\Delta w + \varkappa PV,\end{aligned}$$

[1] REGNAULT, *Mémoires de l'Académie des sciences*, XXI, 429; 1847.

nous avons (149)

$$\omega' = \quad 3\left\{\frac{1}{3\lambda+2\mu}+\frac{1}{4\mu}\right\}\frac{R'^3}{R'^3-R^3}PV,$$

$$\omega'' = -\frac{3}{3\lambda+2\mu}PV+\varkappa PV,$$

$$\omega = \quad 3\left\{\frac{1}{3\lambda+2\mu}\frac{R^3}{R'^3-R^3}+\frac{1}{4\mu}\frac{R'^3}{R'^3-R^3}\right\}PV+\varkappa PV.$$

Or

$$\omega=\omega'+\omega'';$$

cette relation, évidente *a priori*, fournit un contrôle des expériences. Restent donc les deux premières relations : nous avons vu comment la première fournit k (¹); la deuxième, qui peut s'écrire aussi

$$\omega'' = -kPV+\varkappa PV,$$

fait alors connaître $\varkappa$.

Les trois séries, dont nous avons déjà parlé (154), donnent ainsi pour l'eau, entre une et dix atmosphères, k représentant la compressibilité cubique de l'enveloppe, $\varkappa_1$ la compressibilité apparente, et $\varkappa$ la compressibilité vraie du liquide, toutes rapportées à la pression d'une atmosphère,

avec la sphère de cuivre rouge

$$\begin{array}{rr} \varkappa_1 = & 0{,}00004667 \\ k=0{,}0001196\times 0{,}010333 \quad = & 0{,}00000124 \\ \hline \varkappa = & 0{,}00004791, \end{array}$$

avec la sphère de laiton

$$\begin{array}{rr} \varkappa_1 = & 0{,}00004685 \\ k=0{,}0001105\times 0{,}010333 \quad = & 0{,}00000114 \\ \hline \varkappa = & 0{,}00004799, \end{array}$$

avec le tube cylindrique de verre

$$\begin{array}{rr} \varkappa_1 = & 0{,}00004430 \\ k=0{,}0001790\times 0{,}010333 \quad = & 0{,}00000184 \\ \hline \varkappa = & 0{,}00004614. \end{array}$$

(¹) Ce coefficient k se trouve ainsi déduit d'une double mesure, ω' et $\omega-\omega'$, de l'effet d'un accroissement p de la pression *extérieure*, tandis que ce qu'il faudrait mesurer c'est l'effet d'un accroissement p de la pression *intérieure*.

Ces nombres ne concordent pas absolument. Mais, comme le remarque Regnault, « le calcul suppose une régularité parfaite dans les enveloppes, et cette régularité est impossible à obtenir dans la construction des appareils. On s'en éloigne surtout dans le piézomètre en verre, pour lequel nous admettons que l'épaisseur de la paroi est égale en tous les points, même dans les calottes hémisphériques qui terminent le cylindre, hypothèse qui est certainement très éloignée de la vérité. Ces appareils possèdent des parties plus faibles les unes que les autres, et il en résulte nécessairement des déformations qui changent la figure du piézomètre et introduisent des anomalies dans le changement de capacité. » Avec les enveloppes sphériques en métal, formées de deux hémisphères bien travaillés et réunis par une soudure à l'argent, on obtenait sans doute plus d'égalité dans l'épaisseur, mais la sphère est loin d'être la figure la plus avantageuse. Si, en effet, il y a déformation pendant la dilatation, comme la sphère est de tous les solides de même étendue superficielle celui qui a la plus grande capacité, le changement de forme pourra entraîner une diminution véritable de capacité, bien que l'enveloppe ait subi une *extension*.

Les expériences n'ont montré aucune variation du coefficient de compressibilité avec la pression. La moyenne des résultats pour l'eau, à la température ordinaire, fut

$$\varkappa = 0,000\,047\,;$$

nous nous bornons aux chiffres dont on peut répondre (encore le dernier n'est-il pas certain à une unité près).

Regnault a également mesuré la compressibilité du mercure dans le réservoir cylindrique en verre, et il a trouvé pour la compressibilité absolue, rapportée également à la pression d'*une* atmosphère,

$$\varkappa = 0,000\,003\,5.$$

Grassi (¹), d'après la méthode de Regnault, a déterminé les

[1] Grassi, *Ann. de chim. et de phys.* (3) XXXI, 437; 1851.

oefficients de compressibilité $\varkappa$ d'un certain nombre de liquides diverses températures et sous diverses pressions P. Le tableau uivant renferme quelques-uns des résultats; la pression d'une tmosphère étant une quantité variable avec g, on a inscrit dans a dernière colonne, d'après le système C.G.S., le coefficient de ompressibilité $\varkappa'$ pour une mégadyne par centimètre carré ([1]).

Liquides.	t	P	$\varkappa$	$\varkappa'$
Eau	0°,0		0,0000502	$4,96 \times 10^{-5}$
	1 ,5		515	5,08 »
	4 ,0	3,250	499	4,92 »
	10 ,8	3,500	480	4,73 »
	18 ,0	5,340	462	4,55 »
	26 ,0		455	4,50 »
	34 ,5	6,600	453	4,47 »
	53 ,0	6,350	441	4,35 »
Éther	0 ,0	3,408	0,000111	$1,09 \times 10^{-4}$
	0 ,0	7,820	131	1,29 »
	14 ,0	1,580	140	1,38 »
	13 ,8	8,362	153	1,51 »
Esprit de bois	13 ,5		0,0000923	$9,11 \times 10^{-5}$
Alcool	7 ,3	2,302	0,0000828	8,17 »
	7 ,3	9,450	853	8,41 »
	13 ,1	1,570	904	8,92 »
	13 ,1	8,970	991	9,78 »
Chloroforme	8 ,5		0,0000625	6,17 »
	12 ,0	1,309	648	6,40 »
	12 ,5	9,200	763	7,53 »
$SO^3 + 2HO$	vers 14 ,0	6,740	0,0000242	2,39 »
$+ 3HO$	vers 14 ,0	8,970	250	2,47 »
$+ 4HO$	vers 14 ,0	5,950	271	2,67 »
$+ 5HO$	vers 14 ,0	4,870	279	2,75 »
$+ 6HO$	vers 14 ,0	8,240	283	2,79 »
$+ 10HO$	vers 14 ,0	5,460	315	3,11 »
Mercure	0 ,0		0,00000295	$2,91 \times 10^{-6}$ ([2])

Le mercure est, comme l'on voit, le moins compressible de tous ces liquides. Sa compressibilité se rapproche de celle des solides.

([1]) La pression d'une atmosphère à Paris étant $1,0136 \times 10^6$, $\varkappa' = \frac{\varkappa}{1,0136}$.

([2]) M. Everett (*loc. cit.*, p. 50) appelle *ressort de volume* le quotient de la pression par la compression, soit ici $\frac{10^6}{\varkappa'}$: d'après cette définition, le coefficient de ressort de l'eau à zéro est $2,02 \times 10^{10}$, celui du mercure à zéro $3,44 \times 10^{11}$, etc.

La variation du coefficient de compressibilité de l'eau avec la température peut s'exprimer par la formule

$$x = 0,000\,0503 + 0,000\,001\,3185\,t - 0,000\,000\,03734\,t^2.$$

Pour les autres liquides soumis à l'expérience, le coefficient de compressibilité augmente avec la température. Ce fait a été confirmé par M. Amagat [1], qui a déterminé le coefficient de compressibilité d'un assez grand nombre de liquides vers 15° et 100°.

D'après Grassi, la compressibilité de l'alcool et celle de l'éther croîtraient avec la pression ; c'est l'inverse de ce qu'avait trouvé Despretz, ainsi que Colladon et Sturm, et de ce qu'a retrouvé depuis M. Amagat.

197. Expériences de MM. Jamin, Amaury et Descamps. — Pour éliminer l'incertitude résultant de l'emploi des

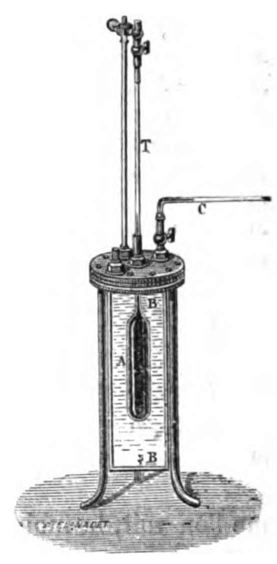


Fig. 266

formules de l'élasticité, MM. Jamin, Amaury et Descamps [2] ont cherché à mesurer directement la déformation du vase qui ren-

[1] Amagat, *Ann. de chim. et de phys.* (5), XI, 520 ; 1877.
[2] Jamin, Amaury et Descamps, C. R., LXVIII, 1564 ; 1869.

erme le liquide. A cet effet, un piézomètre A, à tige fine T, calibrée t bien jaugée, fut disposé comme dans les expériences de Regnault, vec cette modification toutefois que le réservoir B fut surmonté l'un tube C, dit *correcteur*, communiquant au dehors. On exerce à 'intérieur du piézomètre une pression déterminée, le niveau du iquide baisse dans la tige, et de cet abaissement on déduit immédiatement la compressibilité apparente. En même temps l'eau lu réservoir B avance dans le tube correcteur C, refoulée par l'agrandissement du piézomètre ; le déplacement de cette eau mesure l'augmentation du volume extérieur, laquelle ne diffère pas sensiblement de l'accroissement de la capacité intérieure de l'enveloppe, les parois étant minces. La différence entre la compressibilité apparente et cet accroissement représente la compressibilité réelle.

On a opéré depuis des pressions très faibles, à peine supérieures à la tension maximum de la vapeur de chacun des liquides employés, jusqu'à dix atmosphères. La compressibilité s'est montrée constamment proportionnelle à la pression.

La valeur du coefficient $\varkappa$ ou $\varkappa'$ résultant de toutes ces mesures fut :

Liquides.	t	$\varkappa$	$\varkappa'$
Eau distillée	15°	0,0000457	$4,51 \times 10^{-5}$
Éther	0	0,000109	$1,08 \times 10^{-4}$
	14	0,000128	1,26 »
Alcool	0	0,0000835	$8,24 \times 10^{-5}$
	15	0,0000911	8,99 »
Sulfure de carbone	14	0,0000635	6,27 »
Mercure	15	0,00000187	$1,84 \times 10^{-6}$

Ces nombres s'accordent entièrement avec ceux de Grassi, sauf pour le mercure. « Cette différence provient de ce que, le coefficient de compressibilité du mercure étant très petit, la moindre erreur dans la mesure de la correction due au changement de volume du piézomètre a une influence considérable sur le coefficient vrai, tandis que pour les autres la compressibilité étant plus grande, cette cause d'erreur se fait moins sentir. »

198. Expériences de M. Cailletet. — M. Cailletet (1) a

(1) CAILLETET, C. R., LXXV, 77 ; 1872.

opéré sous des pressions considérables. Son piézomètre, enfermé dans le tube-laboratoire en acier qui lui avait servi pour étudier la compressibilité des gaz sous plusieurs centaines d'atmosphères, recevait d'une presse hydraulique intérieurement et extérieurement une pression énergique mesurée par un manomètre Desgoffe. Une colonne de mercure s'avançait dans le tube préalablement doré du piézomètre et enlevait l'or jusqu'au point qu'elle atteignait, laissant ainsi un repère qui permettait, l'appareil une fois démonté, de mesurer la compression qu'avait éprouvée le liquide. M. Cailletet a ainsi obtenu les compressibilités apparentes x_1, inscrites au tableau ci-contre. Les nombres des deux dernières colonnes représentent les compressibilités réelles x ou x', que l'on a calculées en admettant pour la compressibilité cubique du verre la valeur 0,000 001 84 résultant des expériences de Regnault.

Liquides.	t	P	x_1	x	x'
Eau	8°	705	0,000 045 1	0,000 046 9	$4,61 \times 10^{-5}$
Éther.......	10	630	0,000 144 0	0,000 145 8	$1,44 \times 10^{-4}$
Alcool.......	9	174	0,000 067 6	0,000 069 4	6.85×10^{-5}
	9	305	701	719	7,10 »
	11	680	727	745	7,35 »
Sulf. de carbone.	8	607	0,000 098 0	0,000 099 8	9,85 »

Pour l'eau et l'éther, les nombres ainsi obtenus ne diffèrent pas de ceux que Regnault et Grassi ont trouvés sous les basses pressions. Pour l'alcool, les résultats de M. Caillet et sont plus faibles que ceux de Grassi, mais la raison en est que M. Cailletet employait un alcool de densité 0,858, c'est-à-dire assez hydraté : c'est donc entre eux qu'il faut comparer les nombres relatifs à ce liquide, et l'on voit qu'en tenant compte de l'élévation du coefficient produite par l'échauffement de 9° à 11°, on a des résultats presque identiques sous les trois pressions exercées, si différentes qu'elles soient. Le coefficient de compressibilité des liquides paraît donc être constant sur une très grande étendue de l'échelle des pressions.

CHAPITRE II

HYDROSTATIQUE

I. — PRINCIPE DE PASCAL.

199. Conséquences de la fluidité. — L'objet de l'*hydrostatique* est de déterminer les conditions d'équilibre des liquides, ou plus généralement des fluides; car les propositions qui vont être établies, reposant uniquement sur la fluidité, conviennent aux gaz aussi bien qu'aux liquides.

Dans la plupart des fluides naturels, une variation de forme sans changement de volume ne rencontre de la part des forces moléculaires qu'une résistance insensible. On supposera cette résistance nulle, en d'autres termes on supposera la *fluidité parfaite*, on déduira les conséquences de cette hypothèse, puis on les comparera avec les faits.

Cherchons donc d'abord quelles conséquences la fluidité parfaite, abstraction faite de la pesanteur, entraîne relativement à la force élastique (136), que nous appellerons plus particulièrement ici *pression*.

Direction de la pression. — La mobilité absolue du fluide exige en premier lieu que la pression sur un élément s soit normale à cet

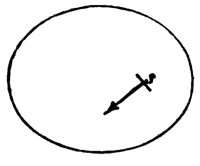


Fig. 267

élément; car, si elle était oblique, elle aurait une composante tangentielle qui ferait glisser les molécules liquides à la surface de

l'élément. On considère en effet l'élément, pris n'importe où d la masse fluide, comme solidifié : cette solidification, que l'on i gine produite sans déplacement des molécules et par la simp introduction de liaisons nouvelles ne modifiant pas l'équilibre, e l'artifice qui sera employé sans cesse pour ramener les questio d'équilibre des liquides aux règles connues de la statique d solides.

Ainsi, de la fluidité résulte ce premier principe : *la pressio sur un élément est normale à cet élément.*

Principe de Pascal. — Un deuxième principe, non moins impor tant, découle de la même propriété.

Concevons un *liquide dénué de pesanteur*, et soient à l'intérieu de ce liquide deux plans M et N et un cylindre infiniment mince, de section droite σ, découpant sur ces deux plans les éléments s et s'. Conformément à notre définition de la pression, désignons respectivement par ps et $p's'$ les pressions sur s et s'. Ces pressions sont

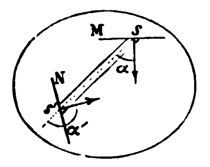


Fig. 268

normales aux éléments considérés. De plus elles sont proportionnelles aux surfaces s et s', autrement dit $p = p'$. Pour le prouver, imaginons le cylindre ss' solidifié. Nous avons alors un cylindre solide en équilibre dans un milieu absolument mobile. Les conditions ordinaires de l'équilibre d'un corps solide sont donc immédiatement applicables. En particulier, la somme des projections de toutes les forces sur l'axe du cylindre doit être nulle. Or, puisque nous faisons abstraction de la pesanteur, les seules forces qui sollicitent le cylindre sont les pressions exercées sur toute sa surface, qui peuvent se partager en deux groupes : 1° les pressions sur la surface latérale du cylindre, lesquelles étant normales à cette surface n'ont pas de composantes suivant l'axe; 2° les deux pressions ps et $p's'$ sur les deux bases, qui donnent suivant l'axe les composantes $ps \cos\alpha$ et $p's' \cos\alpha'$: α est l'angle que fait avec l'axe

la normale à l'élément s, menée suivant la direction de la pres-n sur s, et de même α' est l'angle de la normale à l'élément s' ec ss'. La condition d'équilibre suivant l'axe sera donc

$$ps \cos\alpha + p's' \cos\alpha' = 0.$$

: $s \cos\alpha$ est la section droite σ du cylindre; $s' \cos\alpha'$ (l'angle α' étant écessairement obtus si α est aigu) égale $-\sigma$. L'équation précé-nte revient ainsi à

$$p\sigma - p'\sigma = 0,$$

ı

$$p = p',$$

u encore

$$ps = p's.$$

Si donc une pression ps est exercée sur un élément s pris n'importe ù, sur la paroi par exemple, cette pression se transmet intégrale-ent sur tout élément égal, quelle que soit sa position ou son orien-ation, soit sur la paroi, soit à l'intérieur du liquide [1].

C'est le principe de la transmission des pressions, ou de l'égalité le pression (cette égalité étant entendue dans le sens que nous venons de préciser), principe dû à Pascal, qui l'a formulé en ces termes : « Si un vaisseau plein d'eau, clos de toutes parts, a deux ouvertures, l'une centuple de l'autre, en mettant à chacune un piston qui lui soit juste, un homme poussant le petit piston égalera la force de cent hommes qui pousseront celui qui est cent fois plus large, et en surmontera quatre-vingt-dix-neuf. Et quelque proportion qu'aient ces ouvertures, si les forces qu'on mettra sur les pistons sont comme les ouvertures, elles seront en équilibre [2]. »

Et Pascal inventa la presse hydraulique.

Presse hydraulique. — Réduite à sa plus simple expression, la

[1] Si les éléments s et s' étaient placés de telle sorte que la ligne ss' ne fût pas contenue tout entière dans le liquide, le raisonnement ne serait plus immé-diatement applicable. Mais, en menant entre s et s' une ligne brisée qui ne sorte pas du liquide, et en plaçant à chaque sommet de cette ligne un élément plan que l'on rattachera au précédent par un cylindre ayant pour axe le tron-çon de ligne compris entre les deux éléments, on établira une série d'égalités d'où résultera finalement l'égalité cherchée.

[2] PASCAL, au début du chapitre II du *Traité de l'équilibre des liqueurs*, publié en 1663 (un an après sa mort) chez G. Desprez, marchand-libraire à Paris.

presse hydraulique se compose de deux cylindres de diamètres très différents, A et B, dans chacun desquels peut se mouvoir un piston. Les deux corps de pompe sont reliés par un tube de communication CD. Le tout est rempli d'eau. Si l'on place un poids de 1 kilogramme sur le petit piston, il faudra pour maintenir le grand piston un poids de N kilogrammes, N étant égal au rapport $\frac{S}{s}$

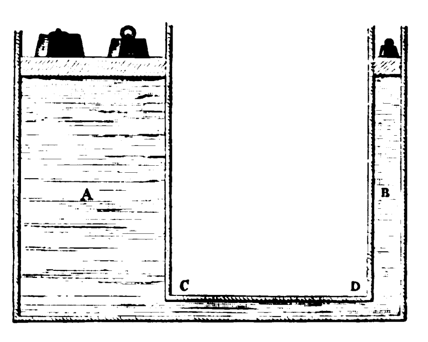


Fig. 269

des surfaces des deux pistons, ou bien on pourra produire avec le grand piston une pression de N kilogrammes. « Et l'on doit admirer, dit Pascal, qu'il se rencontre en cette machine nouvelle cet ordre constant qui se trouve en toutes les anciennes, savoir le levier, le tour, la vis sans fin, etc., qui est que le chemin est augmenté en même proportion que la force..., ce que l'on peut prendre même pour la vraie cause de cet effet [1]. »

Dans la pratique, le petit cylindre est une pompe aspirante et foulante F, qui puise de l'eau dans un réservoir extérieur et la refoule dans le grand cylindre, de manière à maintenir toujours les choses en état malgré l'ascension du grand piston. Chaque corps de pompe contient un piston plongeur ; un homme presse sur le petit piston à l'aide d'un fort levier GH : le gros piston s'élève et comprime les objets placés sur le plateau C, sous une plateforme D solidement rattachée à la base de l'appareil. Une grave difficulté toutefois arrêta longtemps les constructeurs et entrava l'usage de l'appareil : aux fortes pressions l'eau fuyait autour du

[1] Il est possible en effet de déduire toute l'hydrostatique du principe des vitesses virtuelles (68). (Voir à ce sujet MOUTIER, *Cours de Physique*. Paris. Dunod ; 1882 ; ou PELLAT, *Cours de Physique*. Paris, Dupont ; 1883.)

ros piston. Tous les moyens essayés pour remédier à ce défaut estèrent inefficaces jusqu'à ce que, en 1796, un ingénieur anglais, ramah, eût imaginé le cuir embouti, sorte d'anneau Q en cuir, à ection d'U renversé, logé dans une rainure du gros cylindre et ui serre d'autant plus énergiquement le piston que la pression levient plus forte. Le piston et le corps de pompe doivent être

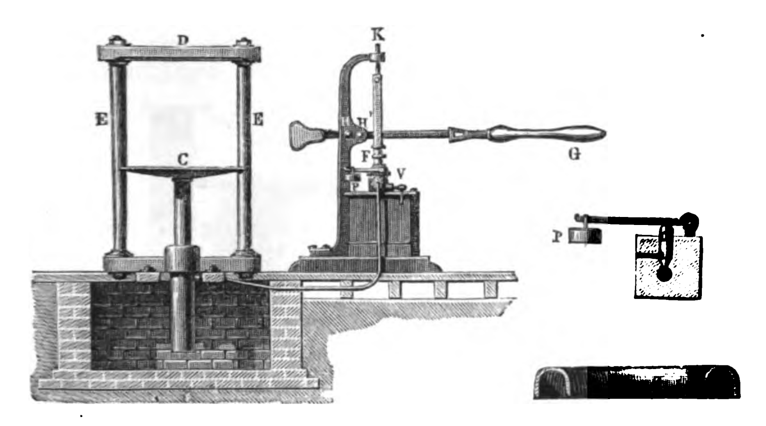


Fig. 270

alésés de telle manière que l'eau, s'introduisant dans le cuir, en écarte les deux branches, sans que cependant la branche en contact avec le piston puisse se retourner vers le haut. L'appareil porte en outre : une soupape de sûreté OP, s'ouvrant quand la pression atteint la valeur qu'il ne serait pas prudent de dépasser avec les matériaux employés; et une vis V, qu'il suffit de desserrer pour supprimer la pression et faire redescendre le gros piston.

Outre qu'une presse ainsi construite ne permet pas d'aller au delà de quelques centaines d'atmosphères, elle a l'inconvénient de donner la pression par saccades, une augmentation brusque se produisant chaque fois que la soupape de refoulement se soulève et laisse pénétrer une nouvelle quantité d'eau dans le gros corps de pompe. M. Desgoffe a récemment perfectionné la presse hydraulique au double point de vue de la régularité et de l'énergie de la pression. Il a ajouté à la partie inférieure du gros corps de pompe un piston refouleur A : ce piston est constitué par un tube d'acier traversant une boîte à cuir *mn*, et portant à son extrémité exté-

rieure un écrou B guidé de façon à progresser sans tourner quan on agit sur la vis qui le traverse. Le piston refouleur étant d'abor retiré presque complètement au dehors, on fait marcher la press comme à l'ordinaire. L'eau arrive par le tube T qui communiqu avec la pompe aspirante et foulante; le piston P monte rapidemen tandis que le corps à comprimer s'affaisse entre les plateaux C et D

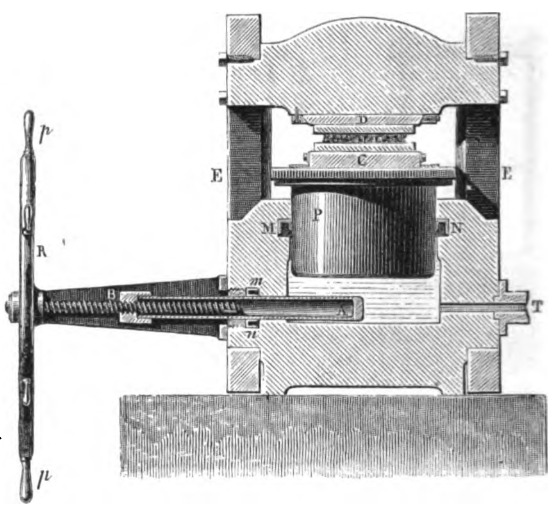


Fig. 271

Quand la marche de l'appareil commence à devenir pénible, on ferme la communication T et, agissant sur la roue R au moyen des poignées *p*, on tourne la vis de manière à enfoncer le cylindre A dans l'eau du gros corps de pompe. Le liquide n'ayant aucune issue et étant à peine compressible, il faut que le piston P se soulève, et l'on arrive ainsi aisément à des pressions de plusieurs milliers de kilogrammes. Il est inutile d'ajouter que le cuir embouti MN doit être ajusté avec le plus grand soin, et que les montants EE qui supportent la plate-forme supérieure doivent, ainsi que tout l'appareil, offrir une résistance en rapport avec la grandeur des pressions exercées. Un manomètre Desgoffe, relié au corps de pompe par un tube fin, mesure à chaque instant la pression.

Bien que la presse hydraulique soit une application immédiate du principe de Pascal, elle ne peut guère en fournir la démonstration expérimentale. Sans doute la viscosité de l'eau est à peu près

négligeable, sans doute l'action de la pesanteur sur le liquide contenu dans l'appareil est absolument nulle comparativement aux pressions que l'on produit ; mais les frottements énormes qui existent nécessairement dans un instrument de ce genre rendent impossibles les mesures exactes de pression. C'est par la vérification de ses conséquences que le principe de Pascal se démontre expérimentalement.

200. Équilibre des liquides pesants : surfaces de niveau. — Considérons donc le cas réel, le cas des liquides pesants. Le principe de Pascal reste vrai, mais à la pression provenant des forces extérieures il faut ajouter la pression due à la pesanteur. Il en résulte un effet variable avec la profondeur, mais qu'il est aisé

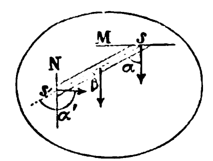


Fig. 272

d'évaluer. Pour cela, reprenons le cylindre liquide élémentaire ss', et écrivons encore qu'il y a équilibre suivant l'axe, en tenant compte cette fois du poids $l\sigma d$ du cylindre : l est la longueur ss' du cylindre, σ sa section droite, d sa densité. Soit β l'angle de la verticale avec l'axe ss', l'équation d'équilibre suivant l'axe sera

$$ps\cos\alpha + p's'\cos\alpha' + l\sigma d\cos\beta = 0 \text{ (1)},$$

ou, si l'on se rappelle que $s\cos\alpha = -s'\cos\alpha' = \sigma$, et si l'on désigne par h la différence de niveau $l\cos\beta$ des deux éléments s et s',

$$p'\sigma = p\sigma + \sigma hd,$$

ou

$$p's = ps + shd,$$

(1) Même remarque que plus haut si le cylindre ss' est interrompu par le bord du vase. On prendra alors entre s et s' autant d'éléments intermédiaires qu'il en faudra pour n'avoir qu'une série de cylindres complets. Chaque couple d'éléments réunis par un cylindre complet fournira une équation analogue à celle que nous venons d'obtenir ; en éliminant entre toutes ces équations les pressions relatives aux éléments intermédiaires, on retombera sur l'équation établie dans le cas ordinaire.

c'est-à-dire que *la différence des pressions sur deux éléments égaux pris n'importe où à l'intérieur du liquide est égale au poids de la colonne liquide qui aurait pour base l'un de ces éléments et pour hauteur leur distance verticale.*

De là plusieurs conséquences :

1° Si par un même point A du liquide nous menons deux éléments égaux, mais différemment orientés, nous avons $h = 0$, par suite $p's = ps$. Donc la *pression sur un élément est indépendante de l'orientation de cet élément.*

Cela étant, on appelle *pression en un point* A la pression p par unité de surface sur un élément quelconque mené par ce point.

Nous trouverons mainte vérification expérimentale de l'indifférence de l'orientation de l'élément relativement à la grandeur de la pression qu'il supporte, quand nous mesurerons la pression soit sur une paroi, soit sur un corps immergé.

2° *Deux éléments égaux situés sur un même plan horizontal supportent la même pression;* car on a encore alors $h = 0$, et par conséquent $p's = ps$.

La proposition, s'étendant à des surfaces finies égales, est directement vérifiable par l'expérience. Ainsi, on renverse sur l'eau un ballon à long col, dont on a fait sortir un peu d'air de manière que le liquide s'élève à une certaine hauteur dans

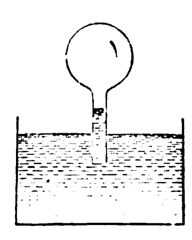


Fig. 273

le col. En enfonçant l'appareil à des profondeurs différentes, on amène l'ouverture inférieure dans des régions où la pression diffère, et l'on constate que la hauteur du liquide dans le ballon varie. Quand au contraire l'on promène l'ouverture du col dans une même tranche horizontale, cette hauteur reste absolument fixe.

Si l'on appelle *surface de niveau* une surface telle qu'en tous ses

ints la pression soit la même, on voit que dans un liquide pesant s surfaces de niveau sont planes et horizontales.

3° *La surface libre d'un liquide est plane et horizontale.* Cette oposition résulte de la précédente, puisque la surface libre est une rface de niveau. On peut aussi la conclure immédiatement de la obilité du liquide. En effet, dans un liquide parfaitement mobile résultante des forces agissant sur une molécule quelconque de surface doit être normale à la surface et dirigée vers l'intérieur, ns quoi, outre la composante normale ou pression se transmettant ans toute la masse, elle aurait une composante tangentielle qui erait glisser les molécules et troublerait l'équilibre. La surface ibre d'un liquide pesant doit donc être perpendiculaire à la direcion de la pesanteur.

La vérification de ce fait est très facile, et susceptible d'une grande précision comme nous l'avons montré (75).

Le raisonnement par lequel a été établie directement cette proposition est général; et si d'autres forces viennent s'ajouter à la pesanteur, dans tous les cas la surface libre doit être en chaque point normale à la résultante des forces qui agissent sur ce point.

Soit par exemple un liquide placé dans un vase animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe vertical. Nous savons que, dans ce cas, les conditions d'équilibre sont les mêmes

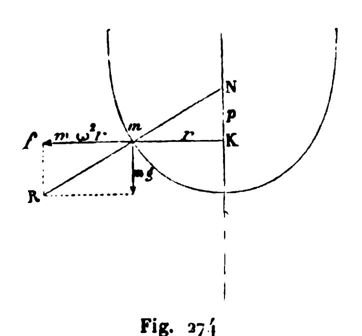


Fig. 274

que si le système était au repos et que chaque point fût sollicité par la force centrifuge. En conséquence, un point m de la surface doit être considéré comme soumis aux deux forces : mg, son poids, qui agit verticalement, et $m\omega^2 r$, la force centrifuge (52), qui agit dans le

prolongement du rayon r. La surface au point m doit être normale à la résultante de ces deux forces. Si donc on prolonge cette normale jusqu'à l'axe et qu'on représente par p la longueur NK, les triangles mKN, mfR sont semblables, et l'on a

$$\frac{p}{r}=\frac{mg}{m\omega^2 r},$$

d'où

$$p=\frac{g}{\omega^2},$$

c'est-à-dire que la sous-normale est constante. La méridienne de la surface est donc une parabole de paramètre p, d'autant plus petit que la vitesse angulaire de rotation ω est plus grande. L'expérience se réalise aisément avec l'appareil dit à force centrifuge (55) et donne des résultats en tout conformes à la théorie.

201. Vases communiquants. — Revenons au cas ordinaire d'un liquide pesant en repos. La forme du vase étant absolument indifférente, si le vase se courbe de manière à former deux vases communiquants, la surface libre sera encore plane et horizontale dans toute son étendue. En d'autres termes,

4° *Un même liquide s'élève à la même hauteur dans des vases communiquants.*

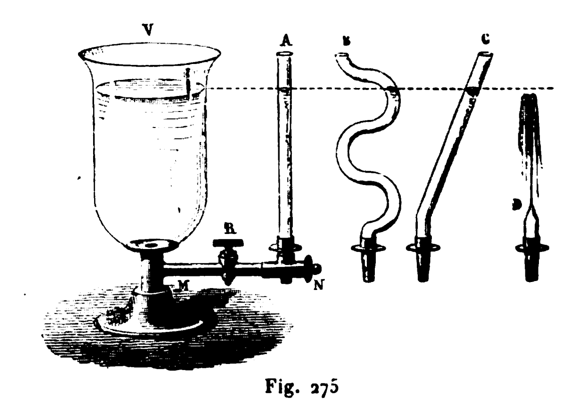


Fig. 275

Pour le vérifier on prend un grand vase V plein d'eau, et portant

ne tubulure horizontale MN munie d'un robinet R. Sur cette ubulure peuvent se fixer des vases A, B, C..., de formes diverses. Quand l'un quelconque de ces vases est tourné de telle sorte qu'un petit trou pratiqué à sa base soit dans l'axe du conduit MN et du côté M, l'égalité de niveau s'établit immédiatement, quelle que soit la forme du vase.

C'est d'après ce principe des vases communiquants qu'est construit le niveau d'eau. Les surfaces libres M et N dans les deux fioles qui communiquent par le tube V étant toujours dans un même plan horizontal, un rayon visuel mené tangentiellement à

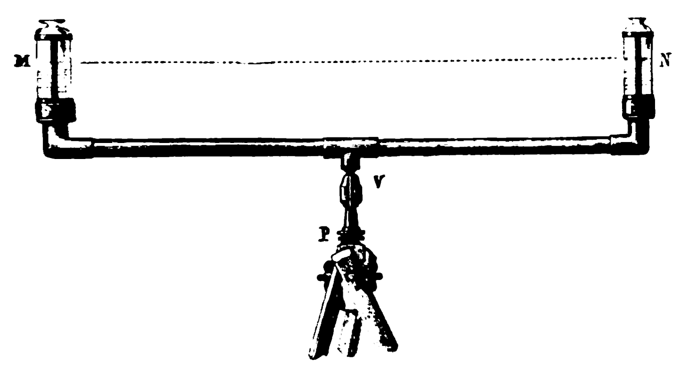


Fig. 276

ces deux surfaces sera nécessairement horizontal. Si donc on amène sur ce rayon le centre d'une mire P dressée au point B,

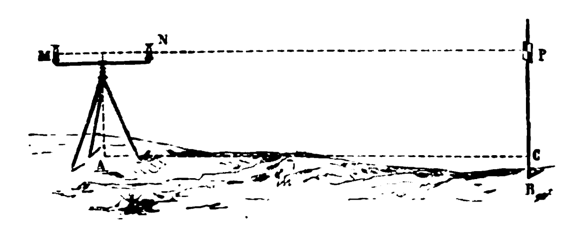


Fig. 277

la différence entre la hauteur BP de la mire au-dessus du point B et la hauteur B′P′ de la mire au-dessus d'un autre point B′

(situé de l'autre côté de A en dehors de la figure [1]), donnera la différence de niveau des points B et B'. Mais le relèvement de l'eau sur les bords des vases M et N (216) rendant la position de la ligne MN incertaine, ce procédé est peu précis, et les nivellements exacts se font au moyen du niveau à bulle d'air (209) joint à une lunette.

Le même principe rend compte de la constance du niveau dans les puits qui communiquent avec de grandes nappes d'eau souterraines, de la production des jets d'eau au moyen de réservoirs suffisamment élevés, de l'ascension de l'eau dans les puits artésiens [2], dont la partie inférieure vient rencontrer une nappe inclinée comprise entre deux couches imperméables [3], etc.

202. Liquides superposés. — De l'horizontalité des couches de niveau dans un liquide en équilibre résultent encore les conditions d'équilibre de plusieurs liquides superposés.

5° *Deux liquides non miscibles étant superposés, leur surface de séparation doit être plane et horizontale.* Considérons en effet deux surfaces de niveau situées l'une entièrement dans le liquide inférieur, l'autre entièrement dans le liquide supérieur. Chacune de ces surfaces est plane et horizontale; et si nous prenons sur la surface inférieure MN deux éléments égaux s_1 et s_2, ces deux élé-

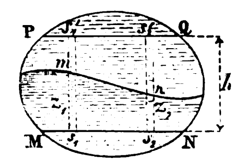


Fig. 278

[1] Il n'est pas nécessaire que B' soit dans le plan vertical BA, car le plan horizontal déterminé par les surfaces libres de l'eau dans les deux fioles ne sera pas altéré par une rotation du niveau sur lui-même, pourvu que l'eau ne quitte aucune des deux fioles.

[2] Les puits forés étaient connus des anciens Égyptiens. On en voit en Chine qui remontent à la plus haute antiquité ; et, de temps immémorial, les habitants du Sahara savent les percer de main d'homme. En France, le plus anciennement connu existait dans l'Artois, en 1125; vers la même époque il y en avait à Modène, d'où le nom de puits modénais que leur donnent les Italiens.

[3] Il est à remarquer toutefois que dans les puits artésiens l'eau ne remonte jamais jusqu'au niveau du point d'affleurement de la couche perméable aqui-

:nts supportent des pressions égales. Or la pression sur l'élé-
:nt s_1 est égale à la pression en s'_1 dans le plan PQ, soit ps_1,
gmentée du poids de la colonne liquide $s'_1 s_1$,

$$s_1 z_1 d + s_1 (h - z_1) d',$$

et $(h - z_1)$ étant les hauteurs des tronçons, de densités d et d', qui
nstituent la colonne $s_1 s'_1$. Sur l'élément $s_2 = s_1$ la pression est
;ale à la pression en s'_2, laquelle est ps_1 comme en s'_1, augmentée du
oids de la colonne liquide $s'_2 s_2$,

$$s_1 z_2 d + s_1 (h - z_2) d',$$

z_2 et $(h - z_2)$ étant les hauteurs respectives des deux liquides dans
$s_2 s'_2$. Ces pressions étant égales, on doit avoir

$$z_1 d + (h - z_1) d' = z_2 d + (h - z_2) d',$$

ou

$$(z_2 - z_1)(d - d') = 0,$$

et, comme d est différent de d',

$$z_2 = z_1.$$

Les éléments m et n de la surface de séparation doivent être à la même distance du plan horizontal MN : la surface de séparation doit être plane et horizontale.

fère. Cela tient à ce que dans une nappe souterraine le liquide a réellement toujours un mouvement lent, en relation avec la pente des couches perméables, et qui ne permet pas d'appliquer les lois relatives à l'état de repos. De plus, la distance entre le point d'affleurement de la couche et le puits est souvent considérable, et sur ce long parcours le liquide subit des frottements énormes. Ainsi la nappe d'eau qui alimente le puits de Grenelle, profond de 527 mètres, imbibe une couche sableuse qui affleure à la surface du sol à Lusigny près de Troyes ; la cote de Lusigny est de 130 mètres, celle de Grenelle n'est que de 31 mètres. Sans doute le point où l'Aube s'infiltre à Lusigny est un peu au-dessous de 130 mètres. Toutefois l'eau ne s'élève en réalité à Grenelle qu'à 37 mètres au-dessus du sol. On voit combien est considérable l'influence des deux causes indiquées.

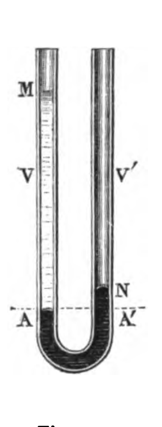
6° Si les deux liquides sont dans deux vases différents V et V réunis par un canal de communication, la surface de séparatio AA′ est encore horizontale, et, puisque la pression doit être même en tous les points d'une surface de niveau, quelle que soit l forme du vase, on aura, en écrivant cette égalité pour les points et A′,

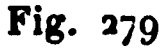
$$hd = h'd',$$

ou

$$\frac{h}{h'} = \frac{d}{d'};$$

c'est-à-dire que les *hauteurs des deux liquides au-dessus de la sur face de séparation sont en raison inverse de leurs densités*. C'est c




Fig. 279

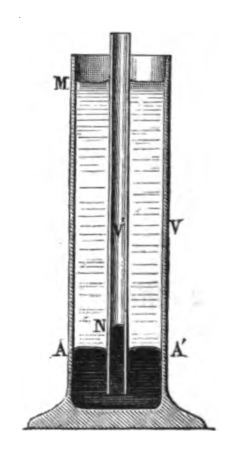


Fig. 280

que l'on peut aisément vérifier au moyen de l'un ou l'autre des deux appareils représentés par les figures 279 et 280.

203. Pression sur une surface à l'intérieur d'un liquide. — 7° *La pression sur un élément s, situé à une profondeur h dans le liquide, est shd* (abstraction faite de la pression atmosphérique qui se transmet intégralement dans toute la masse).

Sur la surface libre, en effet, la pression est zéro (si l'on néglige la pression atmosphérique) ; en s elle est donc $o + shd$ ou shd.

La proposition étant vraie pour une surface horizontale finie.

peut la vérifier expérimentalement. On se servira de l'appa-
l ci-contre qui consiste en un large tube de verre dont l'ex-
mité inférieure a été soigneusement rodée : un obturateur de
re mince *ab* peut s'appliquer exactement contre cette extré-
té et fermer le tube. L'obturateur étant en place et soutenu par
e ficelle, on enfonce le tout dans l'eau. Si alors on lâche la
elle, l'obturateur reste adhérent en vertu de la pression qu'il subit
bas en haut; et pour le séparer il faut verser de l'eau dans le
be jusqu'au niveau de la surface libre dans le vase. Quand ce ni-

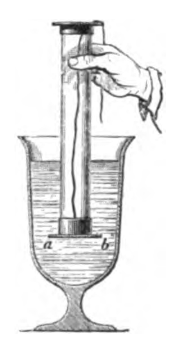


Fig. 281

veau est atteint, l'obturateur se détache par son poids et tombe au fond du vase (on amortit la chute au moyen de la ficelle). Ainsi la pression de bas en haut sur la surface *ab*, laquelle est égale à la pression de haut en bas sur la même surface, a bien pour valeur le poids d'une colonne liquide de base *ab* et de hauteur *h*.

8° *Pression sur le fond d'un vase.* — On en déduit immédiatement

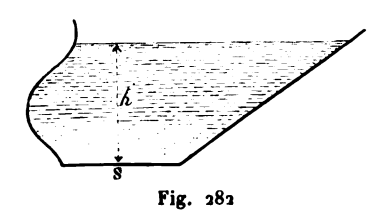


Fig. 282

la pression sur le fond d'un vase, ce fond étant supposé plat et horizontal. *La pression sur le fond d'un vase est égale au poids* S*hd*

d'une colonne cylindrique de liquide ayant pour base le fond S *du vase et pour hauteur la hauteur h du liquide dans le vase.*

Pour le vérifier, Pascal prenait des vases de formes très différentes : « l'un tel que celui de la première figure, l'autre penché comme en la seconde, l'autre fort large comme en la troisième, l'autre étroit comme en la quatrième, l'autre qui ne soit qu'un petit tuyau élargi par le bas comme en la cinquième figure ; il les remplissait tous d'eau jusqu'à la même hauteur, et faisait à tous des ouvertures

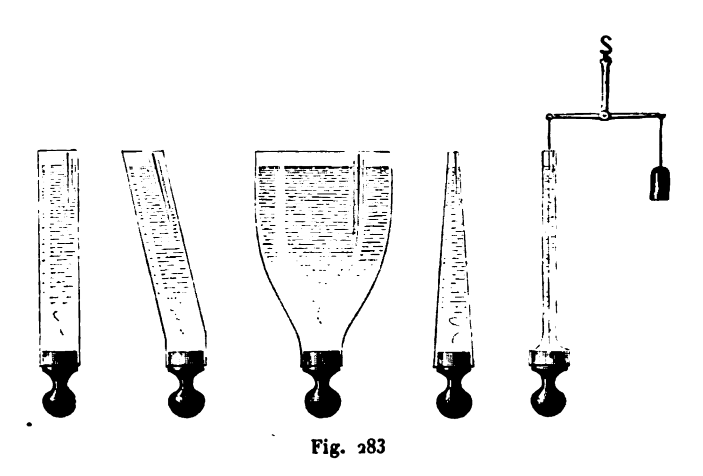


Fig. 283

pareilles par en bas, lesquelles on bouchait au moyen de tampons ou de pistons ; on devait employer une pareille force pour empêcher tous ces tampons de sortir. »

Masson remplaça le piston par un obturateur de verre. Son appareil se compose d'un obturateur MN attaché par un fil T à l'une des extrémités P du fléau d'une balance hydrostatique. On nomme ainsi une balance (fig. 296) spécialement destinée aux expériences d'hydrostatique, et dont le fléau repose sur la partie supérieure d'une règle verticale taillée en crémaillère qu'un pignon permet d'élever ou d'abaisser dans la colonne centrale ; un cliquet empêche le fléau de redescendre de lui-même. Sur l'obturateur MN peuvent s'appliquer successivement les extrémités inférieures parfaitement égales de trois vases A, B, C, de formes complètement différentes. Pour mettre un vase en expérience, le vase A par exemple, on le visse sur une bague mé-

lique portée par un pied solide, on y introduit le cordon au
ut duquel on attache l'obturateur; on établit l'équilibre avec
la tare placée dans le plateau de l'autre côté. On soulève le
au à l'aide de la crémaillère et du pignon de la balance,
squ'à ce que l'obturateur s'applique sans effort sous le fond du
se. On met alors un poids (soit 1 kilogramme) dans le pla-
au, et on verse de l'eau dans le vase, jusqu'à ce que l'obturateur
détache. A cet instant on note le niveau au moyen d'un index
, mobile le long d'une tige fixée au pied de l'appareil. Puis, vi-
ant le vase A, on lui substitue le vase B, et enfin le vase C, et dans
haque cas on constate que, pour détacher l'obturateur, le poids de

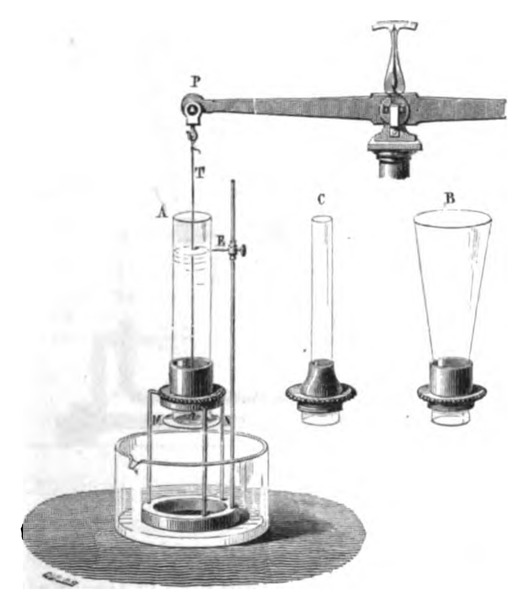


Fig. 284

1 kilogramme étant resté dans le plateau de droite, il faut verser de l'eau jusqu'à la même hauteur E. En mesurant en outre le poids de l'eau contenue dans le vase cylindrique, on peut vérifier, au moins approximativement, que ce poids (ici 1 kilogramme) est égal au produit de la surface utile de l'obturateur par la hauteur commune de l'eau dans les trois vases.

De Haldat a imaginé un appareil d'un usage plus commode, mais

donnant une démonstration moins directe que celui de Pascal. C
un tube en verre MNPQ, deux fois recourbé et terminé en M p
une monture en fonte sur laquelle peuvent se visser des vases d
formes différentes A,B,C. On introduit du mercure dans le tub
recourbé, on visse l'un des vases et l'on y verse de l'eau jusqu'à u
niveau déterminé que l'on marque au moyen d'une tige d'affleure
ment *t* fixée à l'appareil. Le fond du vase est ici constitué par la sur
face de séparation de l'eau et du mercure. La pression exercée su
ce fond amène une dénivellation du mercure, lequel s'élève dan
le tube Q jusqu'à une certaine hauteur H que l'on note exactemen
avec une petite bague glissant sur le tube. On fait écouler l'eau pa

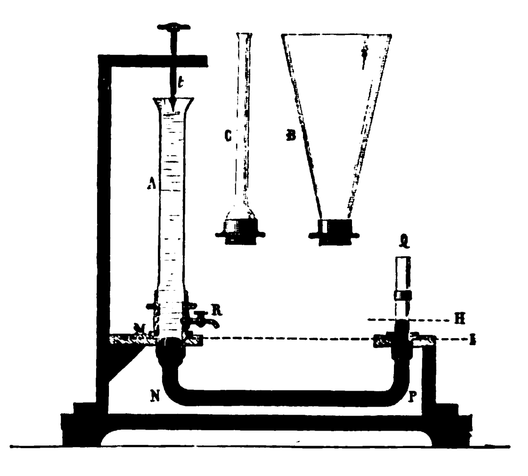


Fig. 285

le robinet R ; on enlève le premier vase, on le remplace par un second
où l'on verse de l'eau jusqu'à la pointe de la tige d'affleurement, et
l'on voit dans l'autre branche le mercure remonter exactement jus-
qu'à la bague. Du moment que le mercure a repris ainsi sa hauteur
primitive dans le tube de verre, évidemment de l'autre côté la sur-
face de séparation de l'eau et du mercure s'est rétablie à la même
place, que les tubes soient cylindriques ou non ; par suite, le fond du
vase est redevenu le même, et la hauteur également ; et puisque la
dénivellation IH est identique, c'est que la cause qui l'a produite,
c'est-à-dire la pression sur le fond du vase, est aussi la même.

Pour montrer que « les liqueurs pèsent suivant leur hauteur »,

cal avait encore institué une expérience frappante. Un tonneau n d'eau étant surmonté d'un tube long et étroit, la faible quan-



Fig. 286

tité d'eau qui suffisait à remplir ce tube produisait une pression assez forte pour faire éclater le tonneau.

9° *Pression sur une paroi plane.* — Connaissant la valeur *shd* de la pression sur un élément quelconque, nous pouvons chercher la pression sur une portion quelconque de la paroi.

Considérons d'abord une paroi plane, limitée par un contour ABC quelconque. Décomposons la paroi en éléments infiniment petits, et soit z la distance verticale de l'élément s à la surface: cet élément est pressé normalement par une force szd. La surface entière est ainsi pressée par un système de forces parallèles; il y a donc une résultante unique, dont la grandeur et le point d'application se détermineront aisément.

Pour avoir la grandeur de cette résultante, c'est-à-dire la pres-

sion sur la paroi AB, il suffit de faire la somme de toutes les composantes parallèles szd. On a donc

$$Q = \Sigma szd = d\Sigma sz = SZd,$$

S étant l'aire AB, et Z la distance verticale du centre de gravité g de cette aire à la surface du liquide. Ainsi, *la pression d'un liquide sur une paroi plane complètement immergée est égale au poids d'une colonne de ce liquide ayant pour base la paroi et pour hauteur la distance verticale de son centre de gravité à la surface libre.*

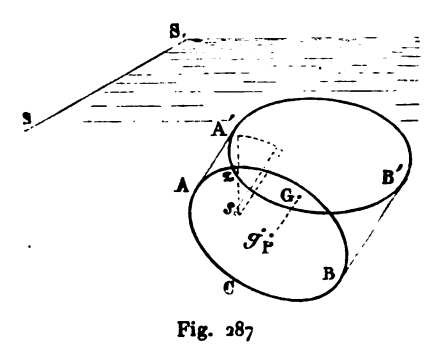


Fig. 287

Quant au point d'application de la résultante, ou *centre de pression*, on voit d'abord immédiatement qu'il est toujours au-dessous du centre de gravité; car, si les éléments s sont tous égaux, le centre de gravité est le centre de forces parallèles égales, tandis que le centre de pression est le centre de forces parallèles croissant avec la profondeur. On le calculera d'ailleurs, comme tout centre de forces parallèles, au moyen du théorème des moments. En prenant les moments successivement par rapport à chacun des plans coordonnés, on aura pour les coordonnées x_1, y_1, z_1, du centre de pression P

$$x_1 = \frac{\Sigma szx}{SZ}, \quad y_1 = \frac{\Sigma szy}{SZ}, \quad z_1 = \frac{\Sigma sz^2}{SZ}.$$

Il sera souvent plus simple de procéder géométriquement. Représentons la pression sur chaque élément par un cylindre droit liquide de hauteur z. Les bases supérieures de tous ces cylindres

nentaires se trouveront dans un même plan A'B' passant par tersection SS_1 de la surface libre et du plan de la paroi AB, de te que la pression totale sera figurée par un tronc de prisme A'B', circonscrit à la paroi AB et limité au plan en question. Or tronc de prisme sera toujours aisé à construire, et puisque la roi est pressée en réalité comme elle le serait par le poids de ce onc, en déterminant le centre de gravité G du tronc et en le protant sur la paroi AB, on aura le centre de pression P. La valeur ème de cette pression ne serait autre que le poids du tronc; le éorème cité plus haut la donne très simplement en tous cas.

Prenons quelques exemples.

Soit un rectangle ayant l'un de ses côtés AB placé horizontaement à la surface libre du liquide. Menons en CD des perpendi-

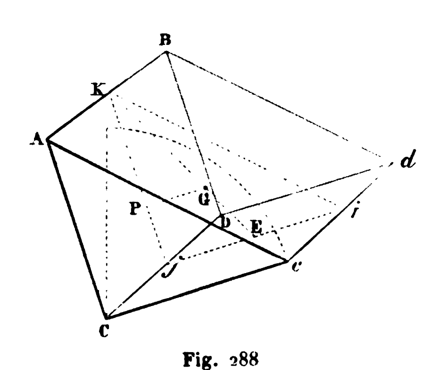


Fig. 288

culaires Cc et Dd à la surface du rectangle, égales à la distance verticale de ces points à la surface libre, joignons cd, et conduisons un plan par AB et cd: nous avons le plan qui limite le tronc, lequel se trouve ainsi être un prisme triangulaire de poids $\frac{AB \times AC \times Cc}{2} \times d$; et si l'on projette sur ABCD le centre de gravité G de ce prisme, on obtient en P le centre de pression. Donc le centre de pression est sur la ligne Kj joignant les milieux des côtés horizontaux, et aux $\frac{2}{3}$ de cette ligne à partir du point K.

Si l'on a un triangle ABC dont un sommet A affleure la surface, et dont le côté opposé BC soit horizontal, le plan limitant est

*bc*A, le tronc est une pyramide à base rectangulaire, et le centre de

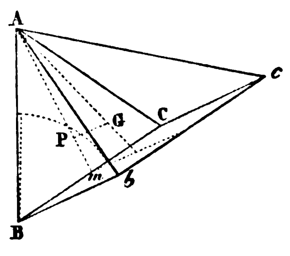


Fig. 289

pression tombe en P sur la médiane A*m*, et aux $\frac{3}{4}$ de cette médiane à partir de A.

Si le même triangle était placé de telle manière que AB fût couché horizontalement sur la surface du liquide, le tronc serait un

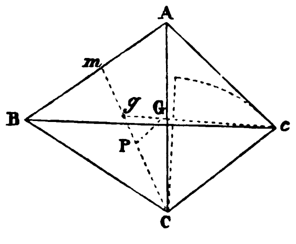


Fig. 290

tétraèdre *c*ABC. Le centre de gravité du tétraèdre est sur la droite *cg* joignant le sommet *c* au centre de gravité *g* de ABC, et aux $\frac{3}{4}$ de *cg* à partir du point *c*. Sa projection P sur le plan ABC sera donc sur la médiane C*m*, à une distance CP de C égale aux $\frac{3}{4}$ de C*g*, ou à une distance CP de C égale aux $\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire à la $\frac{1}{2}$ de C*m*. Telle sera alors la position du centre de pression.

Pressions sur une paroi courbe. — Si la paroi est courbe, les pressions ne sont plus en général réductibles à une seule force, parce qu'elles cessent d'être parallèles.

Mais il se rencontre un cas où, quelle que soit la forme des parois, il y a toujours une résultante unique; c'est le cas où l'on considère la somme des pressions exercées par le liquide sur *toute* la portion de paroi qu'il mouille.

o° *Somme des pressions sur les parois d'un vase.* — Prenons trois s rectangulaires, les axes des x et des y étant situés sur la face même du liquide et l'axe des z étant dirigé vers le bas.

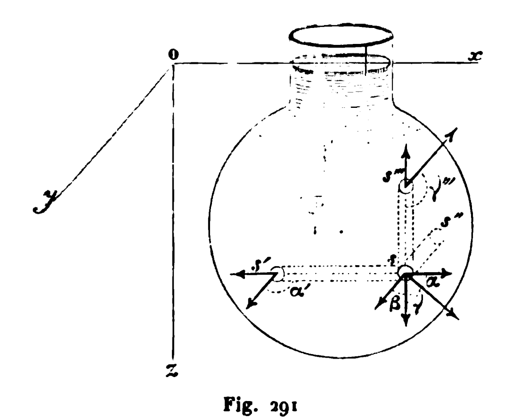


Fig. 291

oit s un élément de la paroi; szd est la pression sur cet élément, ression normale à l'élément. Décomposons-la en trois forces parallèles aux axes coordonnés

$$szd\cos\alpha,\qquad szd\cos\beta,\qquad szd\cos\gamma,$$

α,β,γ étant les angles de la normale à la surface avec les axes.

Par le contour de l'élément s conduisons un cylindre parallèle à l'axe des x. Ce cylindre découpe sur la partie opposée de la paroi un élément s' sur lequel la pression est $s'zd$, et par suite la composante de la pression suivant Ox est $s'zd\cos\alpha'$, α' étant l'angle que fait la normale à la surface avec l'axe des x. Mais $s\cos\alpha = -s'\cos\alpha' = \sigma$, c'est-à-dire la section droite du cylindre ss'. Donc, les éléments s et s' étant supposés invariablement liés entre eux par la résistance de la paroi, les composantes suivant l'axe des x se détruisent.

Il en est de même des composantes suivant l'axe des y, puisqu'il existe toujours un élément s'' sur lequel la composante de la pression parallèle à oy est égale et de signe contraire à $szd\cos y$.

Menons enfin par s un cylindre ss''' parallèle à l'axe des z; ce

cylindre découpe sur la paroi (ou sur la surface libre du liquide) un élément s''' sur lequel la pression est

$$s''' z_1 d,$$

z_1 étant la distance de s''' au niveau du liquide. La composante verticale de cette pression est

$$s''' z_1 d \cos\gamma'''.$$

Or $s''' \cos\gamma''' = -s \cos\gamma$; on a donc pour la résultante de deux composantes verticales

$$\sigma'''(z - z_1)d,$$

σ''' étant la section droite du cylindre ss'''. Cette résultante est égale au poids du liquide contenu dans le cylindre ss'''. Si l'on fait la somme des pressions supportées par tous les éléments s, en ayant soin de remplacer chaque pression par ses trois composantes, toutes les composantes horizontales se détruiront, et il restera un système de composantes verticales se groupant deux par deux en une force verticale égale au poids d'un cylindre tel que ss'''. Toutes ces forces parallèles ont une résultante unique, égale au poids du liquide contenu dans le vase.

Sans doute ce résultat était évident à l'avance. Cependant la démonstration qui précède n'est pas inutile. Premièrement, elle nous fournit une confirmation indirecte mais absolument précise de la valeur shd de la pression sur un élément. En second lieu, elle montre le mécanisme par suite duquel la pression sur l'ensemble des parois est toujours égale au poids du liquide contenu dans le vase, tandis que la pression sur le fond seul du vase peut être beaucoup plus grande, ou généralement très différente. Il y a là, en effet, une sorte de contradiction apparente, célèbre sous le nom de *paradoxe hydrostatique*, et que l'analyse précédente réduit à néant.

Dans un vase contenant un liquide, les pressions horizontales se détruisent deux à deux, d'où l'équilibre. Mais si l'on enlève une portion de la paroi, si par conséquent on supprime la pression qui s'exerçait sur cette portion, la pression sur la paroi opposée fera

ntir son effet, et l'équilibre sera détruit. On s'explique ainsi

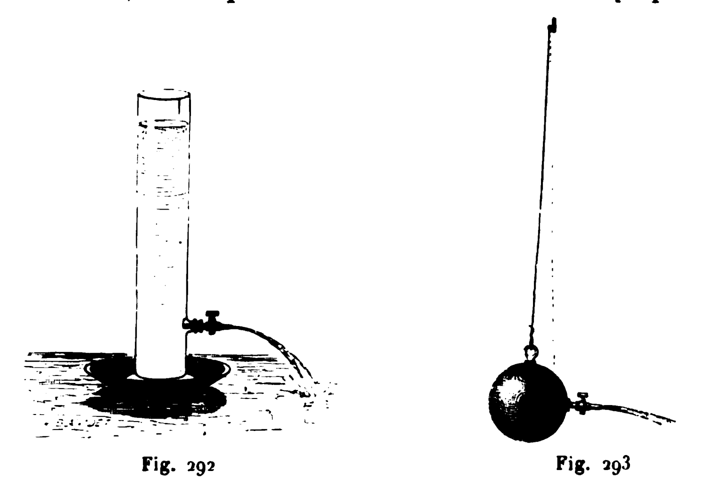


Fig. 292 Fig. 293

le recul du chariot ou du *flotteur à réaction*, le relèvement du

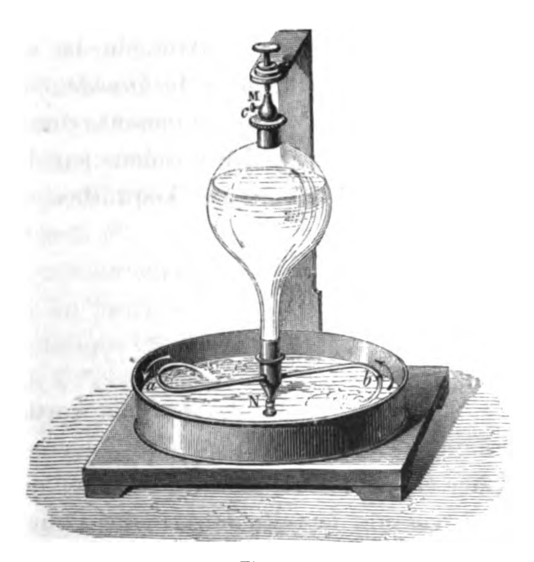


Fig. 294

pendule *hydraulique*, la rotation du *tourniquet hydraulique* [1];

[1] On construit très simplement un tourniquet hydraulique au moyen d'un siphon en verre, dont on recourbe à angle droit l'extrémité de la grande branche et dont on engage la petite branche sur une tige fixée verticalement dans un vase plein d'eau. Aussitôt qu'il est amorcé, le siphon se met à tourner autour de son axe (Rousseau, *Catalogue des instruments de l'Université de Bruxelles à l'Exposition nationale de* 1880)

si toutefois on se rend aisément compte du sens du phénomèn il faut remarquer que, le liquide étant en mouvement, la grai deur de la force agissante ne saurait être déduite de ce qui pré cède. Nous verrons plus loin qu'elle est égale à celle que pro duirait au repos une hauteur de liquide sensiblement double d celle qui agit ici.

II. — PRINCIPE D'ARCHIMÈDE.

204. Poussée éprouvée par les corps immergés. — Quand un corps est plongé dans l'eau, chaque élément de la surface du corps supporte une pression normale *shd*, dirigée du liquide vers le corps. La surface entière est donc soumise à un système de forces qu'une analyse identique à la précédente (203) nous montre se composer en une force unique, la *poussée*, égale au poids du liquide déplacé, dirigée verticalement de bas en haut, et appliquée au centre de gravité de la masse liquide déplacée. C'est le fameux *principe d'Archimède*, dont on peut également se rendre compte synthétiquement, comme l'indiqua Stevin (1). Dans le liquide en équilibre isolons par la pensée une masse quelconque M, et solidifions-la : l'équilibre subsiste. Cette

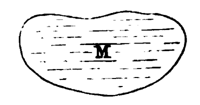


Fig. 295

masse M supporte : 1° son poids P, appliqué verticalement en son centre de gravité G ; 2° les pressions p qui s'exercent normalement sur sa surface entière. Or, quand un corps solide est en équilibre, toutes les forces qui le sollicitent, moins l'une quelconque d'entre elles, ont une résultante unique, égale et opposée à la force laissée arbitrairement à part. Donc, ici toutes les pressions p doivent avoir une résultante unique, égale et opposée au poids P de la masse M. Soit Q cette résultante appliquée en G. Remplaçons maintenant la masse M par un corps solide quelconque de même forme,

(1) STEVIN, né à Bruges en 1548, mort à Leyde en 1620; *Œuvres mathématiques*. Leyde ; 1634.

s pressions p resteront identiquement les mêmes : elles se com-
)seront donc encore en une force unique Q, la poussée, égale et
: signe contraire au poids de la masse liquide déplacée.

D'après une tradition généralement répandue dans l'antiquité (¹), ıais qui n'en est pas plus certaine, Archimède (287-217 av. J.-C.) écouvrit ce principe en cherchant à résoudre un problème que lui vait posé Hiéron, roi de Syracuse. Celui-ci voulait offrir à Jupiter ne couronne d'or. L'orfèvre chargé d'exécuter le travail dérobe ıne certaine quantité d'or qu'il remplace par de l'argent. Hiéron 'apprend ; il demande à Archimède, son parent, de constater la raude sans détruire un objet consacré. Archimède y pense sans cesse lorsque, tout à coup, étant au bain, il découvre la solution et, saisi d'enthousiasme, se précipite tout nu dans la rue en s'écriant : εὕρηκα, εὕρηκα, j'ai trouvé, j'ai trouvé ! Quoi qu'il en soit de cette légende, Archimède nous a laissé un *Traité des corps flottants* où il établit le principe qui porte son nom, ainsi que les conditions d'équilibre des corps flottants. Cette deuxième partie de l'ouvrage est « l'un des plus beaux monuments du génie d'Archimède » (²) et jusqu'à ces derniers temps on n'y a rien ajouté. Quant à la première, les démonstrations d'Archimède ont été au contraire considérablement perfectionnées par l'introduction du principe fondamental de Pascal (³).

Il est aisé de vérifier expérimentalement le principe d'Archimède. Ordinairement on procède de la manière suivante : on prend une balance hydrostatique (203) ; sous l'un des plateaux A on suspend superposés l'un à l'autre : 1° un cylindre creux et vide en laiton C ; 2° un cylindre plein en laiton D, dont le volume extérieur est exactement égal à la capacité intérieure du cylindre C. On équilibre le système avec de la tare mise dans l'autre plateau B ; on abaisse le fléau de la balance jusqu'à ce que le cylindre D vienne plonger dans de l'eau placée au-dessous en V. Dès que le cylindre D pénètre dans le liquide, la poussée se fait sentir, et l'équilibre est rompu ;

(¹) Vitruve, *De architectura*, lib. IX, 3.

(²) Lagrange, *Mécanique analytique* (édition Bertrand), I, 168.

(³) Voir à ce sujet Thurot, *Recherches historiques sur le principe d'Archimède*, dans la *Revue archéologique*, XVIII, XIX et XX. D'Alméida a analysé sommairement ce travail dans le *Journal de physique*, I, 46 ; 1872.

plus on descend, plus le plateau B l'emporte. Mais, si à l'aide d'u
pipette on verse de l'eau en C, on constate que l'équilibre est rétab

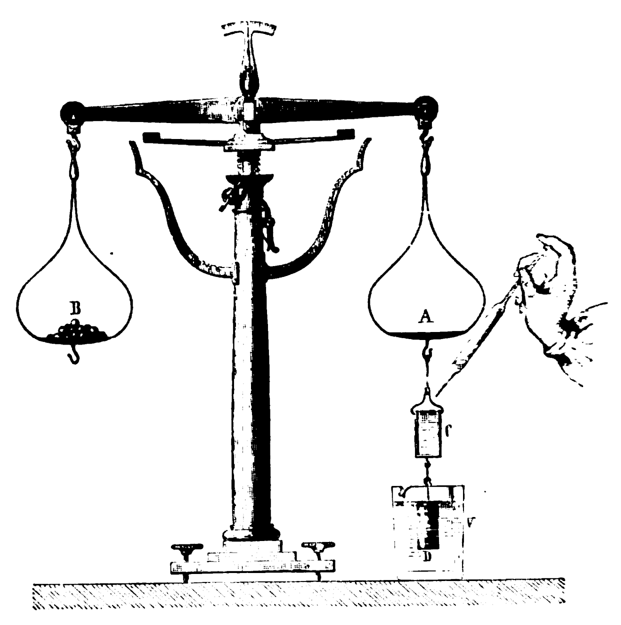


Fig. 296

lorsque, le cylindre D étant complètement immergé, le cylindre C est exactement rempli.

D'autres appareils ont été proposés (¹). Nous nous en tiendrons à celui-là. Mais nous indiquerons encore une expérience intéressante que l'on peut faire avec les deux cylindres.

205. Réaction du corps sur le liquide. — Un vase plein d'eau V étant placé dans l'un des plateaux A d'une balance et l'équilibre établi avec de la tare mise dans l'autre plateau, on descend dans le vase V le cylindre plein D soutenu par un fil. La balance s'infléchit du côté de A, et pour rétablir l'équilibre il faut, D étant entièrement immergé sans toucher le fond, enlever du vase V assez d'eau pour remplir exactement le cylindre creux C.

(¹) Voir en particulier Sire, *Ann. de chim. et de phys.* (5), II, 253; 1874; et Boudréaux, *Journal de physique*, IV, 85; 1875.

nsi l'immersion du cylindre D a produit sur le plateau A le même et que si l'on avait ajouté dans le vase V un volume d'eau préément égal à celui du cylindre.

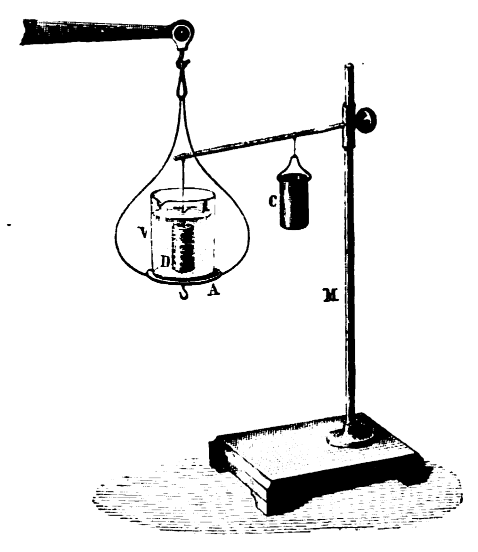


Fig. 297

Il doit évidemment en être ainsi, puisque la somme des pressions sur les parois du vase ne changera pas si nous solidifions une partie quelconque D de la masse, et pas davantage si nous remplaçons la portion solidifiée par un corps quelconque de même volume, soutenu artificiellement au sein du liquide.

On peut aussi remarquer qu'à toute pression du liquide sur une portion quelconque de la surface du cylindre correspond une réaction égale et de signe contraire du solide sur le liquide, de sorte que la réaction totale du cylindre sur le liquide doit être égale et opposée à la poussée qu'éprouve ce cylindre, c'est-à-dire égale au poids du liquide déplacé.

Enfin on présente quelquefois ce raisonnement sous une forme un peu différente qui a l'avantage d'enchaîner étroitement tous ces faits. Lorsque le cylindre D est immergé, la somme des pressions exercées par l'eau du vase V sur toute la surface solide qu'elle touche (surface du vase V et surface du cylindre D) est égale au poids de cette eau (203); d'autre part, les pressions sur la surface du cylin-

dre D se composent en une poussée définie par le principe d'Archimède (204), d'où il suit que la pression sur les parois du vase V égale au poids de l'eau moins cette poussée, c'est-à-dire au poids de l'eau augmenté du poids d'un volume d'eau égal à celui du corps.

Ainsi, quand un corps solide plonge dans un liquide, tout se passe *comme si* le corps perdait une partie de son poids égale au poids de la masse liquide déplacée, tandis que, par contre, le liquide semble gagner ce que le corps paraît perdre.

206. Conséquences du principe d'Archimède. — Principe des corps flottants. — Examinons maintenant les conséquences du principe d'Archimède.

Soit en premier lieu un corps complètement plongé dans l'eau, ou plus généralement dans un fluide quelconque. Il peut être considéré comme soumis à l'action de deux forces : 1° son poids P, ap-

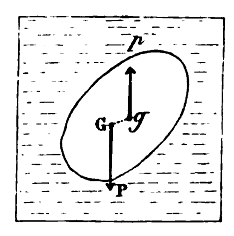


Fig. 298

pliqué en son centre de gravité G; 2° la pression p, appliquée au centre de gravité g de la masse liquide déplacée. Ces forces donnent en général un couple $p, -p$ et une force $P - p$.

L'effet du couple sera de faire tourner le corps sur lui-même jusqu'à ce que les deux points G et g se trouvent sur une même droite, parallèle à la direction commune des forces $p, -p$; si donc le corps est parfaitement mobile, il tournera à l'intérieur du liquide de telle sorte que le centre de gravité et le centre de poussée se placent sur une même verticale, le centre de gravité en bas.

La force $P - p$ est le *poids apparent* du solide dans le liquide; et l'on voit qu'il y a trois cas à considérer :

$P > p$. Le corps, plus lourd qu'un égal volume du fluide, est soumis à une force qui tend à le faire tomber verticalement. Si

›nc il est libre, en même temps qu'il tournera sur lui-même en ›rtu de l'action du couple, il descendra d'un mouvement qui, la sistance du fluide négligée, serait uniformément accéléré.

$P = p$. La force est nulle : le corps tourne sur lui-même jus-ı'à ce que le couple soit nul, et reste en équilibre au sein du quide.

$P < p$. Le corps monte vers la surface (d'un mouvement unifor-ıément accéléré, abstraction faite des résistances), et il émerge en artie jusqu'à ce que le poids du liquide déplacé devienne égal à on propre poids. Après quelques oscillations dues à la vitesse ıcquise, cette condition est remplie, et le corps *flotte* à la surface lu liquide.

Ces trois cas peuvent aisément se montrer avec un œuf que l'on plonge successivement dans de l'eau ordinaire (premier cas), dans de l'eau saturée de sel marin (troisième cas), et enfin dans un mélange convenable d'eau salée et d'eau ordinaire (1) (deuxième cas).

On peut aussi faire l'expérience avec le *ludion* ou *diable de Descartes*.

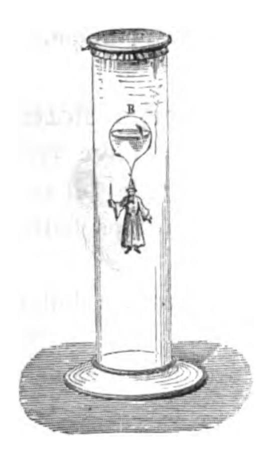


Fig. 299

La condition d'équilibre à laquelle nous sommes arrivés dans le troisième cas porte le nom de *principe des corps flottants* et s'énonce

(1) En versant l'eau salée au fond de l'éprouvette et l'eau ordinaire par dessus, on formera un liquide hétérogène dans lequel l'œuf se tiendra nécessairement en suspension à un certain niveau.

ainsi : *Quand un corps flotte en équilibre à la surface d'un liquide, le poids du liquide déplacé est égal au poids du corps.*

Il est, sinon très nécessaire, du moins très facile de vérifier expérimentalement ce principe. Prenons avec M. Boudréaux un vase de verre, muni d'une tubulure latérale ; remplissons-le d'eau : l'excès du liquide sort par la tubulure; attendons que la dernière goutte soit tombée, et introduisons dans le vase une grosse sphère creuse

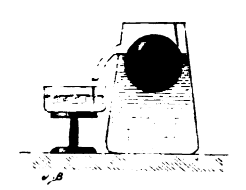


Fig. 300

en laiton qui se met à flotter sur le liquide, dont elle refoule un certain volume : de l'eau s'écoule par la tubulure. Recevons-la jusqu'à la dernière goutte dans une capsule préalablement tarée, et nous constaterons que le poids de cette eau est égal au poids de la sphère; ce qui démontre le principe.

207. Équilibre des corps flottants. — Au principe précédent, qui exprime que la force agissante est nulle, il faut joindre la condition que le couple soit aussi nul. Par conséquent, les conditions d'équilibre des corps flottants sont au nombre de deux :

1° Le poids du liquide déplacé doit être égal au poids du corps.

2° Le centre de gravité et le centre de poussée doivent être sur une même verticale.

Ces deux conditions déterminent complètement dans chaque cas le *plan de flottaison*, c'est-à-dire le plan qui à l'intérieur du corps continue la surface libre du liquide sur lequel il flotte. Soient en effet V le volume et D la densité du corps supposé homogène, v le volume de liquide déplacé et d la densité de ce liquide, la première condition est

$$VD = vd,$$

ı, si l'on appelle μ le rapport $\frac{D}{d}$,

$$\frac{v}{V}=\mu;$$

insi, la première condition que le plan de flottaison doit remplir est de partager le corps en deux parties v et $V-v$, dont le rapport $\frac{\mu}{1-\mu}$ est connu. La deuxième condition, à savoir que les centres de gravité de ces deux parties soient sur une même perpendiculaire au plan, achève de le déterminer.

Lorsque le corps homogène présente un axe de symétrie (solide de révolution, prisme, etc.), et que cet axe se tient verticalement pendant la flottaison, la question se réduit à partager le volume par un plan perpendiculaire à l'axe en deux parties qui soient dans le rapport donné.

Si le corps a la forme d'un prisme à arêtes horizontales, les volumes V et v étant dans le rapport des sections droites du prisme entier et de la partie immergée, il suffit de considérer ces sections droites.

Soit, par exemple, un prisme droit triangulaire flottant à la surface de l'eau, un seul sommet étant immergé. Soient ABC la section

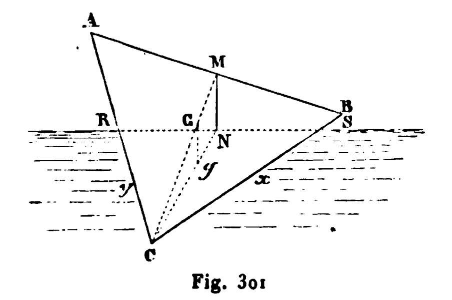


Fig. 301

droite de ce prisme, RS la trace du plan de flottaison, et x, y les deux segments immergés des côtés a et b, on doit avoir d'abord

$$\frac{xy}{ab}=\mu. \qquad (1)$$

Si nous prenons pour axes CB et CA, les coordonnées du point N milieu de la ligne de flottaison RS, sont $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}$, et l'équation (1) exprime que ce point N doit être sur l'hyperbole

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}=\frac{1}{4}\mu ab. \tag{1)'$$

De plus, comme cette hyperbole a pour asymptotes CA et CB, et que NR = NS, la droite NS est tangente à l'hyperbole en N. Ainsi, la première condition signifie géométriquement que la ligne de flottaison doit être tangente à l'hyperbole (1)'. La deuxième condition, que les centres de gravité G et g soient sur une même perpendiculaire à RS, équivaut à celle-ci que la ligne MN, joignant le milieu M du côté c au milieu N de la ligne de flottaison, soit perpendiculaire à RS; en d'autres termes, MN doit être normale à l'hyperbole (1)', ce qui se traduit par

$$\text{MR}=\text{MS},$$

ou, si l'on pose $\text{CM}=l$, $\text{BCM}=\alpha$, $\text{ACM}=\beta$,

$$x^2+l^2-2lx\cos\alpha=y^2+l^2-2ly\cos\beta; \tag{2}$$

donc la deuxième condition assujettit le point N à se trouver sur une deuxième hyperbole

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}-\frac{l}{2}(x\cos\alpha-y\cos\beta)=0. \tag{2)'$$

La solution de la question revient donc à la recherche de l'intersection des deux hyperboles (1)' et (2)', lesquelles se coupent généralement en quatre points. De ces quatre points, deux au moins sont toujours réels, l'un à coordonnées positives, qui ne convient qu'autant que ses coordonnées $\frac{x}{2}$ et $\frac{y}{2}$ sont respectivement plus petites que $\frac{a}{2}$ et $\frac{b}{2}$, et l'autre à coordonnées négatives, qui est en dehors de la question. Si les deux autres points d'intersection sont

els, ils ont leurs coordonnées positives, mais ils ne conviennent ıcore que sous la même condition que x soit $< a$ et $y > b$. Tou s rapports se voient aisément et se traduisent par des équations us ou moins compliquées, mais dont l'énoncé devient très simple ıand le triangle est équilatéral. Il y a alors trois positions d'équibre (pour le seul sommet C en bas et seul immergé) lorsque μ st compris entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$.

Pour traiter complètement la question, il faudrait maintenant lacer en bas successivement chacun des deux autres sommets, puis xaminer les trois cas où chacun des sommets resterait seul dehors; t comme le cas de deux sommets immergés ne diffère algébriquement de celui d'un seul sommet que par le changement de μ en $1-\mu$, on voit qu'il y aurait pour un seul prisme dix-huit positions d'équilibre possibles à considérer.

Il resterait enfin à examiner pour chacune d'elles la question de stabilité ou d'instabilité, ce qui complique encore singulièrement le problème.

La stabilité d'un corps flottant, comme généralement celle de tout corps en équilibre, dépend du potentiel total des forces qui sollicitent le corps. Pour que l'équilibre soit stable, il faut que ce potentiel soit minimum (70). D'où les conclusions suivantes (¹) :

1° L'équilibre sera toujours stable lorsque le centre de gravité du corps se trouvera au-dessous de celui du liquide déplacé.

2° L'équilibre sera encore stable lorsque le centre de gravité du corps sera au-dessus de celui du liquide, si la distance de ces deux points est plus petite que le plus petit des moments d'inertie de l'aire de la section à fleur d'eau par rapport à son centre de gravité, divisé par le volume immergé.

Si le corps a un plan vertical de symétrie, plan contenant nécessairement G et g, et si de plus la droite Gg passe par le centre de gravité de la section à fleur d'eau, mais dans ce cas seulement, la condition précédente revient à la *règle de Bouguer :*

Donnez au corps un dérangement infiniment petit qui n'altère point le volume déplacé, marquez le point M où la nouvelle poussée

(¹) Résal, *loc. cit.*, II, 183.

p rencontre la ligne G*g*; si ce point, ou *métacentre*, est au-dessus du centre de gravité du corps, l'équilibre est stable. Si le méta-

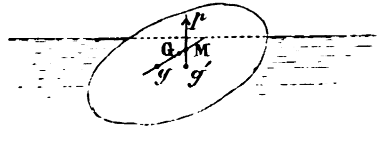


Fig. 302

centre est au-dessous du centre de gravité, l'équilibre est instable il est indifférent si les deux points coïncident.

En appliquant cette règle, on verra aisément qu'une sphère homogène flottant à la surface d'un liquide est en équilibre indifférent; si elle est hétérogène, son équilibre est stable ou instable suivant que son centre de gravité est au-dessous ou au-dessus du centre de figure, lequel dans tous les cas est le métacentre.

Enfin, quelle que soit la forme du corps flottant, il résulte de ce qui précède qu'on pourra toujours obtenir une bonne flottaison en abaissant suffisamment le centre de gravité. De là l'utilité du *lest*.

208. Équilibre des liquides superposés. — Nous avons vu que la surface de séparation de deux liquides superposés doit être plane et horizontale. Cette condition est suffisante pour qu'il y ait équilibre; mais la stabilité de l'équilibre exige de plus que le liquide le plus lourd soit en bas. Si, en effet, une petite masse du liquide le plus lourd passe dans le liquide le plus léger, elle tombe au fond de ce liquide; et si inversement une certaine quantité du liquide plus léger passe dans le liquide le plus lourd, la poussée la fait monter jusqu'à la surface de ce dernier. Le raisonnement s'appliquera à un nombre quelconque de liquides.

Cette superposition des liquides par ordre de densité se montre dans les cours au moyen de la *fiole des quatre éléments*. C'est une fiole contenant quatre liquides non miscibles, mercure, dissolution concentrée de carbonate de potasse, alcool, et huile de pétrole; on agite : tout se brouille, mais bientôt les quatre liquides se séparent

quatre tranches horizontales, placées de bas en haut dans ordre où nous les avons cités.

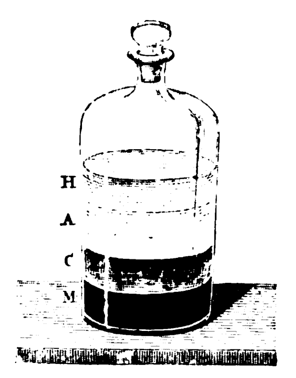


Fig. 303

La nature nous offre à l'embouchure des fleuves une superposition de l'eau douce à l'eau salée par suite de laquelle le fleuve semble souvent se prolonger assez loin dans la mer. Tout le monde sait que l'on peut imiter ce phénomène en faisant flotter du vin sur de l'eau. Mais tout le monde sait aussi qu'indépendamment du mélange par agitation, il se produit toujours à la longue, même dans un repos parfait, une pénétration réciproque des deux liquides, qui n'est autre chose que la diffusion.

209. Niveau à bulle d'air. — Le niveau à bulle d'air, inventé par Hooke en 1656 ([1]), se compose d'un tube légèrement courbe, fermé à ses deux bouts, et rempli d'alcool ou d'éther emprisonnant

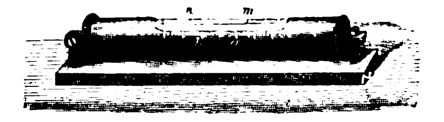


Fig. 304

une bulle gazeuse *mn* qui d'elle-même se loge à la partie la plus haute du tube. L'arête supérieure de ce tube porte deux repères correspondant aux extrémités de la bulle, ou mieux une division complète en parties d'égale longueur, le zéro étant au milieu

([1]) Poggendorff, *Geschichte der Physik*, 565. Leipzig; 1879.

du tube. Cette arête doit avoir une courbure exactement circulaire. Tout tube de verre affecte déjà, par suite de sa fabrication même, une faible courbure qu'il s'agit donc seulement de régulariser en lui donnant le rayon voulu : on y arrive aisément avec un mandrin en laiton de forme convenable, qu'on recouvre d'émeri imbibé d'huile. Après avoir été ainsi travaillée, la fiole est remplie, essayée comme nous l'indiquerons plus loin, puis graduée le long de l'arête qui présente la meilleure courbure, et enfin fermée définitivement. On la fixe alors dans un tube de laiton, évidé de façon à la laisser voir sur la plus grande partie de sa longueur; et ce tube lui-même est assujetti à une monture, sur laquelle on peut le faire basculer autour d'un axe horizontal passant par une de ses extrémités, au moyen d'une vis verticale fixée à l'autre extrémité.

Le niveau à bulle d'air permet d'exécuter les trois opérations suivantes :

1° Rendre un axe ou un plan horizontal;

2° Mesurer l'inclinaison d'une droite donnée ;

3° Rendre un axe vertical.

1° Quand le niveau doit s'appliquer sur un axe horizontal ou faiblement incliné à l'horizon, il est porté par deux fourchettes pouvant s'adapter à deux tourillons de même diamètre, ainsi qu'on l'a vu dans la description du cathétomètre (112). Nous avons dit alors la manière de procéder pour rendre l'axe horizontal et en même temps régler le niveau (1).

(1) Le déplacement de la bulle peut en général se déduire, avec une précision suffisante, d'une simple lecture sur une extrémité déterminée, à chaque position du niveau. Mais, si le niveau est très sensible, il sera préférable de faire dans les deux positions à 180° une double lecture. On lira donc chaque fois aux deux extrémités de la bulle et on prendra le quart de la somme algébrique des quatre lectures affectées de signes convenables (positives à droite par exemple et négatives à gauche) ; ce nombre indiquera en divisions du niveau la quantité dont il faut relever l'axe, indépendamment des petits changements qu'a pu éprouver la longueur de la bulle pendant les opérations. On ne s'assujettira plus alors à partir de la position normale de la bulle au milieu du tube, ce qui serait difficile à réaliser exactement avec un niveau très-sensible, la règle précédente donnant toujours exactement la quantité dont on doit relever l'axe. On fera ensuite la correction du niveau en modifiant son inclinaison jusqu'à ce que les lectures dans la deuxième position (après retournement) soient l'une diminuée, l'autre augmentée du quart de la différence entre la somme algébrique des deux dernières lectures et la somme algébrique des deux premières (Voir Brunnow, *Traité d'astronomie pratique*, édité en français par André, chez Gauthier-Villars ; 1872 ; p. 10).

Quand le niveau doit servir à rendre un plan horizontal, sa onture présente une base plane que l'on place sur une droite elconque du plan. Si le plan repose sur trois vis calantes, on mmence par disposer le niveau parallèlement à la direction s têtes de deux des vis calantes, et procédant par retournement, exactement comme dans le cas précédent, on rend cette rection horizontale : les deux vis calantes parallèlement auxuelles on opère suffisent à cet effet, tandis que la vis du niveau ermet en même temps de régler celui-ci. Ce double résultat obenu, on place le niveau sur une droite sensiblement perpendicuaire à la première. Puis, agissant seulement sur la troisième vis du plan, sans toucher au niveau puisqu'il est réglé, on amène cette droite à être horizontale. Le plan est alors horizontal ; ou du moins il le serait si la deuxième opération n'avait pas altéré le résultat de la première, ce qui aura lieu le plus souvent. Mais, en recommençant méthodiquement les manœuvres dans le même ordre, on serrera de plus en plus l'approximation, et on arrivera assez rapidement à ce que la bulle reste entre ses repères, quelque position que l'on donne au niveau sur le plan [1].

2° Pour mesurer avec le niveau l'inclinaison d'un axe ou de la ligne de plus grande pente d'un plan faiblement incliné à l'horizon, il faut connaître la valeur angulaire en minutes d'une division du niveau. On fait aisément cette détermination, en même temps que

[1] On construit des niveaux sphériques qui ont l'avantage de montrer par une seule indication l'horizontalité d'un plan dans toutes les directions. Le

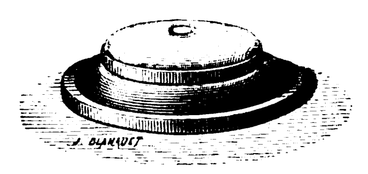


Fig. 305

liquide est enfermé dans une boîte métallique circulaire, fermée en haut par une glace plane en dessus et concave en dessous suivant une courbure exactement sphérique. On a laissé une bulle d'air qui, lorsque la base est horizontale (le niveau étant réglé), vient se loger au sommet de la calotte sphérique, à l'intérieur d'un petit cercle tracé sur la glace. Ces niveaux sont commodes pour un réglage rapide, comme il suffit dans le cas d'une balance, d'un galvanomètre, etc.

la vérification de l'instrument, en plaçant le niveau sur la ligne de plus grande pente d'un plan dont on peut modifier à volonté et de quantités connues l'inclinaison sur l'horizon. Il suffit pour cela que ce plan PP soit mobile autour d'un axe horizontal AB et reçoive

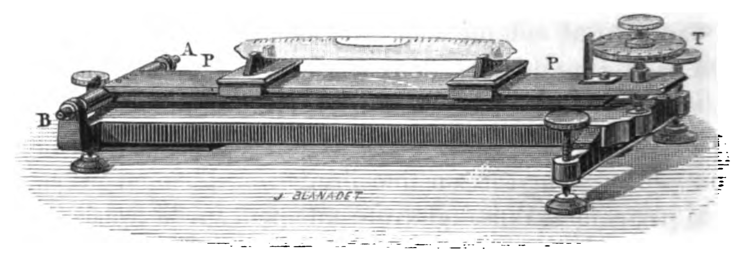


Fig. 306

son mouvement d'une vis micrométrique verticale, munie d'un tambour gradué T. Une série de mouvements égaux de la vis du *comparateur de niveau* doit amener des déplacements égaux de la bulle si la courbure du niveau est bien circulaire; et la valeur angulaire d'une division sera

$$206\,265 \frac{p}{dT} \frac{t}{n}:$$

t est le nombre de divisions du tambour correspondant à n divisions du niveau, p est le pas de la vis, T est le nombre de divisions marquées sur le tambour, d la distance de l'axe de la vis à l'axe horizontal de rotation, de sorte que $\frac{p}{dT}$ est la tangente de l'angle, ou l'angle dont varie l'inclinaison du plan pour un déplacement de la vis correspondant à une division du tambour, et par suite $206\,265 \frac{p}{dT}$ est la valeur même de cet angle en secondes.

3° Enfin le niveau à bulle d'air sert à rendre un axe vertical, ainsi que nous l'avons expliqué à propos du cathétomètre.

III. — POIDS SPÉCIFIQUES.

210. Mesure du poids spécifique d'un corps. — On appelle *poids spécifique* d'un corps le poids de ce corps sous l'unité

volume. Pour déterminer le poids spécifique d'un corps il faut mesurer :

1° Le poids;

2° Le volume.

Le poids P se mesure par double pesée.

Quant au volume V, on peut l'obtenir de différentes manières, squelles distinguent entre elles les diverses méthodes d'évaation du poids spécifique.

Le plus ordinairement on cherche le poids d'un égal volume 'eau à son maximum de densité. Pour l'eau, en effet, dans le ystème métrique, le poids est numériquement égal au volume 4° (1). Plus généralement, dans un système quelconque de meures, le *poids spécifique absolu* p d'un corps est lié à la *densité absolue* (masse de l'unité de volume) d par la relation fondamentale

$$p = dg.$$

Pour l'eau

$$p_a = d_a g.$$

Si donc, conformément à l'usage universel, on rapporte les poids spécifiques à celui de l'eau pris pour unité, le *poids spécifique relatif* $\frac{p}{p_a}$ est encore le rapport des poids de volumes égaux du corps et de l'eau. Ce rapport, indépendant de g, est le même en tous lieux, et il est égal à la *densité relative* $\frac{d}{d_a}$.

Pour ces valeurs relatives, les seules que l'on considère ordinairement dans la pratique, on emploiera donc indifféremment les expressions de *densité* ou de *poids spécifique*. Ainsi l'équation $p = \frac{P}{V}$, qui définit le poids spécifique, s'écrit habituellement

$$P = Vd,$$

(1) Cependant, comme le kilogramme des archives n'est pas rigoureusement conforme à sa définition théorique, puisqu'il est inférieur de 0,000013 environ au poids d'un litre d'eau à son maximum de densité, le poids de 1 décimètre cube d'un corps quelconque (évalué comme tout poids par comparaison avec le kilogramme) sera de 0,000013 supérieur au rapport du poids de 1 décimètre cube du corps au poids de 1 litre d'eau à 4°. Mais la différence, portant seulement sur le cinquième chiffre significatif que l'expérience atteint difficilement, sera en général absolument négligeable.

formule d'une application immédiate dans le système métriqu
P est le poids en grammes d'un corps dont le volume est V ce
timètres cubes et la densité *d*.

Le poids d'un volume d'eau égal à celui du corps peut se m
surer de plusieurs façons.

211. Poids spécifique d'un solide. — Considérons d'abor
les corps solides; on peut suivre :

1° Le procédé de la balance hydrostatique;

2° Le procédé de l'aréomètre;

3° Le procédé du flacon.

1° *Balance hydrostatique.* — Le premier procédé est une appli
cation immédiate du principe d'Archimède. On attache le corps pa
un fil fin sous l'un des plateaux de la balance hydrostatique, on me
de la tare dans l'autre plateau de manière à établir l'équilibre; o

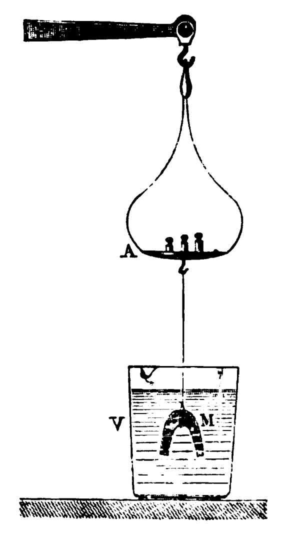


Fig. 307

enlève le corps, on le remplace par des poids marqués, π. On a
ainsi le poids du corps, abstraction faite de l'influence de l'air dans
lequel on opère. On ôte les poids, on remet le corps et on le fait
plonger dans l'eau (s'il est plus léger que l'eau, on le tient immergé au moyen d'une petite capsule percée de trous et qui reste
dans l'eau pendant toute la durée de l'opération); l'équilibre est

ou. Pour le rétablir il faut mettre des poids π' du côté du corps :
t la densité brute, laquelle devra subir certaines corrections
nous examinerons ultérieurement. Ce procédé est rapide : on
deux doubles pesées avec seulement trois pesées simples. Le
ut est le fil qui subit de la part de l'eau une poussée hydro-
ique et une attraction capillaire qu'il est difficile de maintenir
stantes. Toutefois en employant un fil de platine très fin, re-
vert d'une légère couche de noir de fumée qui l'empêche d'être
uillé par l'eau, et toujours immergé d'une quantité connue, on
it avoir des résultats précis. En tous cas, il est bon de prendre
corps et l'eau à une température que l'on notera, afin de pou-
r ensuite en tenir compte, comme il sera dit plus loin.

2° *Aréomètre*. — Le deuxième procédé ne diffère du premier que
r l'emploi d'une balance spéciale, l'aréomètre (ἀραιός, subtil).
n appelle ainsi un flotteur, lesté au bas et terminé en haut par

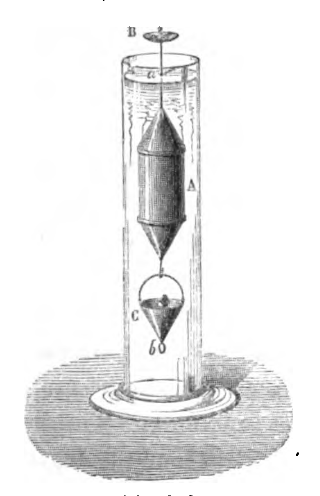


Fig. 308

une tige qui sort en partie du liquide : le point où s'établit l'affleurement dépend de la charge que porte l'appareil et aussi du liquide dans lequel il plonge. Très anciennement connu [1]

[1] Attribué par les uns à Archimède, par les autres à Hypatie (fille de Théon : philosophe et mathématicienne. Alexandrie ; 370 (?)-415), il était certainement en usage chez les apothicaires du IVe siècle de l'ère chrétienne (GERLAND, *Wied. Ann.*, I ; 1877).

sous le nom de baryllium (¹), cet instrument ne fut d'abord employé que pour les liquides. Charles l'appliqua à la mesure de la densité des solides (²), et c'est son appareil, qu'il nommait aréomètre-balance, que l'on désigne souvent à tort sous le nom d'aréomètre de Nicholson. Tel qu'on le construit ordinairement aujourd'hui, l'instrument consiste en un cylindre creux en fer blanc A, terminé par deux cônes; le cône supérieur est surmonté d'une tige très déliée, marquée d'un repère a et supportant un petit plateau B; au cône inférieur s'accroche un panier C, assez lourd pour lester l'appareil. On met l'aréomètre dans une éprouvette pleine d'eau : il flotte verticalement. On place le corps sur le plateau, et à côté on ajoute assez de tare pour que l'aréomètre enfonce jusqu'au trait d'affleurement tracé sur la tige. On enlève le corps, on le remplace par des poids marqués de manière à rétablir l'affleurement : on a ainsi, par double pesée, le poids π du corps. On ôte les poids marqués et on remet le corps, mais dans le panier (³), de façon qu'il soit immergé ; pour amener l'affleurement il faut ajouter un poids π' dans le plateau supérieur : $\frac{\pi}{\pi'}$ est la densité brute.

Cette méthode est peu précise, l'aréomètre n'étant pas une bonne balance (227) (⁴); mais elle est très simple et peut par cela même rendre des services : les minéralogistes l'utilisent fréquemment ; en voyage, elle est souvent la seule possible.

3° *Flacon*. — Le procédé habituel pour déterminer la densité des solides est le procédé du flacon, imaginé par Klaprott et définitivement introduit par Regnault. Cette méthode exige un flacon que l'on puisse toujours exactement remplir de la même quantité d'eau. On a employé successivement des flacons fermés par un verre rodé, ou bouchés par un bouchon à l'émeri avec sillon longitudinal. Le flacon le plus commode est un flacon en verre mince, à

(¹) Muschembrœck est le premier auteur où l'on trouve le nom d'aréomètre.

(²) Biot, *Traité de physique*, I, 433; 1816.

(³) Si le corps est plus léger que l'eau, on le place sous le panier qui peut se retourner à cet effet et s'accrocher par le fond ; ou bien on le maintient dans le panier au moyen d'un couvercle à jour.

(⁴) On a cependant quelquefois employé avantageusement, comme balances industrielles, d'énormes flotteurs disposés dans des cuves profondes, de manière à recevoir les ballots au niveau du sol, à la façon de la bascule.

ulot un peu large, recevant un bouchon creux terminé par un bec nique étroit ou par un tube capillaire sur lequel on a tracé un père. Ce bouchon, qu'on pose sur le flacon complètement plein,

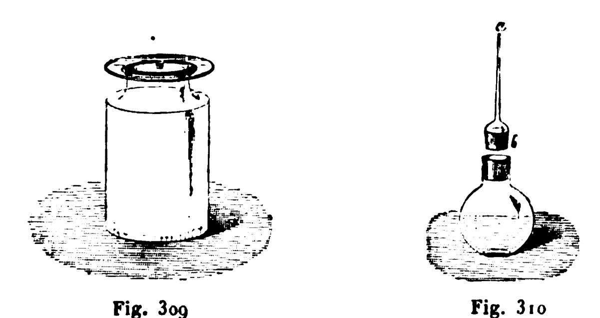


Fig. 309 Fig. 310

en prenant soin de le presser toujours de même, se remplit de liquide jusqu'à la pointe du bec ou jusqu'au trait (on enlève l'excédent avec du papier buvard), et le volume du flacon sera ainsi toujours le même, si la température est la même.

Prenons donc un tel flacon [1], plein d'eau distillée, mettons-le dans la glace fondante; quand il a bien pris la température zéro (ce que l'on reconnaît à ce que le niveau du liquide dans le tube capillaire reste invariable), amenons le liquide au repère. Pour cela, on ôtera du liquide avec le papier buvard ou on en ajoutera avec un petit entonnoir très effilé. L'affleurement exactement établi, retirons le flacon de la glace, essuyons-le, laissons-le reprendre la température du laboratoire (cette précaution est essentielle pour l'exactitude de la pesée), essuyons-le de nouveau et portons-le sur l'un des plateaux d'une balance de précision. A côté plaçons le corps dont nous voulons avoir la densité, et dans l'autre plateau mettons de la tare pour établir l'équilibre (première pesée). Enlevons le corps seul, remplaçons-le par des poids marqués (deuxième pesée) : nous aurons le poids π du corps. Mettons maintenant le corps dans le flacon, remplissons celui-ci, bouchons-le, replaçons-le dans la glace fondante, et, usant des mêmes précautions que précédemment, rétablissons l'affleurement à zéro. Le flacon revenu à la température ordinaire, reportons-le sur le plateau de la balance, la tare n'ayant pas changé

[1] Ou *pyknomètre* (πυκνός, dense).

dans l'autre plateau. Pour rétablir l'équilibre, il faudra ajouter du côté du flacon (troisième pesée) un poids π' qui représente évidemment le poids de l'eau chassée par le corps : $\frac{\pi}{\pi'}$ est la densité brute.

L'avantage de ce procédé est de permettre d'opérer sur le corps réduit en fragments assez petits pour éviter les cavités intérieures. La précision n'est limitée que par la difficulté de placer le bouchon exactement de même dans les deux opérations successives.

L'application de ces divers procédés est souvent contrariée par des bulles d'air qui restent adhérentes au corps immergé, surtout lorsque celui-ci est en poudre. Si le corps est librement suspendu dans l'eau, on détache assez aisément ces bulles au moyen d'un fil de platine préalablement passé à la flamme ; mais avec le flacon, pour les chasser, il faut ou chauffer jusqu'à l'ébullition, ou placer le flacon sous la cloche de la machine pneumatique et faire le vide, ou même recourir simultanément à ces deux moyens.

Cas particuliers. — Lorsqu'il s'agit de corps poreux, tels que la craie, la densité peut être considérée à deux points de vue différents : on peut chercher la densité du corps sous son volume extérieur, ou bien la densité de la matière même du corps. Pour avoir la première densité, il suffira de recouvrir le corps d'une mince couche de cire ou de vernis et de procéder ensuite comme à l'ordinaire par l'une quelconque des méthodes indiquées. La deuxième densité s'obtiendra par une détermination sur le corps réduit en poudre ([1]).

Si l'on a un corps soluble (sucre, par exemple), on déterminera sa densité par rapport à un autre liquide (alcool absolu) dans lequel il ne soit pas soluble. On n'aura ensuite qu'à multiplier le nombre ainsi trouvé (2,020) par la densité du liquide en question (0,795) pour avoir la densité (1,606) du corps par rapport à l'eau. Soient en

([1]) On peut obtenir simultanément les deux densités avec une approximation suffisante en procédant de la manière suivante. On pèse le corps : soit π son poids ; on le fait plonger dans l'eau jusqu'à ce qu'il soit complètement imbibé, on le pèse de nouveau : soit $\pi + p$ son nouveau poids ; puis, avec le corps ainsi pleinement imbibé, on détermine le poids π' de l'eau déplacée. La densité rapportée au volume extérieur est $\frac{\pi}{\pi'}$, et la densité de la matière $\frac{\pi}{\pi' - p}$. Buignet trouve ainsi pour la craie : densité apparente 1,600 ; densité réelle 2,551.

t π, π', π'', les poids de volumes égaux du corps, de l'eau et du ıide,

$$\frac{\pi}{\pi'}=\frac{\pi}{\pi''}\cdot\frac{\pi''}{\pi'},$$

ıt-à-dire que la densité du corps par rapport à l'eau est égale . densité du corps par rapport au liquide, multipliée par la den- du liquide par rapport à l'eau.

?our les poudres de guerre, que l'on ne peut mettre en contact ɛc un liquide qui les mouille, on emploie un appareil spécial dû IM. Mallet et Bianchi. C'est un réservoir ovoïde en verre, muni :haque extrémité d'un robinet en fer. Plaçant ce réservoir verti-



Fig. 311

calement au-dessus d'une cuve à mercure et le surmontant d'un tube relié à une machine pneumatique, on le remplit complètement de mercure par aspiration, on ferme les robinets, et on le porte sur la balance : soit P son poids. On vide l'appareil, on y introduit un poids de poudre p, on le remplit à nouveau de mercure par le même procédé (une grille à mailles très serrées placée en haut empêche la poudre de passer tout en laissant monter le mercure); on le pèse : soit P' le nouveau poids. $\frac{p}{P-(P'-p)}$ est la densité de la

poudre par rapport au mercure. Mais, outre la difficulté qu'on éprouve à se débarrasser complètement de l'air adhérent à la poudre, il y a toujours quelque incertitude sur la constance de la capacité du réservoir aux deux phases de l'expérience.

212. Poids spécifique d'un liquide. — Pour mesurer la densité d'un liquide, on peut recourir aux mêmes procédés qu'avec les corps solides.

On peut aussi user d'une méthode expéditive, fondée sur ce principe que les hauteurs de deux colonnes liquides qui font équilibre

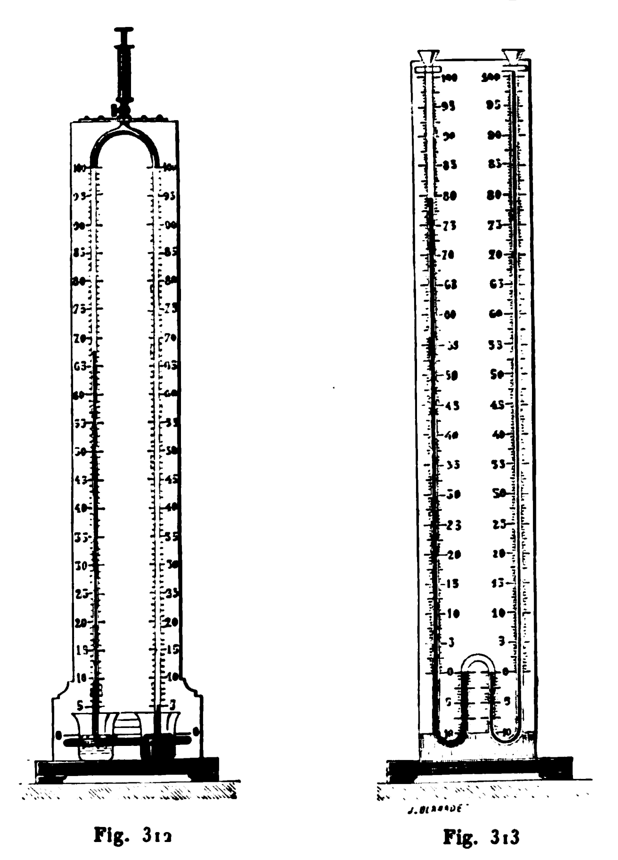


Fig. 312 Fig. 313

à une même pression sont en raison inverse des densités. L'appareil se dispose soit comme l'indique la figure 312 (Boyle), soit comme le montre la figure 313 (Babinet) : dans l'un et l'autre cas les hau-

rs des colonnes AB, A'B' sont en raison inverse des densités. ssi est-il commode pratiquement d'ajuster la base de chaque onne au zéro de la division et d'amener le niveau du liquide à périmenter en face de la division 100 : le numéro de la division à quelle monte l'eau donne immédiatement la densité. Avec l'alcol, par exemple, en opérant ainsi, on verra l'eau s'arrêter à la vision 79 : la densité de l'alcool est donc 0,79, au degré d'approximation que comporte l'appareil.

Revenons aux méthodes qui nous ont déjà servi pour les solides.

1° *Procédé de la balance hydrostatique.* — Une boule de verre, convenablement remplie de plomb ou de mercure, étant attachée sous l'un des plateaux de la balance et tarée de l'autre côté, on fait

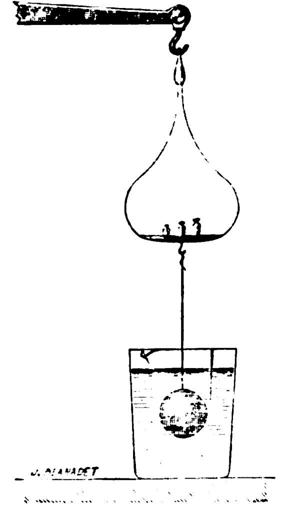


Fig. 314

plonger cette boule successivement dans le liquide, puis (après l'avoir bien essuyée) dans l'eau; soient π et π' les pertes de poids respectivement constatées dans les deux cas : $\frac{\pi}{\pi'}$ est la densité brute [1].

[1] On emploie commodément pour cette expérience une balance hydrostatique spéciale, la *balance de Mohr*, balance sans poids, dont le fléau porte d'un côté la boule ou tout autre plongeur, de l'autre un bassin-tare l'équilibrant dans l'air. Sur le bras du côté du plongeur sont marqués 10 crans équidistants qui peuvent recevoir trois cavaliers : l'un représentant la poussée subie par le plongeur dans l'eau à 15°, les deux autres pesant le dixième et le centième du

2° *Procédé de l'aréomètre.* — On se sert de l'aréomètre de

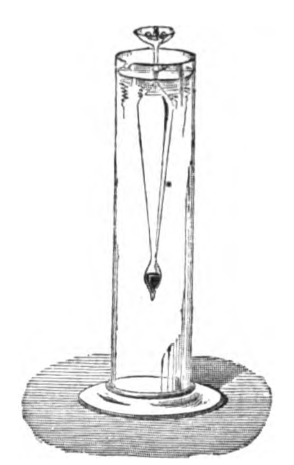


Fig. 315

Fahrenheit : c'est un flotteur, en verre (afin qu'il ne soit pas attaqué par les acides), lesté à sa partie inférieure et surmonté

premier. Le plongeur étant immergé dans un liquide à 15°, plus léger que l'eau, les numéros des crans auxquels il faut placer les trois cavaliers pour rétablir

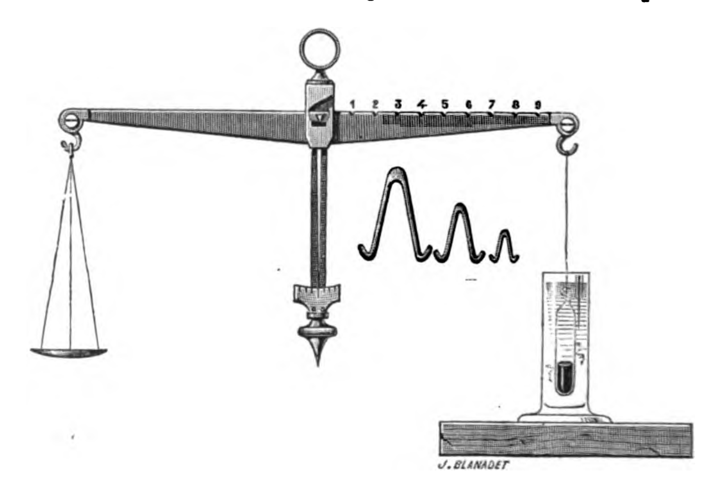


Fig. 316

l'équilibre, donnent respectivement les chiffres des dixièmes, des centièmes et des millièmes de la densité cherchée. Si le liquide est plus dense que l'eau, on ajoutera au-dessus du plongeur (au crochet, représentant le cran 10) un ou deux cavaliers de même poids que le premier : le nombre de ces cavaliers déterminera le chiffre des unités.

une tige terminée par un plateau; sur la tige, laissée creuse de anière que l'on puisse au besoin modifier le lest, est marqué ı trait d'affleurement. L'appareil étant convenablement lesté, : façon à ce que la ligne de flottaison soit au-dessus du trait affleurement dans l'eau et dans le liquide, on le pèse : soit P son oids. On le met dans le liquide : on ajoute des poids marqués p ısqu'à établir l'affleurement; on le porte ensuite dans l'eau : il faut n poids p' pour obtenir l'affleurement. $\frac{P+p}{P+p'}$ est la densité brute.

3° *Procédé du flacon.* — Le flacon consiste en un réservoir cylindrique R, surmonté d'un tube étroit portant un trait d'affleurement a. Ce tube se termine en haut par un petit entonnoir E que

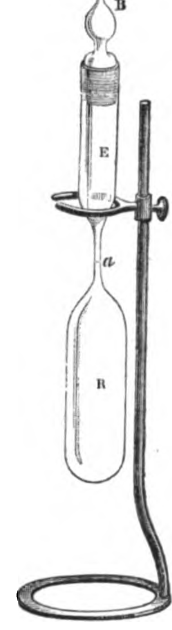


Fig. 317

l'on peut fermer avec un bouchon B quand on opère sur un liquide volatil. On pèse ce flacon vide : soit p son poids. On le remplit du liquide à zéro, on le pèse : soit P ce poids. On le vide, on le sèche; on le remplit d'eau à zéro, on le pèse : soit P' ce nouveau poids. $\frac{P-p}{P'-p}$ est la densité brute.

Nous avons indiqué plus haut les précautions à prendre pour établir l'affleurement et faire les pesées de manière à obtenir de ce procédé très exact toute la précision qu'il comporte. Le remplissage du flacon peut seul présenter quelques difficultés à cause de l'étroitesse du tube qui le surmonte. On réussira généralement à faire descendre le liquide de l'entonnoir dans le flacon en glissant dans le tube *a* un mince tube de verre tiré à la lampe par lequel on aspirera l'air intérieur ([1]). Si ce moyen échoue, on procédera au remplissage comme pour un thermomètre, c'est-à-dire que l'on chauffera le réservoir afin d'en chasser une partie de l'air qui se trouvera remplacée par du liquide quand l'appareil se refroidira. On fera bouillir ce liquide dans le réservoir de façon à expulser tout l'air ; on laissera refroidir, et le liquide extérieur viendra remplir complètement l'appareil. Toutefois, si le liquide bout à une température très supérieure à 100°, il est à craindre, d'après ce que l'on sait sur les variations des réservoirs thermométriques (Voy. plus loin), que le flacon porté d'abord à cette température puis refroidi à zéro, porté ensuite à 100° puis refroidi à zéro, ne reprenne pas à zéro exactement le même volume dans les deux cas. On évitera cette difficulté en opérant le remplissage dans le vide à la température ordinaire, comme l'ont fait MM. H. Sainte-Claire Deville et Mascart ([2]) quand ils ont voulu déterminer la densité du mercure.

Enfin, quel que soit le procédé employé, on devra, pour avoir la densité exacte, faire subir à la densité brute certaines corrections qui seront indiquées plus loin.

213. Aréomètres à poids constant. — Outre les deux aréomètres que nous avons déjà décrits (aréomètre de Charles et aréomètre de Fahrenheit), et qui sont à volume constant et à poids variable, on emploie journellement dans les laboratoires et dans l'industrie des aréomètres à poids constant, qui permettent de reconnaître immédiatement si un liquide a la densité voulue.

([1]) Le même tube servira à la rentrée de l'air extérieur quand on videra l'appareil. On peut aussi, pour le remplissage, introduire le liquide par le tube effilé servant d'entonnoir ; l'air sortira entre cet entonnoir et le tube du flacon.

([2]) H. Sainte-Claire Deville et Mascart, *Annales de l'École normale supérieure*, (2), VIII, 9 ; 1879.

Lorsqu'un aréomètre à poids constant flotte en équilibre dans un liquide, il déplace en effet un poids constant de ce liquide. Si donc le liquide a la densité requise, à ce poids constant correspond un volume fixe, et par conséquent un point d'affleurement déterminé.

Aréomètres de Baume. — Pour les liquides plus denses que l'eau, l'aréomètre le plus en usage est le pèse-acides ou pèse-sels de Baumé. C'est un aréomètre tout en verre, complètement fermé, et portant une tige cylindrique sur laquelle est marquée une graduation en parties d'égale longueur. Cette graduation, Baumé l'établit arbitrairement de la manière suivante. Ayant lesté l'instrument de telle sorte qu'il enfonçât dans l'eau pure, à la température de 10° degrés Réaumur (12°,5), jusqu'en un point voisin de l'extrémité supérieure de la tige, il marqua o en ce point; puis il fit une dissolution de 15 parties de sel marin dans 85 parties d'eau et marqua 15 au point d'affleurement dans cette solution. Il divisa l'intervalle o — 15 en 15 parties égales et prolongea la division jusqu'au bas de la tige (qui doit être assez longue pour recevoir 70 degrés environ dans les pèse-acides). Au moyen de cet appareil on peut juger immédiatement si un acide a la concentration voulue; le pèse-acides Baumé marque en effet :

Fig. 318

66 dans l'acide sulfurique concentré,
36 dans l'acide nitrique du commerce,
22 dans l'acide chlorhydrique usuel.

Aussi, pour le graduer, le plus souvent aujourd'hui les constructeurs prennent-ils comme points fixes le point d'affleurement dans l'eau pure où ils marquent o, et le point d'affleurement dans l'acide sulfurique concentré du commerce où ils marquent 66.

Pour les liquides moins denses que l'eau, Baumé a construit un autre aréomètre disposé de façon à ne s'enfoncer dans l'eau que jusqu'à la naissance de la tige. Il a gradué son instrument en mettant le o au point d'affleurement dans une solution de 10 parties de sel marin dans 90 parties d'eau à la température de 10 degrés Réaumur et en inscrivant le 10° degré au point d'affleurement

dans l'eau pure : il a divisé l'intervalle en 10 parties égales et prolongé la graduation jusqu'en haut de la tige, qui doit pouvoir porter de 58 à 60 divisions. Aujourd'hui on supprime comme inutiles les 10 premières : l'échelle commence par conséquent au 10e degré qui représente le point d'affleurement dans l'eau pure. A cet aréomètre l'éther ordinaire du commerce marque 56, et convenablement rectifié il peut aller jusqu'à 65; l'ammoniaque marque 22 à 25 suivant qu'elle est plus ou moins concentrée; mais il n'y a pas de liquide courant dont la concentration s'évalue exactement en degrés du pèse-esprits de Baumé.

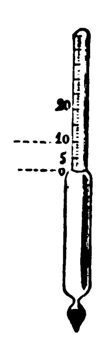


Fig. 319

Aréomètre de Cartier. — Un ancien ouvrier de Baumé, Cartier, changea la graduation de cet aréomètre sans aucune autre raison qu'un désir de concurrence commerciale. Conservant le 10e degré au point d'affleurement dans l'eau, il ne se donna pas même la peine de fixer un second point, et il établit à son caprice une division en parties égales, dont le 29e degré coïncide à peu près avec le 31e de Baumé. Un tel instrument devait s'altérer et s'altéra promptement en effet entre les mains des constructeurs. Malgré cela, le pèse-esprits de Cartier a été longtemps adopté exclusivement par la régie : c'est à cet appareil que se rapportent les dénominations d'alcools à 25, 30, 40 degrés, ou d'eaux-de-vie à 19, 20, 22 degrés [1]. Aujourd'hui ces appellations tendent à disparaître [2] et à être remplacées par celles de l'alcoomètre centésimal.

[1] Les degrés de l'aréomètre Cartier n'ont aucun rapport avec la richesse en alcool. Ainsi, du douzième au treizième degré Cartier il y a une différence de 7 pour 100 d'alcool pur, et du trente-cinquième au trente-sixième degré Cartier il n'y a plus qu'une différence de 1,6 pour 100 d'alcool pur, comme le montre la table suivante due à Gay-Lussac.

Aréomètre Cartier.	Alcoomètre Gay-Lussac.	Aréomètre Cartier.	Alcoomètre Gay-Lussac.	Aréomètre Cartier.	Alcoomètre Gay-Lussac.
11	5	16	37	25	68
12	11	17	41	30	79
13	18	18	46	35	88
14	25	19	50	40	96
15	32	20	53	44	100

[2] Dans les Charentes, on emploie encore couramment un instrument aussi défectueux au moins que l'aréomètre Cartier, le Tessa, qui est également un aréomètre à poids constant et à degrés égaux. Bien que tous les Tessas soient loin d'être identiques, 1 degré Tessa diffère peu de 1,13 Cartier, et le degré 3 3/4

Alcoomètre centésimal de Gay-Lussac (¹). — L'alcoomètre centési-al de Gay-Lussac est un aréomètre à poids constant, gradué de anière à indiquer immédiatement la proportion d'alcool ı volume contenue dans un mélange d'eau et d'alcool. Si, ıe fois mêlés, l'eau et l'alcool conservaient leur volume itial, il serait aisé, après avoir déterminé expérimentale-ıent deux points de l'échelle (le point o et le point 100 par ɩemple), de trouver par le calcul tous les autres. Mais il 'en est pas ainsi; lorsque l'on mêle de l'eau et de l'alcool, ı se produit une contraction qui est maximum pour un nélange de 52,3 volumes d'alcool et de 47,7 volumes d'eau, répondant à peu près à la formule $C^4H^6O^2+6HO$ (la con-traction est alors de 3,65 pour 100). En conséquence, il est nécessaire de déterminer directement un grand nombre de points de l'échelle. Voici donc comment on procédera. L'appareil étant lesté de façon que le point d'affleurement dans l'eau pure soit au bas de la tige, on marquera o en ce point à la température de 15°. Puis on portera l'aréomètre dans un mélange de 5 volumes d'alcool et de ce qu'il faudra y

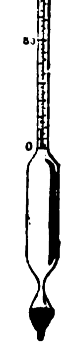


Fig. 320

du Tessa coïncide à peu près avec le 22ᵉ degré Cartier. Si l'on compare le Tessa à l'alcoomètre centésimal, on trouve que le mélange d'eau et d'alcool qui marque o Tessa à 10 degrés Réaumur, accuse à très peu près 45 degrés centésimaux à 15°; l'eau-de-vie du pays, qui est dite *marchande* à 4 Tessa sur 10 Réaumur, pèse 60 degrés centésimaux, et le 16ᵉ degré Tessa, qui est le degré marchand des trois-six industriels, correspond sensiblement à 90 degrés centésimaux (Bernard, *Alcoométrie*. Paris, Gauthier-Villars; 1875).

En Angleterre, on fait principalement usage de l'hydromètre de Clarke ou de Sike. C'est un aréomètre en métal, à tige divisée en dix parties égales (subdivisées en dixièmes), et pouvant recevoir une série de poids additionnels réglés de sorte que l'affleurement, ayant lieu au point 10 avec l'un des poids, se produit au o avec le poids immédiatement supérieur (la graduation est descendante). Le liquide pris pour type est l'esprit de preuve « tel que, à la température de 51 degrés Fahrenheit (10°,55), treize volumes de cet esprit pèsent autant que douze volumes d'eau », ce qui représente un alcool à 57,2 degrés centésimaux. Dans un alcool donné, l'affleurement étant établi avec le poids additionnel convenable et la température relevée au thermomètre Fahrenheit, une table jointe à l'instrument indique la valeur pour 100 au-dessus ou au-dessous de preuve, l'expression 23 pour 100 au-dessus de preuve, par exemple, signifiant que le liquide peut fournir les 123 centièmes de son volume en esprit de preuve, ou les $123 \times 0{,}572 = 70{,}4$ centièmes d'alcool pur.

En Allemagne et en Russie, on se sert de l'alcoomètre de Tralles, qui ne diffère de celui de Gay-Lussac que par la température de graduation, 60 degrés Fahrenheit (15°,55) au lieu de 15°.

(¹) Gay-Lussac, *Instruction pour l'usage de l'alcoomètre centésimal*. Paris; 1824.

ajouter d'eau pour faire 100 volumes : on aura ainsi le point 5
On fera ensuite un mélange de 10 volumes d'alcool et de la quantit
d'eau nécessaire pour compléter 100 volumes : au point d'affleure
ment dans ce mélange on marquera 10. Et ainsi de suite jusqu'a
point 100, correspondant à l'affleurement dans l'alcool absolu
la température de 15°. On divisera ensuite chaque intervalle e
5 parties égales, et l'instrument sera gradué.

Les indications de l'instrument se rapportant à un mélange d'ea
et d'alcool à la température de 15°, on devra donc, quand il s'agir
d'un liquide alcoolique, d'un vin par exemple, le ramener d'abord
par la distillation à ne plus contenir que de l'eau et de l'alcool. Il
suffira pour cela de le distiller au $\frac{1}{3}$ ou à la $\frac{1}{2}$ (suivant le *cas*), *et*

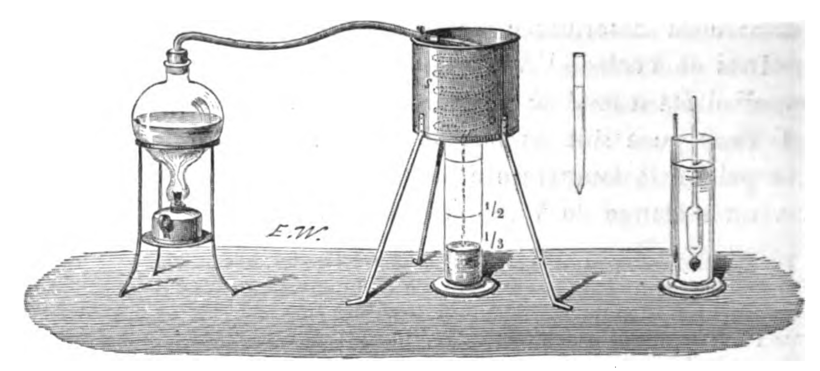


Fig. 321

d'étendre le produit de la distillation d'assez d'eau pour lui restituer le volume primitif. Salleron a construit à cet effet un petit alambic qui permet d'effectuer aisément cette première opération. On plongera ensuite dans le mélange d'eau et d'alcool ainsi obtenu l'alcoomètre centésimal et un thermomètre ; si la température n'est pas de 15°, la lecture faite à l'alcoomètre devra être corrigée d'une certaine quantité qu'indique immédiatement une table dressée par Gay-Lussac, ou que l'on calcule par la formule

$$x = a \mp bt :$$

x est le degré cherché, a le degré observé à la température $15+t$ degrés, b un coefficient égal à 0,4 pour les degrés commerciaux.

La série d'opérations longues et délicates par lesquelles Gay-

ssac a dû passer pour graduer son alcoomètre ne peut évidem-
ent être reprise chaque fois qu'il s'agit d'en construire un nouvel emplaire. Il est particulièrement difficile d'avoir de l'alcool ab-lu, et plus difficile encore de le manier, de le peser, sans qu'il ydrate.

Mais, d'une part, on connaît les densités des divers mélanges eau et d'alcool. Ces densités ont été déterminées pour la première is par Gilpin ([1]) sous la direction de Blagden, puis corrigées par ralles ([2]); Gay-Lussac, recommençant ces déterminations, a trouvé es résultats presque identiques qui ont été publiés par Collar-leau ([3]); enfin Pouillet ([4]) a vérifié les nombres de Gay-Lussac un nstant compromis par une mesure inexacte d'Isidore Pierre ([5]). On peut donc considérer ces densités comme très exactement fixées. En prenant des mélanges d'eau et d'alcool de densité connue, on aura ainsi des mélanges de composition déterminée, propres à graduer un alcoomètre. La table suivante donne les densités à la température de 15° des mélanges marquant, à la même température, 0, 5, 10.... degrés centésimaux.

Degrés.	Densités.	Degrés.	Densités.	Degrés.	Densités.
0	0,9991	35	0,9587	70	0,8900
5	0,9919	40	0,9516	75	0,8772
10	0,9857	45	0,9433	80	0,8636
15	0,9803	50	0,9340	85	0,8494
20	0,9753	55	0,9241	90	0,8339
25	0,9703	60	0,9133	95	0,8162
30	0,9649	65	0,9018	100	0,7940

D'autre part, quand on possède un alcoomètre étalon, pour graduer un nouvel appareil il suffit de déterminer deux points de l'échelle et de diviser ensuite la tige en parties proportionnelles à celles de l'étalon.

([1]) Gilpin, *Phil. Trans.*; 1794.

([2]) Tralles, *Gilbert's Annalen*, XXXVIII, 386; 1811; ou *Dictionnaire de Chimie de Würtz*, article *Alcool*.

([3]) Collardeau, *Répertoire de chimie appliquée* pour 1862, p. 30; ou *Sucrerie indigène* du 20 mai 1872.

([4]) Pouillet, *Mémoire sur les densités de l'alcool et des mélanges alcooliques*. Paris; 1858.

([5]) I. Pierre, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XV; 1845.

En effet, les échelles de deux alcoomètres centésimaux (et e général de deux aréomètres de même nom) sont semblable Car, le poids du liquide déplacé par un corps qui flotte étai toujours égal au poids même de ce corps, et par suite le volum immergé variant simplement en raison inverse de la densité d liquide, le rapport des volumes dont deux aréomètres différen plongent successivement dans divers liquides est constant ; l rapport des parties émergées est donc pareillement constant.

D'après ce principe, on reportera avec soin l'échelle EE′ de l'éta lon sur une feuille de papier. D'un point S quelconque on tracer un système de transversales passant par les divers degrés de l'éta

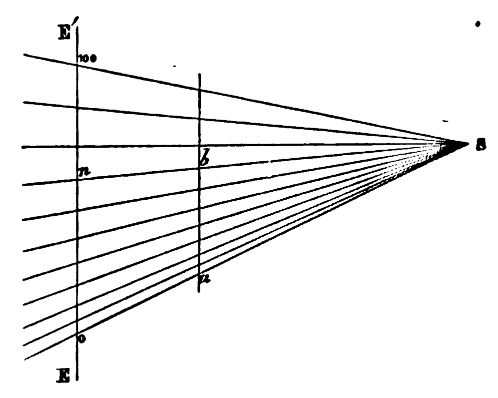


Fig. 322

lon. Quand on voudra avoir l'échelle d'un instrument donné, on déterminera directement deux points fixes *a* et *b*, correspondant aux degrés o et *n* ; on cherchera sur le papier une parallèle à EE′ qui ait entre So et S*n* la distance *ab* : cette parallèle sera divisée par les transversales suivant l'échelle voulue.

Ajoutons enfin que la fabrication des alcoomètres, bien que destinés à mesurer la valeur de produits rapportant annuellement au fisc des centaines de millions, n'est pas contrôlée par l'État[1], de sorte qu'il est absolument nécessaire de ne les prendre que chez des constructeurs offrant de sérieuses garanties.

[1] La question de ce contrôle est à l'étude et ne tardera sans doute pas à être résolue affirmativement.

214. Volumètres, densimètres. — On construit encore des éomètres donnant immédiatement le volume spécifique, c'est-à-re le volume de l'unité de poids d'un liquide ; ce sont les *volumè-s*, imaginés par Gay-Lussac. Prenons un tube cylindrique lesté manière à enfoncer dans l'eau jusqu'en un point 100, que nous ettrons à la partie supérieure de la tige si l'instrument doit servir ur les liquides plus denses que l'eau ; divisons le tube depuis ce int 100 jusqu'en bas en 100 parties égales, et nous aurons un vo-mètre ; car si cet appareil s'enfonce dans un liquide jusqu'à la vision n, cela indique que n centimètres cubes du liquide pèsent itant que 100 centimètres cubes d'eau, c'est-à-dire pèsent 100 rammes, le volume de 1 gramme est donc $\frac{n}{100}$ centimètres cubes.

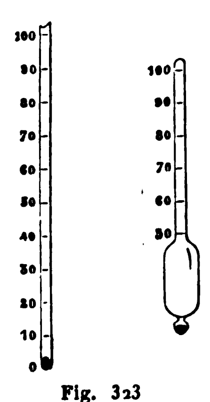


Fig. 323

Au lieu d'un tube cylindrique, on préfère ordinairement prendre un aréomètre présentant une partie renflée, surmontée d'une tige cylindrique. Pour graduer l'appareil, il faut alors déterminer un deuxième point sur la tige. A cet effet, on peut employer deux méthodes différentes :

1° On peut composer artificiellement un liquide dont la densité d soit $\frac{100}{n}$: le point d'affleurement dans ce liquide sera la division n. Soit en effet v le volume d'une division, $100\,v$ est le volume de l'aréomètre entier ou le poids de l'eau déplacée ; si n est le point d'affleurement dans un liquide, nvd est le poids du liquide déplacé par l'aréomètre ; on a donc

$$100\,v = nvd,$$

ou

$$d=\frac{100}{n},$$

c'est-à-dire que le liquide dans lequel l'affleurement se fait à la division n a pour densité $\frac{100}{n}$, ou inversement dans le liquide de densité $\frac{100}{n}$ l'affleurement se fait à la division n. Ainsi, pour avoir le point 75, on n'a qu'à composer un liquide dont la densité soit $\frac{100}{75}=\frac{4}{3}$ et à y plonger l'aréomètre : au point d'affleurement on marquera 75, on divisera l'intervalle 100—75 en 25 parties égales, et on continuera la graduation jusqu'au bas de la tige (qui doit être assez longue pour descendre à peu près jusqu'à 50). Si l'appareil devait servir pour des liquides moins denses que l'eau, après l'avoir lesté de manière que le 100 fût au bas de la tige, on déterminerait de même un second point de graduation, le numéro 125 par exemple, au moyen d'un liquide artificiellement amené à la densité exacte $\frac{4}{5}$, et on n'aurait plus qu'à faire entre ces deux points une division en parties d'égale longueur que l'on prolongerait jusqu'en haut de la tige (c'est-à-dire à peu près jusqu'à 150).

2° Au lieu de composer un liquide de densité exactement déterminée, ce qui est toujours fort difficile, Despretz gradue l'aréomètre en modifiant son lest. Supposons toujours qu'il s'agisse d'un appareil destiné aux liquides plus lourds que l'eau. Soit P le poids de l'aréomètre enfonçant d'un volume V dans l'eau ; on réduit ce poids à $P-p$: l'aréomètre ne plonge plus dans l'eau que de V', et l'on a évidemment

$$\frac{V}{V'}=\frac{P}{P-p}.$$

Si l'aréomètre, conservant son lest primitif, eût enfoncé précisément de V' dans un liquide, la densité d' de ce liquide eût été liée à celle de l'eau d par la relation

$$Vd=V'd'.$$

a donc

$$\frac{d'}{d}=\frac{P}{P-p}:$$

densités des divers liquides sont inversement proportionnelles x poids que devrait avoir l'aréomètre pour affleurer dans l'eau ıx mêmes points que dans ces liquides.

En conséquence, pour savoir le point auquel l'aréomètre s'enncerait dans un liquide de densité d', il suffit de calculer p au ıoyen de la formule $p=P\frac{d'-d}{d'}$, d'enlever ce poids p et de remette l'appareil dans l'eau. Au point d'affleurement on écrira comme récédemment $n=\frac{100}{d'}$.

On recourra de même à une augmentation de lest $p=P\frac{d-d'}{d'}$ pour graduer les instruments destinés aux liquides moins denses que l'eau.

Il est à remarquer que les aréomètres de Baumé, celui de Cartier, le Tessa, en un mot tous les aréomètres à poids constant et à tige cylindrique divisée en degrés égaux, ne sont pas autre chose que des volumètres; et la valeur volumétrique de leur degré s'obtiendra aisément (voir plus bas), si l'on connaît les densités des deux liquides qui ont servi à marquer les points fixes.

On voit aussi immédiatement qu'un volumètre peut servir à mesurer la densité d'un liquide; car le poids spécifique étant l'inverse du volume spécifique, si l'on appelle n le degré volumétrique, on a la relation déjà établie

$$d=\frac{100}{n}.$$

Quand un aréomètre donne directement les densités, il prend le nom de *densimètre*.

Supposons que la tige cylindrique d'un aréomètre à poids constant porte déjà une division volumétrique, et proposons-nous d'y joindre une échelle densimétrique. Soit α la différence constante que nous voulons établir entre deux degrés de cette échelle. Si nous

appelons n et n' les degrés volumétriques correspondant respectivement aux densités d et $d+\alpha$, nous avons

$$n=\frac{100}{d},$$

et

$$n'=\frac{100}{d+\alpha};$$

d'où

$$n-n'=100\frac{\alpha}{d(d+\alpha)}:$$

la différence $n-n'$ est d'autant plus petite que d est plus grand (elle est presque en raison inverse de d^2). Les degrés densimétriques seront d'autant plus serrés que la densité sera plus grande.

S'il n'y avait pas de contraction dans le mélange de l'alcool avec l'eau, l'alcoomètre centésimal de Gay-Lussac serait un véritable densimètre, et les degrés de cet instrument seraient espacés suivant la loi donnée par la formule précédente. Bien qu'il n'en soit pas rigoureusement ainsi, l'écartement des degrés présente dans l'alcoomètre de Gay-Lussac, et pour la même cause, la même allure générale que dans un densimètre : les divisions correspondant aux grandes densités, c'est-à-dire au bas de la tige, sont les plus serrées. La contraction n'intervient que pour diminuer la différence de longueur des degrés de 0 à 53 environ, et par suite pour l'augmenter de 53 à 100. Nous devons ajouter toutefois qu'une circonstance sur laquelle nous aurons bientôt à revenir et qui influe considérablement sur toutes les mesures aréométriques, la tension superficielle du liquide, intervient en outre pour modifier encore cet écartement : c'est en raison de ce fait que les degrés, qui devraient aller constamment en s'écartant depuis le bas de la tige, se serrent au contraire de 0 à 20 et restent presque équidistants de 20 à 30, avant de s'espacer enfin de 30 à 100 [1].

[1] La tension superficielle varie en effet très rapidement quand on passe de l'eau aux alcools faibles, de sorte que l'alcoomètre se relève d'abord plus qu'il ne le ferait sous la seule influence de la variation de densité. Pour les alcools forts, au contraire, la tension superficielle change à peine, la longueur des degrés est à peine modifiée (DUCLAUX, *Journal de physique*, I, 201; 1872).

Puisque tout volumètre peut servir à mesurer les densités, il en évidemment de même des aréomètres de Baumé, de Cartier, etc. Soit par exemple l'aréomètre de Baumé pour les liquides plus nses que l'eau. Supposons qu'il plonge jusqu'à la division n dans liquide de densité inconnue D. Cette densité pourra aisément btenir si l'on connaît les densités de deux liquides dans lesquels réomètre s'enfonce à des degrés déterminés, si l'on connaît, par emple, les densités des deux liquides qui ont servi à marquer les ux points fixes. Soit en effet V le volume de l'appareil jusqu'au ro (V représente aussi le poids de l'eau déplacée par l'aréomètre); ient v le volume d'une division, d la densité de l'eau salée dans quelle l'instrument marque 15; en écrivant toujours que le poids u liquide déplacé par l'aréomètre reste constant, on a

$$V = (V - 15v)d.$$

De même, avec le liquide considéré,

$$V = (V - nv)D \text{ (1)}.$$

Ces deux équations ne contiennent que deux inconnues $\frac{V}{v}$ et D; on peut donc en tirer D. De la première on tire

$$\frac{V}{v} = \frac{15d}{d-1} = A,$$

A étant le *module* (2). La deuxième donne alors

$$D = \frac{A}{A-n}.$$

Ordinairement on prend, avec Gay-Lussac (3), $A = 144,3$.

(1) Ces équations ne sont qu'approximatives, la densité γ de l'eau à 12°,5 n'étant pas 1, mais 0,99949; de plus on a négligé l'influence de l'air dans lequel émerge la tige. Toutefois les erreurs ainsi commises sont négligeables.

(2) C'est le *module*, c'est-à-dire le rapport qui doit exister entre le volume total V et le volume d'une division v, qui caractérise un aréomètre à degrés égaux : il doit être le même dans tous les exemplaires d'un même instrument. Dans les aréomètres de Baumé, de Cartier, etc., il a été pris tout à fait arbitrairement; dans le volumètre, il est égal à 100.

(3) Baumé n'ayant pas fait connaître clairement le mode de préparation de son eau salée, les divers constructeurs n'ont pas tous suivi les mêmes règles.

De même l'aréomètre de Baumé pour les liquides moins denses que l'eau permet de déterminer la densité à l'aide de la formule

$$D = \frac{B}{B + (n - 10)},$$

où $B = 144$ (¹).

Rousseau a construit un densimètre qui donne le moyen de mesurer la densité d'un liquide que l'on ne possède pas en assez grande quantité pour y plonger un aréomètre. Cet appareil est analogue à celui de Fahrenheit; seulement au lieu d'un plateau à la partie supérieure il porte un petit vase sur lequel est marqué 1cc; et la tige de l'aréomètre a été divisée en parties égales de la manière suivante. Après avoir tracé 0 au point d'affleurement à vide dans l'eau (²), on a mis 1 gramme dans le petit vase, l'aréomètre s'est enfoncé dans l'eau jusqu'en un point où l'on a écrit 100, on a divisé l'intervalle en 100 parties égales et prolongé la division au-dessus de 100 si l'appareil doit servir aux liquides plus denses que l'eau. Lorsque 1cc de liquide versé dans le réservoir supérieur fera affleurer l'instrument à la division n, le poids spécifique

Fig. 324

Le nombre de Gay-Lussac convient aux appareils que l'on a gradués en marquant le 66° degré au point d'affleurement dans l'acide sulfurique pur concentré, de densité 1,8427 à la température de 15°. Si l'on prépare la solution salée conformément aux prescriptions formulées par M. Berthelot, d'après la rédaction de Baumé à la page 341 du tome I de la 8° édition de ses *Éléments de Pharmacie*, le poids apparent d'un litre de la solution, pesé avec des poids de laiton dans l'air sec à 12°,5 et sous la pression de 760mm, sera 1110g,57; et le module deviendra $A = 148,5$ (Berthelot, Coulier et d'Alméida, *Vérification de l'aréomètre de Baumé*. Paris, Gauthier-Villars; 1873).

(¹) Pour tout aréomètre à poids constant et à tige cylindrique divisée en degrés égaux on a une formule analogue :

Aréomètre hollandais officiel	$D = \frac{144}{144 - n}$.
Aréomètre Beck..................................	$D = \frac{170}{170 \pm n}$.
Aréomètre Twaddle, usité en Angleterre............	$D = \frac{200}{200 + n}$.
Aréomètre Brix, adopté par le gouvernement prussien.	$D = \frac{400}{400 \pm n}$.

Le signe — convient aux liquides plus lourds, le signe + aux liquides moins lourds que l'eau.

(²) Pratiquement, on évitera de marquer le zéro en opérant comme il a été dit à propos des volumètres.

ra $\frac{n}{100}$, puisque le volume du liquide est égal à 1 et que son oids est $\frac{n}{100}$. Malgré la difficulté de mesurer exactement 1^{cc} de quide, cet appareil est utilement employé avec les liquides de économie animale, et en général avec tous les liquides que l'on e peut avoir qu'en faible quantité.

M. Pâquet (1) a modifié l'instrument de manière à en obtenir une mesure rapide de la densité des solides dont on ne possède que e petits fragments. Il trace sur le réservoir supérieur une division n centimètres cubes et dixièmes de centimètre cube, le zéro de

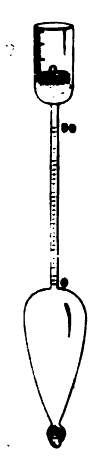


Fig. 325

cette division étant au niveau du deuxième centimètre cube ; et il gradue la tige en parties correspondant à des décigrammes : le zéro correspond au point d'affleurement dans l'eau lorsque le réservoir supérieur est rempli d'eau jusqu'à son zéro (c'est-à-dire lorsqu'il contient 2^{cc} d'eau) ; le degré 50 correspond au point d'affleurement dans l'eau quand le réservoir supérieur contient, outre ces deux centimètres cubes d'eau, un poids de 5 grammes. Pour déterminer une densité, on verse 2^{cc} d'eau dans le réservoir supérieur, qui se trouve alors plein jusqu'au zéro, et l'instrument affleure dans l'eau au zéro de la tige ; on introduit le corps dans le réservoir, l'eau

(1) Pâquet, *Journal de physique*, IV, 266 ; 1875. Voir aussi Buignet, *Journal de physique*, IX, 93 ; 1880.

monte jusqu'à la division 2,3 par exemple: le volume du corps est 2^{cc},3. En même temps l'aréomètre enfonce jusqu'à la division de la tige 45, je suppose: le poids du corps est de 45 décigrammes. La densité est donc $\frac{4,5}{2,3} = 1,95$.

En laissant de côté ces petits appareils, dont l'usage est limité à des cas particuliers, et qui ne peuvent donner que des résultats approximatifs, sur quel degré de précision peut-on compter avec un densimètre soigneusement construit? C'est une question à laquelle il n'est possible de répondre que par la discussion d'une cause d'erreur que nous étudierons plus loin, l'action capillaire du liquide sur la tige de l'instrument. Nous verrons que généralement un aréomètre ne mesure les densités qu'avec deux décimales. Les seuls aréomètres exacts sont ceux qui, comme l'alcoomètre centésimal de Gay-Lussac, ont été empiriquement gradués pour une classe déterminée de liquides: ils comportent alors une précision comparable à celle d'une bonne balance.

215. Poids spécifiques des principaux solides et liquides. — Outre les différences provenant de la diversité de composition chimique, telles qu'en présentent les roches, les verres, etc., l'observation accuse des variations dans la densité pour tout changement d'état physique. Ainsi les métaux n'ont pas la même densité suivant qu'ils ont été simplement fondus, ou bien ensuite étirés, laminés, frappés: on regardera comme représentant la vraie densité d'un métal, le nombre le plus élevé que donnera le métal pur: ce sera, en général, le nombre obtenu après plusieurs frappes énergiques. Dans le tableau suivant sont inscrits les poids spécifiques des principaux métaux, alliages, matériaux de construction, verres, bois et combustibles minéraux, ainsi que ceux de quelques liquides, par ordre alphabétique [1].

[1] Les nombres de ce tableau sont, pour la plupart, extraits de l'*Annuaire du Bureau des longitudes*.

Solides.

luminium laminé	2,67
ntimoine	6,72
rgent laminé	10,57
rsenic	5,67
ismuth	9,82
ore cristallin	2,69
admium laminé	8,69
arbone .. anthracite	1,34 à 1,46
arbone .. diamant	3,52 à 3,53
arbone .. graphite	2,09 à 2,24
hrome cristallisé	6,8
Cobalt fondu	8,68
Cuivre laminé	8,95
Étain laminé	7,29
Fer forgé	7,79
Iode	4,95
Iridium fondu, broyé	22,38
Magnésium	1,75
Manganèse	8,01
Mercure solide à — 40°	14,39
Nickel forgé	8,67
Or laminé	19,36
Osmium	21,30
Palladium frappé	11,80
Phosphore	1,77
Platine frappé	21,46
Plomb	11,35
Potassium	0,86
Ruthénium	11,40
Selenium	4,30
Silicium cristallin	2,65
Sodium	0,97
Soufre.... octaédrique	2,07
Soufre.... prismatique	1,99
Tellure	6,24
Titane	5,30
Zinc laminé	7,21
Acier	7,67 à 7,84
Argent 90, cuivre 10	10,12
Bronze des canons	8,44 à 9,24
Fonte	6,79 à 7,84
Laiton	7,30 à 8,65
Maillechort	8,62
Platine 90, iridium 10	21,55
Albâtre	2,26 à 2,32
Ardoise	2,64 à 2,90
Basalte	2,78 à 3,10
Calcaire	1,94 à 2,70
Fluorine	3,14 à 3,19
Granite	2,63 à 2,75
Grès	2,19 à 2,65
Gypse	2,17 à 2,20
Malachite	3,93
Marbre	2,65 à 2,74
Porphyre	2,61 à 2,94
Quartz	2,65
Spath	2,72
Crown	2,45 à 2,66
Flint	3,59 à 4,36
Cristal	3,33
Porcelaine	2,24 à 2,49
Buis	0,91 à 1,32
Chêne	0,61 à 1,17
Écorce de liège	0,24
Frêne	0,70 à 0,84
Noyer	0,68 à 0,92
Peuplier	0,37 à 0,51
Poirier	0,73
Sapin	0,49 à 0,66
Anthracite	1,34 à 1,46
Houille	1,28 à 1,36
Lignite	1,10 à 1,35
Caoutchouc	0,99
Gutta-percha	0,97

Liquides.

Acide azotique fumant	1,52
Acide chlorhydrique hydraté	1,208
Acide sulfurique concentré	1,843
Alcool absolu	0,795
Benzine	0,89
Brome	2,966
Eau de mer (moyenne)	1,026
Esprit de bois	0,801
Essence de térébenthine	0,864
Éther	0,730
Huile d'olive	0,915
Lait	1,03
Mercure	13,600
Sulfure de carbone	1,263
Vin de Bordeaux	0,994
Vin de Bourgogne	0,991

CHAPITRE III

CAPILLARITÉ

I. — THÉORIE GÉNÉRALE.

216. Phénomènes capillaires. — Lorsqu'un tube du diamètre d'un cheveu est plongé dans un liquide, généralement le liquide ne se fixe pas dans le tube au même niveau que dans le vase extérieur. Dans un tube de verre *capillaire* AB, l'eau s'élève, en

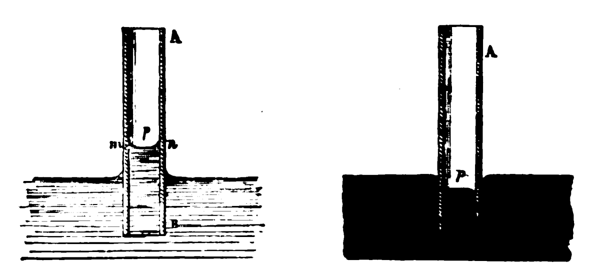


Fig. 326

même temps que sa surface se creuse en *ménisque* concave *mnp* ; au contraire le mercure est déprimé, et sa surface constitue un ménisque convexe. La dénivellation des liquides se produit dans le vide comme dans l'air (1) ; et, avec différents tubes de même substance plongés dans un même liquide, l'ascension ou la dépression est inversement proportionnelle au diamètre des tubes (2).

Ce phénomène est le type de toute une classe de faits que l'on a appelés par analogie *phénomènes capillaires*, tels que la dénivellation et la courbure des liquides au voisinage des parois, la formation des gouttes, les mouvements d'attraction ou de répulsion entre corps flottants, etc.

(1) *Saggi di naturali sperienze fatte nell' Accademia del Cimento*. Firenze; 1667.
(2) BORELLI, *De vi repercussionis et motionibus naturalibus a gravitate pendentibus*. Reggio; 1670.

217. État spécial des liquides à la surface. — Les liquides nt manifestement doués de cohésion. Si l'on trempe une baguette e verre dans l'eau, en la retirant on enlève une goutte dont les ortions inférieures ne sont retenues que par l'attraction du liquide ur lui-même. C'est à cette même attraction qu'est due la forme rrondie d'un globule de mercure à la surface d'un solide qu'il ne nouille pas. L'expérience montre d'ailleurs qu'il n'y a pas d'action ensible entre deux gouttelettes séparées par un intervalle appréciable. On appelle *sphère d'activité moléculaire* la sphère, de rayon très petit, à l'intérieur de laquelle l'action d'une molécule est sensible, et au delà de laquelle l'action de la molécule peut être regardée comme nulle. Cette même sphère comprend toutes les molécules agissant efficacement sur la molécule considérée.

A l'intérieur du liquide, sur une molécule quelconque distante de la surface libre d'une quantité supérieure au rayon de la sphère d'activité moléculaire, les forces de cohésion agissent également

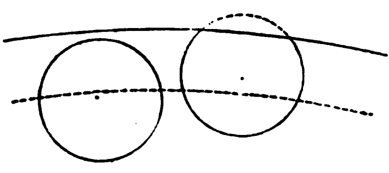


Fig. 327

dans tous les sens. Près de la surface, au contraire, la même symétrie n'existe plus, une portion des molécules efficaces faisant défaut. De là, dans la couche superficielle, un état spécial d'où résultent tous les phénomènes capillaires.

218. Historique des diverses théories proposées pour expliquer les phénomènes capillaires [1]. — La première idée que l'on se soit faite de l'état de la couche superficielle d'un liquide est due à Segner [2] qui assimila celle-ci à une sorte de membrane élastique enveloppant le liquide. Young [3] accepta cette con-

[1] Voir Quet, *Rapport sur les progrès de la capillarité*. Paris; 1867.

[2] Segner, *Commentationes Societatis scientiarum Göttingensis*, I; 1752.

[3] Young, *Phil. Trans.*; 1805.

ception que de nombreux travaux ont depuis solidement établie (¹ et dans un mémoire qui ne contient pas une seule formule, il po la véritable base de la théorie mathématique de la capillarité e établissant le premier la nature de la surface capillaire.

Peu après, Clairaut (²) analysa exactement toutes les forces qu peuvent concourir à élever l'eau dans un tube de verre; mais, dédai gnant les résultats de l'expérience, il ne fit qu'indiquer la voie à suivre.

Dans le supplément au livre X de la *Mécanique céleste*, Laplace (³) édifie une théorie complète des phénomènes capillaires, théorie qui a le caractère de grandeur et de netteté habituel aux œuvres de ce puissant génie (⁴).

Laplace admet que deux molécules de liquide s'attirent proportionnellement aux masses et, abstraction faite de la partie de la force attractive qui dépend de la gravitation, suivant une fonction de la distance qu'il laisse indéterminée et à laquelle il n'impose d'autre condition que de devenir insensible pour toute distance sensible des molécules. Il admet en outre que les liquides sont incompressibles.

Partant de cette double hypothèse, Laplace établit que, si la surface libre du liquide est plane, sur tout plan horizontal pris à une distance sensible de la surface s'exerce une pression verticale, la même sur chaque unité de surface du plan considéré. Cette pression, que Laplace désigne par K et dont il détermine la valeur en colonne du liquide donné

$$K = \frac{2\pi\rho}{3g}\int_0^\infty u^3 f(u)\,du,$$

(¹) Voir particulièrement Mossotti, *Lezioni elementari di Fisica matematica*. Firenze; 1843; Henry, Phil. Mag., XXVI, 541; 1845; Lamarle, *Mémoires de l'Académie de Belgique*, XXXV; 1864; Dupré, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), VI, VII, IX, XI et XIV; 1865-68 (les divers mémoires de Dupré sur la physique moléculaire ont été réunis par lui en un livre intitulé: *Théorie mécanique de la chaleur*. Paris, Gauthier-Villars; 1869); Van der Mensbrugghe, *Bulletins* et *Mémoires de l'Académie de Belgique, passim*, 1863-83; et Duclaux, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XXI et XXV; 1870-72.

(²) Clairaut, *Traité de la figure de la terre*. Paris; 1743.

(³) Laplace, *Supplément au livre X de la Mécanique céleste*. Paris; 1807.

(⁴) Il n'est question ici que de l'analyse de Laplace et non de l'exposé synthétique (*Nouvelle manière de considérer l'action capillaire*), où il établit ce qui se passe dans un tube capillaire en prenant pour base l'action de la partie inférieure du tube, contrairement à l'expérience.

ρ est la densité du liquide, u la distance de deux molécules, $f(u)$ la fonction inconnue de la distance qui règle leur action ciproque, est une constante pour chaque liquide.

Si la surface libre est courbe, d'après le genre de la courbure, pression moléculaire est augmentée (si la surface est convexe), u diminuée (si la surface est concave). Laplace trouve que cette ugmentation ou cette diminution est mesurée en chaque point par ine colonne liquide de hauteur

$$\pm \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) \text{ [1]},$$

[1] La forme de ce terme s'établit aisément comme il suit. Soit en M un élément ω de la surface capillaire. Normalement à la surface menons un filet cylindrique ayant pour base ω; et cherchons l'action exercée sur ce filet par la portion du liquide contenue entre le plan CD tangent en M et la surface AB, portion que, pour abréger, nous appellerons le ménisque. Les parties de ce ménisque voisines du point M étant seules efficaces, peu importera l'étendue des parties situées au loin. Pour la même raison, si nous coupons la surface capillaire par un plan quelconque mené suivant la normale en M, la section AMB pourra être

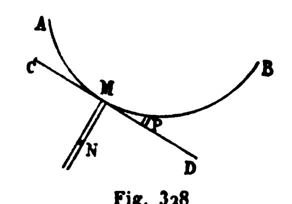


Fig. 328

considérée dans toute sa portion utile comme se confondant avec le cercle osculateur en M à cette section. Cela posé, par la normale MN menons un second plan sécant, faisant avec le premier un angle infiniment petit $d\theta$; les deux plans détachent dans le ménisque une sorte de coin dont nous allons chercher l'action sur un élément N du filet, situé à la distance y du point M. A cet effet, nous découperons le coin en éléments par des cylindres droits, concentriques, ayant la normale en M pour axe. Soient x et $x+dx$ les rayons des deux cylindres limitant un élément prismatique P, le volume de cet élément (supposé à très petite distance du point M) sera $x\,d\theta\,dx\,\frac{x^2}{2r}$, r étant le rayon de courbure en M de la section AMB; et la composante normale de l'action de cet élément P sur l'élément N de base ω, de hauteur dy et de même densité ρ que le ménisque, sera

$$\rho^2\frac{x^3 d\theta dx}{2r}\,\omega dy\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Dans le coin élémentaire opposé par le sommet est un élément égal P_1; les deux éléments exercent donc une action

$$\rho^2\frac{x^3 d\theta dx}{r}\,\omega dy\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

R et R′ étant les deux rayons principaux de courbure en ce point et H un coefficient caractéristique du liquide, la *constante capillaire* [1], lié encore à l'intensité de l'action moléculaire $mm'f(u)$

$$H = \frac{\pi\rho}{4g}\int_0^\infty u^4 f(u)\,du.$$

Ainsi, d'après Laplace, l'action de la couche superficielle est représentée par la somme des deux quantités

$$K \pm \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Par la normale MN menons maintenant un plan sécant perpendiculaire au plan AMB; avec ce plan et un second plan normal infiniment voisin découpons dans le ménisque un nouveau coin d'angle $d\theta$; et dans le coin ainsi formé considérons l'élément P′, de volume $\frac{x^3\,d\theta\,dx}{2r'}$; joignons-y dans le coin opposé l'élément égal P'_1: la composante normale de l'action de ces deux éléments sur l'élément N a pour expression

$$\rho^2 \frac{x^3 d\theta dx}{r'}\,\omega dy \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} f(\sqrt{x^2+y^2});$$

et la somme des actions normales exercées par les quatre éléments P et P′, P_1 et P'_1, est

$$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\rho^2\omega x^3\,d\theta\,dx\,dy\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

La somme $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ étant constante et égale à la somme $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ des inverses des deux rayons de courbure principaux de la surface au point M, on aura l'action normale de tous les éléments P compris entre les deux cylindres x et $x+dx$ en intégrant l'expression précédente par rapport à θ depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{\pi}{2}$. Pour avoir l'action du ménisque entier sur l'élément N, on intégrera ensuite par rapport à x depuis zéro jusqu'à la limite de l'action moléculaire ou bien jusqu'à l'infini, puisque la valeur de $f(u)$ est nulle pour toutes les valeurs de u supérieures à cette limite. Une dernière intégration par rapport à y depuis $y=0$ jusqu'à $y=\infty$ donnera l'action normale du ménisque sur le filet entier, et par suite la pression normale sur l'élément ω produite par l'attraction du ménisque

$$\omega\rho\frac{H}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),$$

H étant une constante indépendante de la position du point M (ÉD. DESAINS, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LI, 385; 1857).

[1] Cette constante H n'est autre chose, à un facteur constant près, que la tension superficielle F, dont il sera parlé plus loin,

$$H = \frac{2F}{d}:$$

d est la densité du liquide. La même quantité H est aussi souvent désignée par a^2, a étant la hauteur (en millimètres) $\sqrt{\frac{2F}{d}}$ à laquelle le liquide s'élève contre un plan (229).

is, de ces deux termes, un seulement, le dernier, de beaucoup le
is petit, intervient réellement dans l'explication des phénomènes
pillaires. Si, par exemple, il s'agit d'expliquer l'ascension de l'eau
ns un tube capillaire, on remarquera que la pression molécu-
re sur chaque unité de surface du liquide extérieur au tube est
; à l'intérieur du tube où, pour simplifier, nous supposerons le
quide courbé suivant une sphère, cette pression est $K - \frac{H}{R}$; le li-
uide s'élèvera donc à la hauteur $\frac{H}{R}$.

La surface capillaire a pour équation

$$z = \frac{H}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

: étant la distance d'un point quelconque de la surface au niveau
général.

Si l'on mène à la surface du liquide un plan tangent à une distance de la paroi insensible, mais cependant supérieure au rayon de la sphère d'activité moléculaire, l'angle θ de ce plan avec la paroi solide s'appelle *l'angle de raccordement* ou simplement *l'angle capillaire*. Laplace admet que cet angle est constant pour un même liquide en contact avec un même solide, et il trouve

$$\cos\theta = \frac{2H' - H}{H},$$

H' étant une troisième constante

$$H' = \frac{\pi\rho'}{4g}\int_0^{\infty} u^4 f_1(u)\,du :$$

ρ' est la densité du solide que touche le liquide, et $mm_1 f_1(u)$ exprime l'action moléculaire du liquide sur le solide.

Pour établir cette formule, Laplace procède d'une façon indirecte. Il cherche d'abord le volume U du liquide soulevé ou déprimé dans un tube cylindrique d'après la première loi générale $U = \frac{H}{2} c \cos\theta$, c désignant le contour intérieur du tube; il détermine

ensuite une deuxième expression de ce volume U : il suppose que la surface intérieure du tube soit prolongée dans le liquide, puis recourbée et enfin relevée normalement jusqu'au niveau général; il analyse les forces appliquées au liquide qui est contenu dans le tube et dans le canal fictif, enfin il applique le principe de l'équilibre dans les canaux, et il trouve $U = \frac{1}{2}(2H' - H)c$. La comparaison des deux résultats lui donne immédiatement l'expression du cosinus de l'angle capillaire en fonction des actions moléculaires et des densités.

Les lois posées par Laplace parurent d'abord complètement vérifiées par les mesures de Gay-Lussac; mais, lorsque Poisson [1] eut contesté la théorie de Laplace, les expériences peu nombreuses de Gay-Lussac ne furent plus jugées suffisantes : on fit de nouvelles expériences dont les résultats ne se trouvèrent pas favorables. Un moment l'œuvre de Laplace sembla entièrement ruinée.

L'objection de Poisson porte sur la compressibilité des liquides, négligée par Laplace. Mais l'hypothèse de l'incompressibilité était très admissible. Sans de telles suppositions, il n'y a pas de théories possibles, pas même celle du pendule simple où l'inextensibilité du fil est tout aussi loin de la réalité. Il est parfaitement logique d'établir une théorie sous telle restriction plausible que l'on veut, sauf à vérifier ensuite si la théorie s'accorde convenablement avec les faits. Il n'est pas moins important de se débarrasser ensuite de cette restriction, quand on le peut. La difficulté d'introduire la compressibilité du liquide était digne de l'effort de Poisson. Il en triompha, mais, par une singulière inadvertance, ainsi que l'a remarqué M. Quet [2], il omit de tenir compte des liaisons du système, et comme, sans ces liaisons, il n'y a plus à proprement parler de corps, il trouva pour les constantes de Laplace des résultats absolument inacceptables et crut ainsi avoir complètement détruit sa théorie. M. Quet a montré que les contradictions signalées par Poisson disparaissent dès qu'on introduit les forces de liaison. Il a prouvé aussi que, convenablement interprétées, les mesures précises des ascensions capillaires s'accordent entièrement avec les for-

(1) Poisson, *Nouvelle théorie de l'action capillaire*. Paris; 1831. Antérieurement à Poisson, Young avait déjà commencé l'attaque. (Young, *Supplement to the Encyclopædia Britannica*; 1824).

(2) Quet, *loc. cit.*

es de Laplace, dont la théorie sortit ainsi victorieuse du débat. e saurait donc y avoir de doute sur le terme qui exprime vation ou la dépression d'un point quelconque de la surface llaire par rapport au niveau général du liquide.

e son côté, Gauss [1] avait repris la théorie de Laplace, en nettant, comme lui, l'hypothèse de l'incompressibilité, mais en ployant une méthode qui lui permettait d'être beaucoup moins licite sur le siège des forces et sur la nature des liaisons entre les erses parties du système. Du principe des vitesses virtuelles (68) uss déduit les lois de Laplace, avec les mêmes constantes $\frac{H}{2}$ et r, sans faire intervenir la constante K, sur laquelle sa méthode e dispense d'avoir à se prononcer. La seule condition que le potentiel [2] soit minimum lui suffit pour résoudre tout le problème : pour fournir l'équation de la surface, pour établir le rapport entre le volume soulevé et le périmètre, et pour donner enfin directement la valeur de l'angle de raccordement en fonction des deux attractions. Depuis. M. Bertrand [3] a apporté à la méthode de Gauss des simplifications géométriques qui la facilitent beaucoup. Cette théorie, justement considérée comme un modèle de généralité et d'élégance, rend un compte exact de tous les phénomènes capillaires, sans toutefois nous en faire connaître la véritable nature. En particulier, elle nous laisse indécis sur l'état de la couche superficielle d'un liquide terminé par une surface plane. Et cependant, ainsi que nous l'avons remarqué plus haut, l'état de cette couche n'est certainement pas le même que celui du reste de la masse.

219. Tension superficielle. — Soient à l'intérieur du liquide un point M et un élément plan pq, mené par ce point. Les molécules situées au-dessus de pq, à une distance de l'élément moindre que le rayon de la sphère d'activité moléculaire, exercent sur les molécules situées au-dessous des attractions dont l'effet sur l'élément équivaut à celui d'une force MN, constituant ce que nous avons appelé la pression sur l'élément considéré (136). De même les

(1) Gauss, *Commentationes Societatis scientiarum Göttingensis recentiores*, VII ; 1822.
(2) Sur la manière de former ce potentiel, voir Moutier, *Annales de l'École normale supérieure*, (2), III, 70 ; 1874.
(3) Bertrand, *Journal de Liouville*, XIII ; 1832.

molécules situées au-dessous de *pq* attirent les molécules de la demi-sphère supérieure, et il en résulte une force égale et contraire à la précédente, dirigée suivant MN_1. Les attractions réciproques des

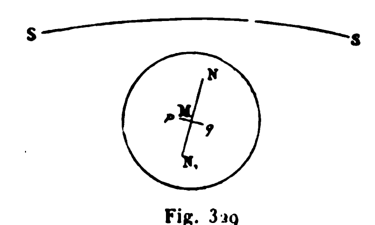


Fig. 329

molécules situées de part et d'autre de *pq* produisent ainsi sur chaque face de l'élément une pression normale MN, MN_1, laquelle. rapportée à l'unité de surface, constitue ce que Dupré a appelé l'*attraction au contact;* et la valeur de cette attraction est indépendante de la position et de l'orientation de l'élément au sein de la masse liquide, tant que le point M est à une distance de la surface plus grande que le rayon de la sphère d'activité moléculaire.

Mais si le point M se trouve dans le voisinage de la surface, il n'en est plus ainsi : la pression est plus faible que dans l'intérieur, et elle est moindre sur un élément parallèle que sur un élément normal à la surface. Soit en effet en M′ un élément *p′q′* parallèle à la

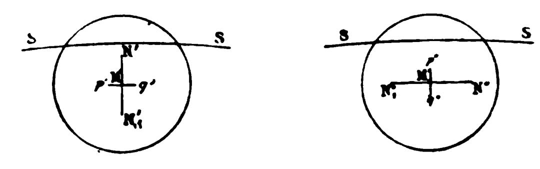


Fig. 330

surface SS, nous avons encore, sur les deux faces de l'élément, deux pressions M′N′, $M'N'_1$, égales et contraires, chaque action individuelle étant réciproque, mais ces deux pressions sont évidemment moindres que si la sphère M′ était complète ; elles sont inférieures à celles qui existent à l'intérieur du liquide. Si par le point M′ nous menons un élément *p″q″* normal à la surface, la suppression de la partie supérieure de la sphère M′ entraînera encore une diminution des pressions résultantes M′N″, $M'N''_1$; mais il est visible que cette diminution, provenant de l'affaiblissement des composantes les plus

bliques, sera moindre que pour l'élément $p'q'$, sur lequel les composantes affaiblies étaient précisément celles qui avaient le plus d'importance. La pression sur $p''q''$ est donc supérieure à la pression sur $p'q'$.

De cette analyse résultent deux conséquences :

1° A l'intérieur du liquide, indépendamment de la pression hydrostatique, existe une pression K, constante, normale à chaque élément, de quelque façon qu'il soit orienté.

2° Dans la couche superficielle d'épaisseur égale au rayon de la sphère d'activité moléculaire, la pression décroît de K à zéro ([1]). En outre, elle est plus forte parallèlement que normalement à la surface. Si donc on imagine la couche superficielle coupée normalement par un plan quelconque, il existe une force qui maintient réunis les deux bords de la section. Cette force F, rapportée à l'unité de longueur de la section, se nomme la *force de réunion* du liquide pour lui-même. On peut aussi la considérer comme une force contractile, une *tension superficielle*, s'exerçant également en tout point et suivant une direction quelconque dans le plan tangent.

Il importe de remarquer que ces forces parallèles à la surface ne sont pas en contradiction avec les forces normales seules considérées par Laplace ([2]). Les deux systèmes de forces résultent également de l'état particulier des molécules à la surface. Seulement, tandis qu'aucune expérience n'établit l'existence de la force K, il est aisé de vérifier que la surface libre d'un liquide est le siège d'une tension tangentielle à la surface, égale dans toutes les directions, et comparable en tous points à celle que présenterait une mince membrane de caoutchouc enveloppant le liquide ([3]).

([1]) A ce décroissement de la pression doit correspondre une diminution de la densité dans la couche superficielle; mais cette couche est si mince que jusqu'à présent on n'a pas réussi à rendre le fait sensible.

([2]) Le principe de la tension superficielle est aussi pleinement d'accord avec les idées de Poisson sur l'état de la surface du liquide, comme avec la théorie de Gauss, dont la constante fondamentale, qui n'est autre que l'énergie potentielle de l'unité de surface du liquide, selon les idées de Bosscha et de Clerk Maxwell, est numériquement égale à la tension superficielle par unité de longueur (Van der Mensbrugghe (*Bulletin de l'Académie de Bruxelles*, (2), XXXIX, 375; 1875).

([3]) Dans les solides certains phénomènes semblent attester aussi une tension superficielle : ainsi, d'après Karmasch, la ténacité d'un fil métallique est représentée par la somme de deux termes proportionnels, l'un à la section (173), l'autre à la circonférence (Voir Quincke, *Pogg. Ann.*, CXXXIV, 356; 1868).

Les expériences suivantes le montrent surabondamment ([1]).

1° A une règle de cuivre AB soudons un fil de même métal BC, courbé en arc de cercle ayant son centre au point O. En ce point engageons l'extrémité recourbée d'un deuxième fil de cuivre OD. A l'aide d'un pinceau recouvrons d'eau de savon (ou mieux de liquide glycérique) la règle AB et le fil OD, mouillons

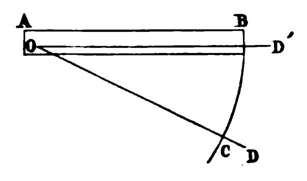


Fig. 331

aussi l'arc BC; écartons le fil OD de manière à l'amener en OC : une lame plane de liquide s'étend verticalement de AB à OC. Si alors nous lâchons le fil OD, il remonte en OD′ malgré l'action de la pesanteur, comme s'il était tiré par une membrane élastique : il est en réalité tiré par la tension superficielle de chacune des faces de la lame liquide (Dupré ([2])).

2° Un vase quadrangulaire plat ABCD a l'une de ses parois CD constituée par une lame métallique mince qui peut tourner librement autour de sa base C. Une petite cale en bois est placée en C, et un fil de lin DE tient la lame appuyée contre la cale dans une

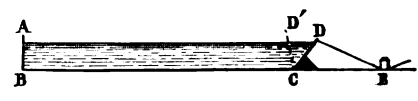


Fig. 332

position inclinée vers le dehors. On verse de l'eau dans le vase jusqu'au niveau AD, puis on brûle le fil DE. On voit alors la lame CD marcher vers AB et, malgré la poussée hydrostatique, venir en CD′, mue par la force de contraction de la couche superficielle du liquide ([3]) (Dupré).

([1]) Voir Duclaux, *Théorie élémentaire de la capillarité*. Paris, Gauthier-Villars; 1872.

([2]) Dupré, *loc. cit.*

([3]) Soient α l'angle que la lame CD fait primitivement avec l'horizon, F la tension superficielle par unité de longueur, l la largeur de la lame, le moment de la force qui tend à produire la rotation intérieure est $Fl \sin \alpha$ par unité

3° Trempons dans le liquide glycérique un cadre en fil de fer de forme quelconque, nous obtenons, en le retirant, une lame liquide plane, limitée au contour du cadre. Formons avec un fil de soie très fin une boucle que nous mouillons du même liquide et que nous

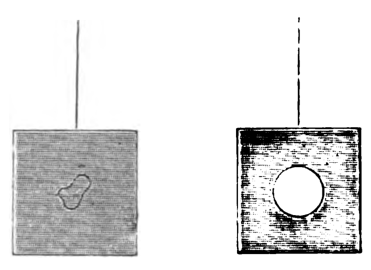


Fig. 333

déposons sur la lame : elle s'y étale en une courbe fermée, de forme quelconque. Avec un morceau de papier perçons la lame liquide à l'intérieur du fil, elle disparaît dans toute la boucle, et instantanément le fil se courbe en un cercle parfait, nous montrant ainsi qu'il est sur tout son pourtour sollicité par une traction égale dans toutes les directions (Van der Mensbrugghe [1]).

4° Les choses étant disposées comme dans l'expérience précédente, déposons à l'intérieur de la boucle une goutte d'un liquide

de longueur ; la résultante des pressions hydrostatiques a pour moment de signe contraire $\frac{1}{6}l^3 d \sin\alpha$, d étant la densité du liquide. La lame, abstraction faite de son poids, resterait donc en équilibre dans la position CD, si l'on avait

$$l=\sqrt{\frac{6F}{d}}.$$

La force de contraction l'emportera si l est plus petit que cette quantité,

$$l<\sqrt{\frac{6F}{d}};$$

c'est donc dans ces conditions que l'appareil devra être construit.

Le liquide le plus convenable à ces expériences est l'eau, qui donne $l<\sqrt{45}$, ou $l<6^{mm},7$. On peut aussi employer le mercure pour lequel on a $l<\sqrt{21}$, ou $l<4^{mm},6$. Pratiquement on évitera d'approcher trop de la limite, le poids de la lame et les résistances passives, quoique faibles, n'étant pas nuls. L'expérience réussit très bien avec l'eau si l'on prend $l=3^{mm}$ ou 4^{mm}, et avec le mercure si $l=2^{mm}$ ou $2^{mm},5$.

[1] Van der Mensbrugghe, *Bulletins de l'Académie de Belgique*, (2), XXII, 272 ; 1866.

à faible tension superficielle, une goutte d'alcool par exemple : cett goutte s'étale à la surface du premier liquide au dedans de l boucle, et y réduit la tension à n'être plus que la différence des ter

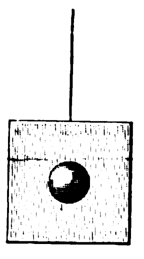


Fig. 334

sions superficielles des deux liquides; sous l'action de l'excès de la tension extérieure, excès constant dans toutes les directions, la boucle se tend encore en un cercle (Van der Mensbrugghe [1]).

5° Saupoudrons de grès fin la surface d'un bain de mercure, prenons une baguette de verre, et enfonçons-la verticalement dans le mercure : le sable répandu à la surface disparaît graduellement

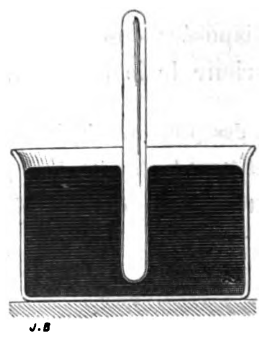


Fig. 335

tout autour de la baguette, comme si celle-ci entraînait avec elle une pellicule supportant le sable. Retirons la baguette, le sable ressort à la surface (Pasteur [2]). On peut faire la même expérience avec l'eau, en la recouvrant de poudre de lycopode et en employant une baguette de verre préalablement graissée.

(1) Van der Mensbrugghe, *Mémoires couronnés de l'Académie de Belgique*, XXXIV; 1869.

(2) Pasteur, *Revue des cours scientifiques*; 1864.

Ainsi, la surface d'un liquide est le siège d'une tension tangentielle, s'exerçant également dans tous les sens. Si nous coupons cette surface par un plan quelconque, chacun des bords de la section est tiré normalement par une force située dans la couche superficielle, et dont la valeur par unité de longueur de la section est constante et égale à F. C'est cette valeur constante, exprimée en milligrammes et rapportée au millimètre de longueur, que nous prendrons pour mesure de la tension superficielle.

La tension superficielle, ou constante de cohésion, comme on l'appelle aussi fréquemment, peut se mesurer de différentes manières. Actuellement, nous nous contenterons d'indiquer le procédé suivant, dû à M. Van der Mensbrugghe. Un fil fin de coton est tendu horizontalement. Un tube très fin en verre, muni à chaque extrémité d'un petit anneau en fil de fer et portant en son milieu un léger plateau de papier, est disposé horizontalement sous le fil. Avec un pinceau on introduit du liquide glycérique entre le fil et le tube séparés par la largeur des anneaux, et on abandonne le tube qui reste soutenu par la tension des deux faces de l'étroite couche liquide ainsi formée. On ajoute alors progressivement du sable fin dans le plateau de papier, jusqu'à détacher le tube que l'on reçoit sur un petit support placé au-dessous. Le poids en milligrammes du tube et de son plateau avec le sable contenu, divisé par le *double* de la longueur du tube en millimètres, mesure la tension superficielle. Par ce moyen et d'autres que nous ferons connaître dans la suite on a trouvé, à 15° environ :

Liquides.	Tension superficielle [1] F	Liquides.	Tension superficielle [1] F
Mercure	47	Essence de térébenthine	2,9
Eau	7,5	Chloroforme	2,7
Glycérine	7,2	Pétrole	2,6
Acide sulfurique	6,3	Alcool absolu	2,5
Huile d'olive	3,5	Esprit de bois	2,5
Sulfure de carbone	3,2	Éther	1,8

(1) Pour être évaluées en unités C. G. S., les tensions superficielles ici données devraient être multipliées par $\frac{10}{0,981} = 10,2$.

220. Pression normale produite par la tension superficielle quand la surface est courbe. — Quand la surface est plane, la tension superficielle, dont l'existence peut être considérée comme établie par les expériences précédentes en dehors de toute idée théorique, ne produit aucune pression à l'intérieur du liquide. Il n'en est plus de même lorsque la surface terminale du liquide est courbe. Dans ce cas, en effet, la tension superficielle produit une force normale dont il est aisé de comprendre l'existence et de calculer la grandeur, ainsi que l'a montré Dupré [1].

Soient O un point quelconque de la surface et ON la normale en ce point. Par cette normale menons n plans prolongés ANB, A_1NB_1, faisant entre eux des angles égaux, très petits, $\frac{\pi}{n}$. En O attachons un fil de longueur très petite λ, et avec l'autre extrémité de ce fil décrivons une courbe ACBD. L'action de toute la portion de la couche

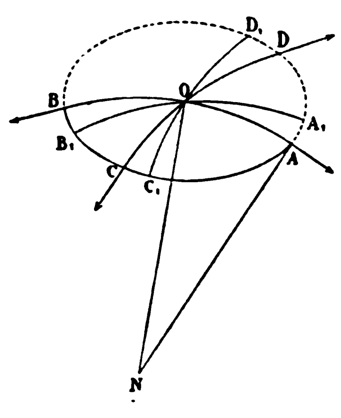


Fig. 336

superficielle extérieure à la courbe ACBD sur la calotte ayant pour pôle le point O et pour base la courbe ACBD est équivalente à un système de forces tirant normalement chaque élément A_1A avec une intensité $F \times A_1A = F\lambda\frac{\pi}{n}$. Cette force a une composante parallèle à la normale en O, $F\lambda\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\lambda}{r}$, r étant le rayon de courbure de la

(1) DUPRÉ, *loc. cit.*

tion AONB. Sur l'arc BB_1 tire une force égale, dont la composante parallèle à ON est aussi $F\lambda \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\lambda}{r}$. Ces deux composantes s'ajoutent et donnent une force parallèle à ON, égale à $\lambda^2 F \cdot \frac{1}{r}$. Dans le dièdre perpendiculaire à celui que nous venons considérer, nous aurons de même deux forces agissant normalement aux arcs C_1 et D_1, et donnant ensemble une force dirigée suivant N et égale à $\frac{2}{n}\pi\lambda^2 F \cdot \frac{1}{r'}$, r' étant le rayon de courbure de la section CD. La somme des composantes suivant ON des quatre forces considérées est donc $\frac{2}{n}\pi\lambda^2 F\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$. Chaque groupe semblable de quatre forces nous donnera une force analogue suivant ON. Or la somme $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$ est constante et égale à la somme $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ des courbures principales de la surface au point O; la somme de toutes ces forces suivant ON sera donc

$$\pi\lambda^2 F\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right);$$

et le rapport de cette force totale à la surface de la calotte, ou la pression en O, rapportée à l'unité de surface, aura pour expression

$$N=F\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

C'est sur cette formule que repose toute la capillarité.

II. — ÉQUILIBRE D'UNE MASSE LIQUIDE SOUS LA SEULE ACTION DES FORCES MOLÉCULAIRES.

221. Équilibre d'une masse liquide isolée. — Considérons d'abord une masse liquide éloignée de tout solide et dénuée de pesanteur. Pour qu'il y ait équilibre, la surface devra être telle que la pression lui soit partout normale et la même en tout point. La condition générale d'équilibre de la surface d'une masse liquide sans pesanteur sera donc

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=C^{te}, \tag{1}$$

équation qui comprend une infinité de surfaces, toutes celles qui les géomètres appellent *surfaces à courbure moyenne constante* telles que la sphère, le plan, le cylindre droit à base circulaire, etc.

222. Expériences de Plateau. — Plateau [1] a fait sur la statique des liquides soumis aux seules forces moléculaires des recherches très intéressantes par deux procédés expérimentaux différents.

1° *Figures obtenues avec l'huile en suspension dans l'eau alcoolisée.* — Pour soustraire un liquide à l'action de la pesanteur, Plateau l'introduit dans un deuxième liquide de même densité. Il fait un mélange d'alcool et d'eau ayant exactement la densité de l'huile d'olive, et avec une seringue recourbée il introduit dans ce mélange de l'huile qui y reste suspendue, éprouvant une poussée précisément égale à son poids; elle est donc dans le même état que si la pesanteur n'existait pas, et par conséquent elle prend une forme qui satisfait à la relation (1).

L'expérience se fait dans un vase cubique à parois de glace. Si



Fig. 337

l'on injecte simplement l'huile dans le mélange alcoolique, on la voit s'arrondir en une sphère parfaite, que l'on peut, sans trop de

[1] Plateau, *Mémoires de l'Académie de Belgique*; 1843-1863; ou *Statique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Gand et Paris; 1873.

fficulté, amener à avoir un décimètre de diamètre; et l'expérience ontre que cette forme est parfaitement stable : quand on essaie : déformer la masse, elle revient toujours à la figure sphérique.

Une expérience intéressante consiste à former une sphère d'huile ıtour d'une tige à laquelle on imprime ensuite un mouvement e rotation sur elle-même : la sphère se convertit en un ellipside de révolution aplati; pour une vitesse suffisante, une partie e la masse peut se détacher en donnant autour du sphéroïde cenral un anneau que l'on ne saurait s'empêcher de comparer à 'anneau de Saturne.

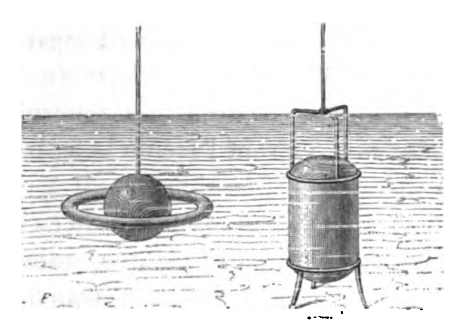


Fig. 338

Pour avoir d'autres surfaces satisfaisant à la relation (1), il faut assujettir la surface de l'huile à passer par certains points, ce que l'on obtient aisément à l'aide de pièces solides, mouillées d'huile.

Veut-on, par exemple, faire un cylindre droit à base circulaire, lequel, à ne considérer que sa surface latérale indéfinie, est évidemment l'une des formes comprises dans la relation (1), on placera dans l'appareil en regard l'un de l'autre deux petits disques en acier de même diamètre, à une distance de deux ou trois fois ce diamètre, et on injectera entre les deux disques une masse d'huile suffisante pour remplir l'espace qui les sépare. En ajoutant ou retranchant ensuite du liquide, on arrivera facilement à obtenir un cylindre parfait, représentant une portion de la surface théorique.

Si l'on remplace les deux disques par des anneaux, quand la surface latérale a pris exactement la forme cylindrique, on a aux deux extrémités deux calottes sphériques dont les rayons égaux ρ sont

le double du rayon R du cylindre, car d'après l'équation (1) o
doit avoir

$$\frac{2}{\rho}=\frac{1}{R};$$

c'est ce que l'on peut aisément vérifier par des mesures au cath-
tomètre.

Bien que le cylindre *indéfini* soit une figure d'équilibre, ce n'es
une figure d'équilibre stable qu'autant que le rapport entre s
hauteur et son diamètre est inférieur au nombre π. Au delà, l
cylindre ne persiste point : il se transforme spontanément en un
série de sphères isolées, égales, également espacées, ayant leurs
centres rangés sur la droite qui formait l'axe du cylindre, et dans
les intervalles desquelles se trouvent des sphérules de différents
diamètres, disposées aussi suivant l'axe de la figure. La génération
de ces sphérules se rattache très simplement à celle des sphères
principales : si, en effet, on suit la résolution du cylindre en sphères,
on voit celles-ci, au moment de se séparer, unies encore par un
filet cylindrique qui, en s'amincissant, s'étrangle à son tour sur

Fig. 339

deux régions; chacun de ces petits étranglements se convertit en
un filet plus délié qui se brise en deux points et donne naissance à
une sphérule isolée très petite, tandis que la partie moyenne se
transforme en une sphérule plus grande. La durée de la transformation totale du cylindre est sensiblement proportionnelle au
diamètre. La longueur de la portion engendrant une grosse sphère
est également, pour un même liquide, proportionnelle au diamètre
du cylindre.

Au moyen de l'huile en suspension dans l'eau alcoolisée, Plateau a pu étudier d'une manière complète les surfaces de révolution
rentrant dans la relation (1), et qui comprennent, outre la sphère,
le cylindre et le plan, une infinité de figures se rattachant à trois
types que d'après la forme de leur courbe méridienne il appelle

l'*onduloïde*, le *caténoïde* et le *nodoïde* ([1]); il a même étendu ses recherches à celles des figures d'équilibre qui ne sont pas de révolution, telles que l'*héliçoïde gauche à plan directeur*.

Avec des carcasses polyédriques en fil de fer, Plateau a obtenu des polyèdres entièrement liquides à l'exception des arêtes, et dont toutes les faces devenaient planes au même moment, comme le veut la relation (1). Les mêmes carcasses permettent de réaliser des assemblages fort remarquables de lames minces régulièrement disposées. Ayant formé, par exemple, un cube liquide, on applique au milieu de l'une des faces le bec de la seringue, et on enlève graduellement de l'huile; on voit alors toutes les faces de la figure se creuser simultanément sans que le liquide se détache des fils de la charpente; et en continuant l'opération, on finit par avoir un système de douze lames planes, partant des douze arêtes solides, et allant toutes s'attacher à une lame rectangulaire placée au milieu. Mais ces expériences sont fort délicates, et il est beaucoup plus aisé de les faire par un autre procédé, qui permet aussi d'obtenir sans peine de grosses bulles.

2° *Formes des lames minces de liquide glycérique*. — Tout le monde sait combien il est aisé de souffler des bulles de savon. C'est en employant une eau de savon convenable que Plateau a réussi à réaliser des systèmes laminaires d'une grande beauté. Remarquons d'abord que les conditions d'équilibre d'une lame liquide, assez mince pour que son poids soit négligeable, sont identiquement les mêmes que pour une masse liquide pleine et dénuée

([1]) Pour réaliser par exemple une portion de caténoïde (dont la courbe méridienne est une chaînette), « on forme d'abord un cylindre entre deux anneaux solides dont la distance n'excède pas les deux tiers du diamètre, puis on enlève graduellement du liquide à la masse. Alors, tandis que la portion comprise entre les anneaux se creuse en un étranglement de plus en plus profond, on voit les bases perdre peu à peu leur convexité et devenir enfin tout à fait planes. Or dans cet état de la figure d'huile, on a sur les bases $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=0$; mais l'équilibre exige que la quantité $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ ait la même valeur sur toute la surface de la figure réalisée. Si donc on appelle M le rayon de courbure de la ligne méridienne, N la normale au point considéré, on aura aussi sur l'étranglement $\frac{1}{M}+\frac{1}{N}=0$, ce qui est le caractère du caténoïde. »

de pesanteur. Cette proposition résulte immédiatement du principe évident que, lorsqu'une surface satisfait à la condition générale de l'équilibre, il est indifférent que le liquide soit situé d'un côté ou de l'autre de la surface ; en d'autres termes, à toute figure d'équilibre en relief correspond une figure d'équilibre identique en creux. Or, les deux faces d'une lame très mince pouvant être considérées comme étant deux surfaces identiques, l'une en relief l'autre en creux, si l'une des faces constitue une surface d'équilibre, il en est de même de l'autre, et la lame entière est en équilibre.

L'eau de savon permet d'obtenir des lames minces, mais par suite de l'évaporation rapide de l'eau à leur surface, ces lames n'ont qu'une durée très courte, à moins qu'on ne les conserve en vase clos. Les lames sont beaucoup plus persistantes si l'on ajoute à l'eau de savon de la glycérine, qui non seulement ne s'évapore pas, mais au contraire attire l'humidité de l'air. Le *liquide glycérique* de Plateau consiste en un mélange de trois volumes d'eau de savon filtrée (25 grammes de savon de Marseille frais dans un litre d'eau), et de deux volumes de glycérine pure [1]. Le mélange bien agité est abandonné à lui-même pendant plusieurs jours, puis refroidi durant quelques heures vers 3° au-dessus de zéro, et enfin filtré à froid deux ou trois fois : le liquide limpide est conservé dans des flacons.

Bulles liquides.

Avec ce liquide on obtient aisément des bulles de plusieurs décimètres de diamètre, et qui, déposées sur un anneau en fil de fer mouillé, se maintiennent à l'air pendant des heures.

Excès de pression à l'intérieur d'une bulle. — Dans une bulle de savon, la pression de l'air intérieur surpasse la pression atmosphérique d'une quantité égale à la pression produite par la tension su-

[1] On peut remplacer la glycérine par du sucre, en employant, par exemple, 30gr de sucre pour 100cc d'eau de savon à $\frac{15}{1000}$ (Terquem). Les figures produites avec du collodion riciné renfermant $\frac{1}{3}$ à $\frac{1}{2}$ d'huile de ricin, se conservent en quelque sorte indéfiniment (Gernez).

erficielle; on peut aisément montrer cet excès de pression soit en daptant à la bulle un petit manomètre à eau (1), soit en approhant une bougie du tube qui a servi à la gonfler : la flamme incline et peut même s'éteindre sous l'action de l'air que la bulle hasse en se contractant (2). Chacune des surfaces donne naissance une pression, par unité de surface, égale à $\frac{2F}{R}$; l'excès de pression ntérieure est donc $p = \frac{4F}{R}$ (3). Par conséquent, si l'on souffle une érie de bulles avec un même liquide, on doit avoir $pR = C^{te}$. C'est ce que Plateau a vérifié d'une façon très précise.

Limite supérieure du rayon d'activité sensible. — L'exactitude de cette formule suppose que la bulle constituant la lame n'a nulle part une épaisseur moindre que le double du rayon d'activité sensible de l'attraction moléculaire. On doit même admettre que la lame liquide ne peut plus subsister si son épaisseur en quelque point devient inférieure à cette limite; car, la tension diminuant alors en cet endroit, les parties environnantes tireront à elles le liquide et aminciront la région considérée jusqu'à la détruire. On en peut déduire une limite supérieure du rayon d'activité sensible. Soufflons une bulle à l'extrémité d'un petit entonnoir et recouvrons-la d'un bocal en verre pour la conserver plus longtemps. Au bout de quelques instants elle sera le siège d'un phénomène très remarquable : en plaçant l'œil à la hauteur de son centre, on verra un large espace uniformément coloré, sensiblement circulaire, et entouré d'anneaux diversement teintés : d'où l'on doit conclure, d'après les lois de l'optique, que la lame a une épaisseur uniforme dans toute l'étendue de la bulle (sauf, bien entendu, à la partie tout à fait inférieure, où s'accumule toujours une petite quantité de liquide), les anneaux qui entourent l'espace central étant dus évidemment à l'obliquité de la vision. Cette uniformité d'épaisseur avait déjà été remarquée par Newton. A partir du moment où la bulle a pris l'aspect en question, elle le garde jusqu'à ce qu'elle éclate, la teinte uniforme de l'espace central remontant

(1) Henry, *loc. cit.* Voir aussi Sire, *Étude sur la forme globulaire des liquides.* Besançon; 1863.

(2) Violle, *Journal de physique*, IV, 313; 1875.

(3) W. Thomson, *Phil. Mag.*, (4), XVII, 61; 1858.

lentement l'échelle des couleurs des anneaux de Newton. Plateau a conservé ainsi pendant trois jours, sous une pression intérieure et avec un diamètre sensiblement constants, une bulle de liquide glycérique; lorsqu'elle a éclaté, elle était parvenue au passage du jaune au blanc du premier ordre, ce qui lui assignait une épaisseur de $0^{\mu},1134$. Le rayon de la sphère d'activité moléculaire du liquide glycérique est donc inférieur à $0^{\mu},0567$.

Déformation des bulles. — De la formule $p = \frac{4F}{R}$ on conclut aisément que si deux bulles hémisphériques [1], produites à la surface d'un liquide, viennent à se toucher par leurs bases, le rayon ρ de la cloison qui se forme entre les deux bulles doit satisfaire à la relation $\frac{4F}{R} - \frac{4F}{R'} = \frac{4F}{\rho}$, d'où $\rho = \frac{RR'}{R'-R}$, ce qui, joint à la condition que les trois lames aboutissent les unes aux autres sous des angles de 120°, détermine complètement les conditions d'un tel assemblage.

En déposant une bulle de liquide glycérique sur un anneau horizontal porté par trois petits pieds, et en la saisissant en haut avec un autre anneau soutenu par une petite fourche, on peut l'étirer, et on la voit perdre de plus en plus sa courbure latérale et se convertir, pour un certain écartement des anneaux, en un cylindre parfaitement régulier, offrant des bases convexes, comme les cylindres d'huile pleins.

Avec des précautions convenables on peut de même réaliser des portions de caténoïde, d'onduloïde et de nodoïde.

Systèmes laminaires.

Mais les expériences les plus curieuses et les plus faciles sont celles qui se rapportent aux systèmes laminaires développés dans des charpentes polyédriques. On se procure une collection de charpentes métalliques [2] représentant chacune l'ensemble des arêtes

(1) La lame soulevée par l'effort d'une bulle d'air pour se dégager, constitue nécessairement une portion de sphère ; mais elle ne peut jamais atteindre un hémisphère complet ; seulement elle en approche d'autant plus qu'elle est plus grande, et, dès qu'elle est un peu grosse, la différence devient insensible.

(2) Dans ces charpentes les arêtes horizontales peuvent être seules en fil

'un polyèdre, par exemple d'un cube, d'un tétraèdre régulier, d'un ctaèdre régulier, d'un prisme droit à base triangulaire, etc. Preiant une de ces charpentes, on la plonge dans le liquide glycérique;

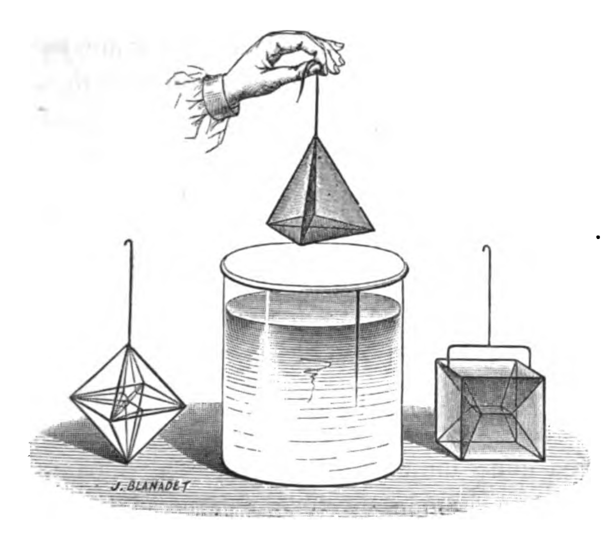


Fig. 340

quand on la retire, l'adhérence du liquide aux arêtes solides détermine la formation d'un ensemble de lames occupant l'intérieur de

métallique, les arêtes verticales ou inclinées étant des cordons flexibles : cette disposition, imaginée par M. Terquem, permet de plonger aisément la charpente tout entière dans le liquide glycérique que contiendra une cuvette peu profonde, et avec une faible quantité de liquide on pourra employer une grande charpente. Il faut observer toutefois que les fils flexibles se courbent nécessairement en arcs de cercle, dont on diminuera la courbure en accrochant au système un poids convenable. Que l'on prenne, par exemple, une charpente formée de deux tiges rigides horizontales en laiton argenté, réunies par deux fils de soie. Si on la plonge dans le liquide glycérique et qu'on la retire lentement, les deux fils flexibles, d'abord accolés, s'écartent peu à peu, et l'on obtient une lame liquide, limitée en haut et en bas par deux lignes droites et latéralement par des arcs de cercle. Si l'on suspend un poids au milieu de la tige horizontale inférieure, on voit la lame s'allonger en même temps que la courbure des arcs latéraux diminue. Soit p le poids de la tige inférieure avec sa surcharge : en négligeant le poids des fils et celui de la lame, on trouve

$$p = 2F\left(2R\cos\frac{l'}{2R} + l\right),$$

l étant la longueur des tiges horizontales, l' la longueur des fils flexibles, et R le rayon de courbure de ces fils. (TERQUEM, *Journal de physique*, VII, 406; 1877.)

la charpente. La disposition de ces lames est parfaitement déterminée pour chaque charpente. Ainsi, dans la charpente cubique on obtient invariablement, comme nous l'avons déjà indiqué, l'assemblage de douze lames, qui partent respectivement de douze arêtes solides et aboutissent toutes à une treizième lame beaucoup plus petite, de forme quadrangulaire, et occupant le milieu du système.

Ces systèmes laminaires sont très remarquables : ils offrent une régularité parfaite, les arêtes liquides qui unissent entre elles les lames dont ils se composent ont une finesse extrême, et ces lames étalent après quelque temps les plus riches couleurs.

Une lame sur laquelle la pression atmosphérique s'exerce des deux côtés satisfait nécessairement à l'équation

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=0;$$

elle constitue donc toujours une surface à courbure moyenne nulle. On constate aisément en effet que, toutes les fois qu'une lame présente une courbure dans une direction, elle se courbe en sens opposé dans la direction rectangulaire ; il ne serait même pas très difficile de prendre des mesures précises.

A cette règle générale, ajoutons les deux lois suivantes, découvertes par Plateau :

1° A une même arête liquide n'aboutissent jamais que trois lames, et celles-ci font entre elles des angles égaux.

2° Quand plusieurs arêtes liquides aboutissent à un même point dans l'intérieur du système, ces arêtes sont toujours au nombre de quatre et forment entre elles, au point dont il s'agit, des angles égaux [1].

Ces lois ne conviennent pas aux arêtes et aux sommets de la charpente solide. Plateau distingue donc les systèmes laminaires en *parfaits*, *imparfaits* et *nuls*.

Les premiers sont ceux dans lesquels chaque fil solide ne sert d'origine dans toute sa longueur qu'à une seule lame. Chaque

[1] Ces lois s'appliquent aux assemblages laminaires constituant la mousse qui se forme sur certains liquides, tels que le vin de Champagne, la bière, etc. On les vérifie aisément à l'aide du liquide glycérique, avec lequel on peut produire un édifice cloisonné à grands compartiments.

ıme est dépendante des autres dans toute son étendue, et celles des rêtes liquides qui ont une extrémité sur la charpente partent des ɔmmets mêmes de cette dernière. Tels sont les systèmes qui se proɹuisent dans les charpentes du tétraèdre, de l'octaèdre et du tube.

Quand certaines parties des fils solides de la charpente servent à a fois d'origine à deux portions de lames, le système est imparfait, ›arce que les portions de lames dont il s'agit sont rendues indépenlantes l'une de l'autre par le fil solide qui les sépare. Les prismes ıyant plus de six faces latérales donnent des systèmes imparfaits.

Avec d'autres charpentes enfin on n'obtient jamais que des lames planes occupant respectivement toutes les faces du polyèdre, moins une qui sert d'ouverture pour la rentrée de l'air. Dans un pareil système, toutes les lames sont rendues indépendantes les unes des autres sur l'étendue entière de leur contour par les fils solides de la charpente : le système est donc nul. Tel est, par exemple, celui que l'on observe avec la charpente de l'icosaèdre régulier, et en général avec les charpentes de tous les polyèdres dont les angles dièdres sont notablement supérieurs à 120°.

III. — PHÉNOMÈNES PRODUITS AU CONTACT DES SOLIDES PAR LES LIQUIDES QUI LES MOUILLENT.

223. La couche liquide adhérente au solide est seule active. — Nous étudierons maintenant les phénomènes que présentent les liquides au voisinage des corps solides qu'ils mouillent. Ces phénomènes se rattachent directement à ceux qui précèdent, en ce sens qu'ils sont encore uniquement régis par la cohésion du liquide, le solide n'intervenant que comme support de la couche liquide qui adhère à tout corps parfaitement mouillé.

L'adhésion des liquides aux solides est l'une des formes sous lesquelles les forces moléculaires se manifestent le plus nettement. Un disque de verre, posé sur la surface de l'eau, ne peut être détaché que par un certain effort; et encore ne se sépare-t-il du liquide qu'en entraînant avec lui une couche qui lui reste adhérente. Lors donc que, suivant l'exemple de Taylor (¹), on suspend le disque au plateau d'une balance, et que l'on ajoute graduellement des poids sur le

(¹) Taylor, *Phil. Trans.*; 1712.

plateau opposé jusqu'à rompre l'adhérence, le fait réel étant la rupture de la colonne liquide soulevée, on a simplement ainsi une mesure imparfaite de la cohésion du liquide [1]. Quand on remplace l'eau par le mercure, dont la cohésion est beaucoup plus forte, il n'y a pas de colonne liquide soulevée, bien que le plateau de verre reste collé à la surface du mercure sous un effort très supérieur à celui qui le soulevait dans le cas de l'eau. Mais il n'est pas plus facile de mesurer ainsi l'adhésion du mercure au verre : en mettant plus ou moins longtemps à ajouter les poids, Gay-Lussac trouva qu'il fallait 296gr ou 158gr pour enlever un même disque de 118mm,366 de diamètre. Si ces expériences ne comportent pas de mesures exactes, elles établissent du moins d'une manière incontestable l'adhérence des liquides aux solides.

Nous admettrons donc qu'un solide, lorsqu'il est parfaitement mouillé par un liquide, retient à sa surface une couche adhérente de liquide, au delà de laquelle l'action du solide est insensible [2], et qui agit elle-même exactement comme le reste du liquide, dont elle ne diffère pas sensiblement par sa densité.

Cela posé, examinons successivement les cas les plus intéressants où se manifeste l'action de cette gaine liquide, en commençant par celui de ces phénomènes qui a été le plus étudié.

1° TUBES CAPILLAIRES.

224. Ascension d'un liquide dans un tube qu'il mouille. — Un liquide à l'intérieur d'un tube qu'il mouille étant en réalité

(1) Laplace a calculé la force, $\pi r^2 \rho \sqrt{H} \cos \frac{\theta}{2} - \varepsilon$, nécessaire pour triompher de cette cohésion, et Gay-Lussac a mesuré cette force sur divers liquides avec un disque de 118mm,366 de diamètre. Voici les résultats de l'expérience comparés à ceux de la théorie, la constante H, qui entre dans l'expression théorique, étant déterminée par la hauteur à laquelle le liquide s'élève dans un tube de 1 millimètre de diamètre :

	Poids théorique.	Poids observé.
Eau	59g,587	59g,40
Alcool de densité 0,820	31 ,144	31 ,08
— — 0,860	32 ,860	32 ,87
— — 0,942	37 ,283	37 ,15
Essence de térébenthine.	34 ,350	34 ,10

(2) L'épaisseur de cette couche est cependant de moins d'un micron dans la plupart des liquides (264).

contact d'un tube du même liquide, sa surface libre se raccorde nécessairement sous un angle nul avec la paroi intérieure, en d'autres termes *l'angle capillaire est nul*. Tout le long de la ligne de raccordement s'exerce la tension superficielle, laquelle est égale à F par unité de longueur et dirigée parallèlement à l'axe du tube. Donc, p étant le périmètre de la section de raccordement, on a parallèlement à l'axe une force Fp, qui tire la couche superficielle vers le haut; pour l'équilibre, cette même couche doit être tirée vers le bas par une force égale : le liquide s'élèvera donc dans le tube jusqu'à ce que le poids de la colonne verticale soulevée soit Fp.

Loi de Jurin. — Si le tube est un cylindre vertical à base circulaire, l'équation de l'équilibre sera

$$F.2\pi r = \pi r^2 h d,$$

r étant le rayon du tube, h la hauteur d'un cylindre équivalent au volume du liquide soulevé, ou ce que nous appellerons, pour abréger, la *hauteur moyenne* du liquide dans le tube, d la densité du liquide. Cette équation peut s'écrire

$$rh = \frac{2F}{d}:$$

pour un même liquide les hauteurs moyennes sont en raison inverse des rayons des tubes; c'est la loi dite habituellement loi de Jurin [1], bien qu'elle soit due à Borelli [2]. En outre, le produit constant rh est égal à $\frac{2F}{d}$, ce qui donne un moyen très exact et souvent employé de déterminer la constante capillaire F.

Enfin, lorsque l'équilibre existe, la hauteur z du liquide au-dessus du niveau extérieur fait équilibre en chaque point à la pression $N = F\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$; on a donc

$$z = \frac{F}{d}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

[1] JURIN (James), médecin, membre de la Société royale de Londres, *Phil. Trans.*; 1718.

[2] BORELLI, *loc. cit.*

Telle est l'équation de la surface du liquide dans le tube. On voi que dans le cas actuel cette surface est nécessairement concave

Laplace avait déduit tous ces faits de sa théorie, et depuis, plusieurs géomètres ont repris cette question.

Démonstration de M. Bertrand. — Bien que nous nous proposions de montrer ici que la considération de la tension superficielle suffi à expliquer les phénomènes capillaires, nous indiquerons la méthode très simple à l'aide de laquelle M. Bertrand obtient l'expression du volume du liquide soulevé dans un tube cylindrique vertical.

Cette méthode, qu'il a appliquée à un exposé complet de la théorie de Gauss, repose sur une propriété remarquable des surfaces, démontrée par M. Bertrand dans son mémoire : *Sur les surfaces isothermes orthogonales* (¹).

Soit sur une surface quelconque MABC un rectangle élémentaire. découpé par quatre lignes de courbure; les normales à la surface

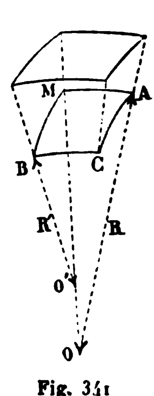


Fig. 341

en M et en A se coupent en un point O, et l'on a $MA = R\theta$, R étant l'un des rayons de courbure de la surface au point M, et θ l'angle MOA; les normales à la surface en M et B se coupent en O', et l'on a de même $MB = R'\theta'$, R' étant l'autre rayon de courbure de la surface au point M, et θ' l'angle MO'B. L'aire du rectangle MABC est donc

$$\omega = RR'\theta\theta'.$$

Prolongeons toutes les normales à la surface vers l'extérieur d'une

(¹) Bertrand, *Journal de Liouville*, IX, 117; 1844.

ême quantité très petite ε; nous formons ainsi une seconde surce parallèle à la première, sur laquelle les normales en M,A,B,C arqueront les quatre sommets d'un rectangle élémentaire, et l'aire e ce nouveau rectangle sera

$$\omega' = (R + \varepsilon)(R' + \varepsilon)\theta\theta',$$

u, si l'on néglige les infiniment petits du deuxième ordre,

$$\omega' = \omega + \varepsilon(R + R')\theta\theta',$$

ou enfin, si l'on remplace $\theta\theta'$ par sa valeur tirée de la première expression,

$$\omega' = \omega + \omega\varepsilon\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Cela posé, prenons un tube cylindrique vertical dans lequel s'élève un liquide, et considérons la surface du liquide dans le tube

$$z = F\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Soient ω un élément de cette surface et φ l'angle que fait la normale à l'élément avec la verticale; le volume du cylindre projetant cet élément sur le plan de la surface libre du liquide dans le vase est $z\omega\cos\varphi$, et le volume total du liquide soulevé dans le tube est

$$V = \Sigma z\omega\cos\varphi.$$

Construisons une seconde surface en prenant sur les normales à la surface capillaire une même quantité ε à l'intérieur du liquide. A chaque élément ω de la première correspondra un élément ω' de la deuxième; et, d'après le théorème de M. Bertrand, on aura

$$\omega' = \omega + \omega\varepsilon\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

ou

$$\omega' = \omega + \frac{\omega \varepsilon z d}{F}.$$

On a donc

$$\omega z = \frac{F}{\varepsilon d}(\omega' - \omega)$$

et, par suite,

$$V = \frac{F}{\varepsilon d}(\Sigma\omega' \cos\varphi - \Sigma\omega \cos\varphi).$$

Or $\Sigma\omega \cos\varphi$, $\Sigma\omega' \cos\varphi$ sont les projections horizontales de la surfac libre du liquide et d'une surface infiniment voisine A'B', limité aux normales menées suivant le contour de la première. La diffé

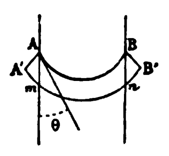


Fig. 342

rence de ces deux projections est égale à la projection horizontale de la zone $A'm$ de la deuxième surface extérieure au tube, c'est-à-dire à $p\varepsilon \cos\theta$, p étant le périmètre du contour de raccordement, et θ l'angle capillaire. On a donc finalement

$$V = \frac{F}{d} p \cos\theta.$$

Si la section du tube est un cercle de rayon r, et si l'on désigne par h la hauteur d'un cylindre de rayon r et de volume équivalent à celui de la colonne soulevée, la relation précédente se réduit à

$$hr = \frac{2F}{d} \cos\theta;$$

lorsque $\theta = 0$, nous retrouvons notre formule

$$hr = \frac{2F}{d}.$$

Avant de comparer cette formule à l'expérience, quelques marques sont nécessaires.

Remarques. — La hauteur moyenne h n'est pas directement servable ; ce que l'on mesure, c'est la distance h_1 du point le lus bas du ménisque au niveau général du liquide : h est égale cette hauteur h_1 plus la hauteur d'un cylindre équivalent au olume compris entre le plan tangent à la base du ménisque à la surface libre de ce ménisque. Dans les tubes très étroits, la urface capillaire peut être confondue sans erreur sensible avec la surface d'une demi-sphère, le volume du ménisque v est égal à $\pi r^2 . r - \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^3$. On a donc

$$\pi r^2 h = \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^3,$$

ou

$$h = h_1 + \frac{1}{3} r:$$

c'est la correction de Laplace.

Pour les tubes qui ne sont pas très étroits, cette correction est insuffisante. Poisson [1] l'a modifiée par l'addition d'un nouveau terme $-\frac{r^3}{3a^2}(\log 4 - 1)$, où $a_2 = \frac{2F}{d}$ (218).

Hagen [2] a proposé de substituer au cercle de Laplace une ellipse dont le grand axe serait horizontal ; on a alors

$$h = h_1 + \frac{1}{3} b,$$

(1) Poisson, *loc. cit.*, p. 112.
(2) Hagen, *Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Berlin*; 1845.

b étant le petit axe de l'ellipse $\frac{3a^2r}{3a^2+r^2}$. Éd. Desains a développé cette méthode, et a montré qu'elle convenait très bien tant que le rayon du tube ne dépasse pas 3 ou 4 millimètres.

Au delà, ces appréciations deviennent insuffisantes, et un calcul exact est nécessaire. En intégrant l'équation générale de la surface capillaire pour les tubes cylindriques verticaux et à section circulaire, M. Quet a obtenu une série qui donne le rapport de la hauteur moyenne à la hauteur observée, en fonction de cette dernière quantité et du rayon du tube. On peut donc, dans tous les cas, comparer avec certitude l'expérience à la théorie.

On remarquera enfin que r est le rayon du tube au niveau où s'arrête le liquide. Dans la démonstration, la colonne considérée est le cylindre vertical ABab, projetant le ménisque AB sur la surface horizontale du liquide extérieur. Il résulte de là que la hauteur à laquelle un liquide se maintient dans un tube en entonnoir ABCD ne dépend que du diamètre du tube dans la région de la surface terminale AB, et nullement des dimensions de la partie inférieure CD (Jurin).

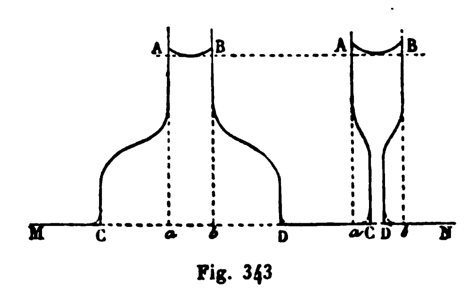


Fig. 343

Expériences de Gay-Lussac. — La première observation de l'ascension capillaire de l'eau paraît avoir été faite par Léonard de Vinci. Depuis lors, bien des physiciens s'attaquèrent à cette question ; mais les expériences ne s'accordèrent pas entre elles, et quand Laplace voulut comparer sa théorie aux faits, il dut prier Gay-Lussac d'entreprendre de nouvelles recherches dans des conditions meilleures. La discordance des travaux antérieurs provenait manifestement de ce que, la surface interne des tubes étant habituelle-

ıent recouverte d'un voile très mince de matière étrangère déposée ır le verre, on avait en réalité fait usage des tubes les plus divers. ay-Lussac opéra toujours avec des tubes du liquide même à expériıenter. Pour cela, il commença par laver soigneusement à l'alcool u aux acides ses tubes de verre, et les plongeant dans le liquide étudier, il fit monter ce liquide par aspiration jusqu'à la partie upérieure du tube : une gaine liquide adhère alors au tube sur oute sa surface, et c'est dans cette gaine que le liquide glisse pour se fixer au niveau qui convient. Le tube de verre ne sert plus ainsi que de support à un tube liquide, à l'intérieur duquel le liquide se meut presque sans frottement. Dans ces conditions, l'angle capillaire est nul, et la hauteur moyenne est la plus grande de toutes celles que le liquide peut atteindre dans des tubes de même diamètre, non préparés. L'efficacité des moyens employés par Gay-Lussac fut telle que dans ses expériences les ascensions se montrèrent à peu près le double de celles que Newton et plus tard Haüy avaient observées.

Pour mesurer la hauteur du liquide soulevé, Gay-Lussac fixait le

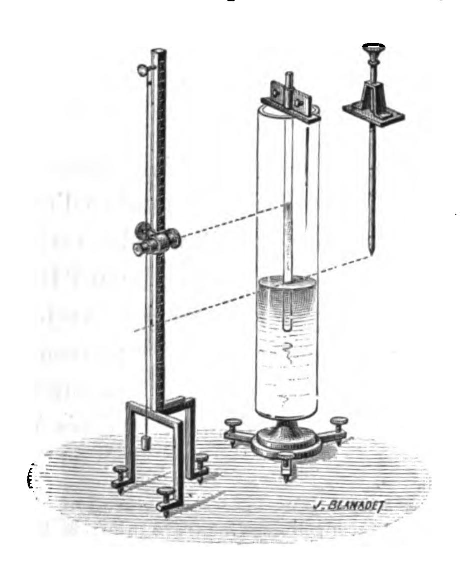


Fig. 344

tube perpendiculairement à une planchette reposant sur les bords bien dressés d'une éprouvette à moitié pleine du liquide. Il aspi-

rait par la partie supérieure du tube et laissait redescendre le liquide, qui s'arrêtait à un certain niveau : au moyen d'un cathétomètre il relevait ce niveau. Puis, repoussant vers le bord de l'éprouvette la planchette avec son tube, il lui substituait une plaque traversée par une vis dont il amenait la pointe à effleurer la surface du liquide; il dégageait cette pointe en enlevant du liquide, et la visait à son tour au cathétomètre. La différence des deux lectures donnait l'ascension dans le tube.

Pour avoir le diamètre $2r$ du tube, il y introduisait une colonne de mercure de densité d, en mesurait exactement la longueur l, puis la pesait : soit p le poids trouvé. Si l'on suppose la colonne terminée par deux hémisphères, la formule

$$\pi r^2(l-2r)+\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{p}{d}$$

donne rapidement le rayon r: on considère d'abord la colonne comme cylindrique, on résout donc l'équation

$$\pi r^2 l=\frac{p}{d},$$

et on corrige ensuite par approximations successives.

Gay-Lussac ne fit ainsi qu'un petit nombre d'expériences. Il était important d'opérer dans des conditions plus variées (1).

Expériences d'Édouard Desains. — Édouard Desains (2) reprit ces mesures et y apporta la plus scrupuleuse exactitude. Il supprima l'éprouvette à travers laquelle les visées peuvent être altérées par réfraction (3), et la remplaça par une soucoupe pleine d'eau jusqu'au-dessus des bords préalablement graissés à cet effet. Dans la

(1) Gellert a fait quelques expériences sur l'élévation de l'eau dans des tubes de verre prismatiques, rectangulaires et triangulaires. Elles confirment la loi suivant laquelle les hauteurs sont inversement proportionnelles aux lignes homologues des bases semblables; mais elles n'offrent pas des garanties suffisantes pour qu'on puisse en comparer utilement les résultats à la théorie. (GELLERT, *Commentarii Academiæ scientiarum Petropolitanæ*, XII; 1750.)

(2) ÉD. DESAINS, *Ann. de chim. et de phys.* (3), LI, 433; 1857.

(3) On évite cette cause d'erreur en disposant l'appareil comme le montre la

ıcoupe plongeait le tube, porté par un pied à vis calantes, et placé rticalement par alignement sur deux fils à plomb situés dans deux

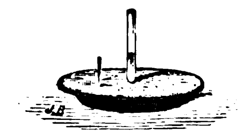


Fig. 345

ımuts à peu près rectangulaires. On relevait au cathétomètre successivement la partie inférieure du ménisque dans le tube et la surıce de l'eau dans la soucoupe; pour cette dernière visée, on se repéait sur quelques poussières flottant au-dessus du liquide, ou mieux n approchait de la surface une pointe : on visait successivement la ointe et son image : la position moyenne de la lunette donnait le iveau de l'eau. Les tubes furent toujours soigneusement lavés aux ıcides, à la potasse, à l'alcool et à l'eau : on reconnaît que le tube est convenablement lavé et reste bien garni à l'intérieur d'un tube liquide quand on obtient des séries très concordantes. Les diamètres des tubes, dont le rayon était compris entre $\frac{1}{2}$ millimètre et 1 milli-

figure 346, de manière à pouvoir relever directement et le niveau du liquide

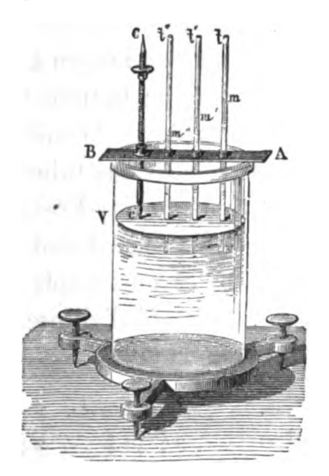


Fig. 346

dans le tube et la pointe supérieure d'une vis, de longueur connue, touchant par en bas la surface libre du liquide dans le vase.

mètre, furent mesurés par la méthode de Gay-Lussac, les deux ménisques étant remplacés par des cylindres équivalents d'après la table de Danger. Pour les tubes plus larges, on procédait un peu différemment : le tube était fermé à un bout, on y versait de l'eau, on le pesait ; puis, plaçant le tube verticalement devant un cathétomètre, on visait la partie inférieure du ménisque ; on ajoutait de l'eau, on visait la partie inférieure du nouveau ménisque. La longueur ainsi obtenue est exactement celle d'un cylindre équivalent à la colonne liquide, la concavité de l'un des ménisques compensant la convexité de l'autre. Il suffisait donc de reporter le tube sur la balance pour avoir le poids de ce cylindre, et par suite son rayon. On avait soin d'ailleurs de n'opérer que sur des tubes très sensiblement cylindriques, et de faire les mesures vers la partie du tube où s'arrêtait ensuite le liquide soulevé dans les expériences sur l'ascension capillaire, le seul diamètre utile à considérer étant celui du tube au point même où se fixe le liquide. Pour les tubes très fins, on contrôlait les mesures faites par la méthode de Gay-Lussac en détachant un petit tronçon à chaque bout du tube, et en mesurant au microscope avec la chambre claire la section droite de ces tronçons. Cette section n'étant pas exactement circulaire, on l'assimila, comme l'avait fait Poisseuille (263), à une ellipse dont on mesura les deux axes : la moyenne géométrique donna le rayon moyen de la section. Ayant le rayon moyen à chaque extrémité, on en déduisit le rayon moyen au milieu du tube. Ce rayon ne différa pas de 1^{μ} de celui qu'on avait trouvé par la méthode de Gay-Lussac.

Voici d'abord les résultats relatifs aux tubes modérément étroits, y compris les deux observations de Gay-Lussac rapportées dans la *Mécanique céleste* de Laplace. En regard sont les valeurs que l'on a calculées en prenant $F = 7{,}55$ et en remplaçant la section méridienne du ménisque par une moitié d'ellipse. Toutes les mesures furent effectuées ou réduites à la température de 8°,5.

Observateur.	Rayon.	Haut. observée.	Haut. calculée.	Δ
Éd. Desains.	$0^{mm},620$	$24^{mm},14$	$24^{mm},17$	$+0^{mm},030$
Gay-Lussac.	0 ,647	23 ,163	23 ,140	−0 ,023
Gay-Lussac.	0 ,952	15 ,586	15 ,562	−0 ,024
Éd. Desains.	2 ,627	4 ,998	4 ,992	−0 ,006
Éd. Desains.	4 ,639	2 ,161	2 ,209	+0 ,048

L'accord du calcul avec l'observation est très satisfaisant, et ontre que pour les diamètres inférieurs à 9 millimètres on eut, sans erreur sensible, confondre la courbe capillaire avec ne ellipse.

En adoptant la valeur $F = 7^{mm},55$ et la formule d'approximation lliptique, on trouve que dans un tube dont le diamètre est de millimètre l'élévation capillaire à 8°,5 est $30^{mm},05$.

La loi de Jurin s'est encore parfaitement vérifiée pour les tubes très fins, sensiblement elliptiques, sur lesquels a opéré Éd. Desains. Si en effet de la hauteur observée (¹), augmentée de la correction de Laplace, $\frac{1}{3} r$, on conclut le rayon moyen du tube, on obtient un nombre identique au nombre observé, comme le montre le tableau suivant :

Haut. observ. à 8°,5.	Rayon observé.	Rayon calculé.	Δ
$76^{mm},002$	$0^{mm},201$	$0^{mm},200$	$-0^{mm},001$
206 ,969	0 ,074	0 ,073	− 0 ,001

Ces mesures ont une importance spéciale, en ce qu'elles prouvent que le rayon d'activité moléculaire est négligeable par rapport à $0^{mm},06$, le rayon de courbure le plus fin à l'extrémité du petit axe de l'ellipse. Puisqu'en effet la théorie s'applique encore exactement à ce petit tube, il faut : 1° que l'épaisseur de la gaine liquide intérieure soit petite relativement à $0^{mm},06$; 2° que, comme le supposait Laplace, la force agissante soit proportionnelle au périmètre du tube, lors même que ce périmètre est courbé sous un rayon de $0^{mm},06$ seulement.

Expériences de Simon (de Metz). — Pour des diamètres encore plus faibles, l'épaisseur de la gaine liquide cesse d'être négligeable. Tel est le cas des tubes employés par Simon (de Metz) (²), et dont le rayon descendait à 3^{μ}. Après avoir cherché à obtenir des résul-

(¹) Dans un cylindre à base elliptique, la hauteur soulevée est un peu plus grande que dans un cylindre dont la base serait un cercle équivalent à l'ellipse du premier. Pour les deux tubes d'Édouard Desains, le rapport des deux hauteurs était sensiblement 1,004.

(²) SIMON (de Metz), *Recherches sur la capillarité*, présentées à l'Académie en 1841 (*C. R.*, XII, 892), et publiées, après la mort de l'auteur, dans les *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXII, 5 ; 1851.

tats concordants par la méthode ordinaire, mais inutilement (ce qui tenait sans doute à ce que ses tubes n'étaient pas parfaitement nettoyés), Simon s'arrêta au procédé suivant : le tube à essayer, plongeant par son extrémité inférieure dans le liquide, était relié par en haut à un réservoir à air comprimé, dont la pression se mesurait au moyen d'une colonne du même liquide que celui sur lequel on



Fig. 347

opérait. On faisait croître graduellement la pression dans le réservoir jusqu'à ce qu'une bulle d'air sortît par l'extrémité du tube fin ; la hauteur de la colonne soulevée dans le manomètre, diminuée de la quantité dont le tube fin plongeait dans le liquide, donnait, d'après Simon, la hauteur à laquelle le liquide se serait élevé dans un tube ayant pour section l'orifice inférieur du tube fin. Mais la bulle d'air ne se dégage qu'en déformant le ménisque ; et si, à l'exemple de M. Wolf, on place à côté du tube fin un second tube plongeant profondément dans le liquide, de manière à indiquer la pression par l'abaissement qu'y subit le liquide au-dessous du niveau extérieur, on voit dans ce tube, où le frottement est moindre que dans le manomètre recourbé de Simon, le niveau varier de plusieurs millimètres, au moment où une bulle d'air s'échappe par le tube fin. La méthode de Simon est donc plus ingénieuse que précise, et les nombres qu'il en a tirés ne peuvent être tenus que pour approximatifs. Comme d'ailleurs il faudrait leur appliquer la correction fort incertaine de l'épaisseur de la couche liquide adhérente au tube de verre, il n'est guère possible de les comparer à la théorie.

Ces expériences ont cependant donné des résultats intéressants. Dans un tube de $6^{\mu},1$ de diamètre, Simon évalue l'ascension de l'eau à $6^{m},828$. On comprend donc que dans les vaisseaux excessivement fins des végétaux (vaisseaux dont le diamètre varie de 20^{μ} à 1^{μ}),

forces capillaires puissent élever l'eau à de grandes hauteurs. Jamin a réalisé une sorte d'arbre artificiel avec une longue lonne poreuse, reposant par sa base dans l'eau, et terminée par e large surface évaporatoire : l'eau y montait jusqu'à une hauır équivalente à plusieurs atmosphères (1). De même les murs nstruits sur un sol humide se mouillent jusqu'au sommet, si l'on prend pas la précaution d'isoler les assises inférieures par de inces feuilles de plomb.

Vérifications de MM. Quet et Seguin. — Convenablement calculées, s ascensions dans les tubes larges se montrent également conforıes à la théorie. C'est ce que M. Quet a prouvé : après avoir tabli dans tous les cas le rapport entre la hauteur moyenne et ı hauteur observée, il mesura, avec M. Seguin, les ascensions lans une série de gros tubes allant jusqu'à 13mm,925 de rayon dans un tel tube l'eau s'élève à 0mm,09). En joignant à ces observations celles que nous avons rapportées plus haut de Gay-Lussac et d'Éd. Desains, on a quatorze déterminations précises de hauteurs capillaires, variant de 1 à 2300, tandis que les rayons avaient varié dans le rapport de 200 à 1 ; et dans toute cette étendue l'accord avec la théorie est complet, les différences n'atteignant que quelques centièmes de millimètre pour les hauteurs dans les gros tubes et quelques millièmes de millimètre pour les rayons dans les tubes fins.

225. Rôle de la température. — Quand la température s'élève, la tension superficielle décroît (2), la hauteur capillaire diminue, et cette diminution, plus rapide que ne le supposait Laplace, dépasse de beaucoup celle de la densité (3). Ainsi, entre 0° et 100°, la densité de l'eau varie pour chaque degré dans un rapport qui,

(1) JAMIN, C. R., L, 172, 311 et 385 ; 1860.

(2) DE LA LANDE, *Journal des savants ;* 1768.

(3) A l'appui de cette variation de la tension superficielle avec la température, nous citerons le moyen bien connu d'enlever une tache de graisse : sur l'un des bords de la tache on pose du papier buvard ; de l'autre bord on approche un fer chaud : le liquide graisseux est tiré du côté froid, où la tension superficielle est plus forte, et absorbé par le papier buvard. Quand on emploie, pour détacher, un dissolvant à faible tension superficielle, un effet du même genre se produit : la graisse recule vers la partie non imbibée ; il faut donc attaquer la tache progressivement de la circonférence au centre.

sans être constant, est égal en moyenne à 0,00045. Dans le même intervalle de température, les expériences de Brünner, Wolf, Éd. Desains, fixent la diminution moyenne de hauteur, pour 1 degré, à 0,00182 ([1]), rapport quatre fois plus grand que le précédent.

Expériences de M. Wolf. — En opérant dans un appareil entièrement clos, on peut aller plus loin, et dépasser la température à laquelle le liquide bout sous la pression atmosphérique. C'est ce que M. Wolf ([2]) a réalisé le premier dans une série d'expériences très habilement disposées. Pour avoir des tubes parfaitement nets, il les faisait fermer aussitôt après leur fabrication et ne les ouvrait qu'au moment de s'en servir : il constatait leur propreté parfaite à ce caractère très simple, qu'après aspiration ou refoulement le liquide s'arrêtait exactement au même point.

On avait soin d'ailleurs que ce point fût toujours le même dans

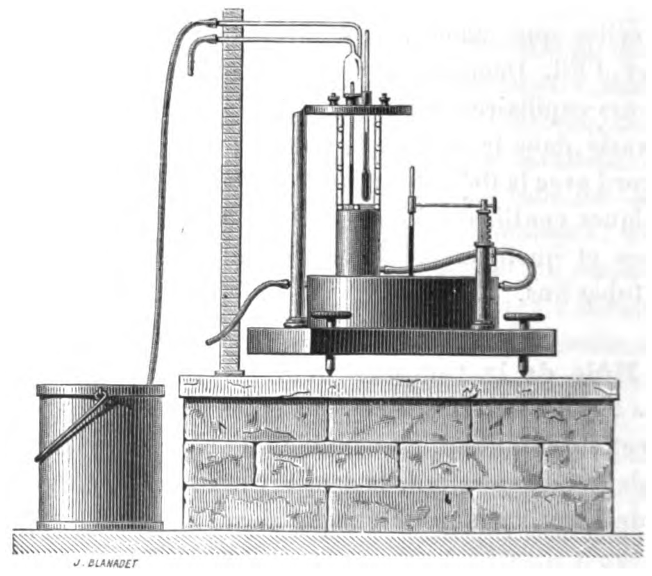


Fig. 348

toutes les expériences en vase ouvert; et à cet effet on avait marqué à l'avance un repère sur la surface extérieure du tube : à chaque

([1]) De 0° à 4°, la diminution est un peu plus rapide et sensiblement égale à 0,00185. Au-dessus de 4°, le décroissement de la hauteur est proportionnel à l'accroissement de la température et, bien qu'il varie légèrement d'un tube à l'autre, le coefficient de diminution diffère toujours peu de 0,00182 (Wolf).

([2]) Wolf, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XLIX, 230; 1857.

périence, après l'avoir lavé par un abondant courant de liquide, n élevait ou on abaissait le tube jusqu'à ce que le niveau intéeur correspondît exactement à ce repère; une fois les observaons terminées, on coupait le tube en ce point, et on mesurait le iamètre moyen de la section à l'aide d'une machine à diviser.

En vase clos, cette précaution n'est plus applicable : il faut se ervir d'un tube aussi cylindrique que possible et préalablement radué sur une portion de sa longueur. Ce tube est introduit dans n gros tube en verre épais, où il est maintenu dans l'axe par les fils métalliques faisant ressort. Le gros tube, fermé à un bout, est effilé à l'autre ; on y introduit de l'éther, pour lequel l'abaissement par la chaleur est beaucoup plus rapide que pour l'eau (1), on fait bouillir afin de chasser l'air, on ferme à la lampe. On porte l'appareil dans une cloche renversée, pleine d'huile de lin, à côté d'un autre tube semblable, mais ouvert et également plein d'huile de lin dans laquelle plonge un thermomètre. On chauffe la cloche en ayant soin d'agiter sans cesse l'huile. A mesure que la température s'élève, on voit l'éther baisser rapidement dans le tube capillaire, et en même temps la surface du liquide dans le gros tube devenir de moins en moins concave, et enfin s'aplanir tout à fait. A ce moment (la température étant de 190°), il n'y a plus de différence de niveau à l'intérieur du tube capillaire et à l'extérieur. La capillarité a cessé de se manifester sous le double rapport de l'ascension dans les tubes étroits et de la courbure des surfaces. L'alcool, le sulfure de carbone, l'huile de naphte, ont donné des résultats tout semblables. Drion (2) a montré qu'une fois l'égalité de niveau établie, et la surface capillaire devenue plane et horizontale, si la température continue à croître, un nuage se forme, et le liquide se volatilise sans aucun autre effet.

Quand on élève ainsi la température jusqu'au point de vaporisation totale, il est clair qu'à un certain moment la couche liquide adhérente au tube disparaît; la surface capillaire s'étend jusqu'au verre. Il n'y a plus de raison pour que l'angle capillaire se maintienne

(1) D'après la formule empirique résumant les expériences en vase ouvert, l'ascension serait nulle pour l'éther à 191°,1 (Brünner), tandis que pour l'eau la hauteur de la colonne soulevée ne se réduirait à zéro qu'à une température supérieure à 500°.

(2) DRION, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LVI, 221 ; 1859.

nul. M. Quet (1) a montré qu'il devait croître, et que la hauteur moyen du liquide soulevé devait par suite décroître jusqu'à zéro. Si l'on v entrer plus avant dans l'étude théorique de ces phénomènes, il f en outre tenir compte de la vapeur, par suite de laquelle la colon soulevée perd une partie de son poids, égale au poids d'un mê volume de vapeur. D'ailleurs la vapeur exerce aussi une action c pillaire sur le liquide. M. Quet a donné les formules générales pr pres à représenter les phénomènes capillaires dans ces condition

226. Expériences sur divers liquides. — Lorsqu'o expérimente successivement sur divers liquides avec un mêm tube, à même température, on observe des ascensions différentes, F et d variant en général tous les deux d'un liquide à l'autre.

Expériences de Gay-Lussac, de Frankenheim, de Simon (de Metz), de Valson. — Ainsi Gay-Lussac (2), dans son tube de $1^{mm},294$ de diamètre, observa les hauteurs suivantes vers $8^{\circ},5$:

Alcool de densité		0,819	$h_1 = 9^{mm},182$
—	—	0,859	$h_1 = 9\ ,301$
—	—	0,941	$h_1 = 9\ ,997$
Essence de térébenthine			$h_1 = 9\ ,952$

Frankenheim (3) et Simon (de Metz) (4) ont étendu ces mesures à un grand nombre de liqueurs.

M. Valson (5) les a reprises pour les mélanges alcooliques (6) et, ayant vérifié que les substances extractives dissoutes dans le vin naturel n'influencent que très peu la hauteur du liquide soulevé, il a construit un alcoomètre consistant simplement en un tube capillaire qu'il suffit de plonger dans le vin : la hauteur à laquelle s'élève le vin donne immédiatement son degré alcoolique aussi exac-

(1) Quet, *loc. cit.*
(2) Gay-Lussac, *loc. cit.*
(3) Frankenheim, *loc. cit.*
(4) Simon (de Metz), *loc. cit.*
(5) Valson, *Etude sur les actions moléculaires*. Grenoble, Maisonville; 1864.
(6) L'étude des mélanges alcooliques a encore été faite par M. Duclaux (230), et tout dernièrement par M. Rodenbeck, qui trouve qu'à $17^{\circ},5$

$$a \text{ ou } \sqrt{\frac{2F}{d}} = 2,392 + 1,001\,v - 2,641\,v^2 + 3,040\,v^3,$$

v étant le volume d'alcool pour 100 volumes d'eau (Rodenbeck, *Inaug. Dissert.* Bonn; 1879).

ment que les méthodes exigeant la distillation ou l'ébullition du [uide; mais l'appareil est un peu délicat pour la pratique courante.

M. Valson ([1]) a également étudié les dissolutions salines *normales* enfermant un équivalent de sel, en grammes, par 1 litre); *d* diffère ors toujours peu de 1, et *h* doit être sensiblement proportionnel F. Dans ces conditions, on voit chaque molécule soit de métal, soit e radical métalloïdique, produire sur la hauteur *h* son effet propre, ıdépendamment de la nature du composé, l'action du sel étant implement la somme des actions de ses deux parties constitutives.

Les dissolutions salines s'élèvent généralement moins haut que 'eau; certaines solutions, celles de chlorhydrate d'ammoniaque ar exemple, font cependant exception. Dans tous les cas, comme 'avait montré M. Buliginski ([2]), la hauteur capillaire varie proportionnellement à la quantité de sel dissous, tant que la liqueur n'est pas trop concentrée.

Expérience de Quincke avec deux liquides miscibles superposés. — On doit à Quincke ([3]) une expérience très intéressante que l'on a opposée à tort à la théorie de Laplace, avec laquelle elle s'accorde aussi bien qu'avec le principe de la tension superficielle. Un tube capillaire plongeant dans l'eau, et l'eau s'élevant dans le tube à la hauteur voulue, on fait arriver une trace d'alcool au ménisque terminal : la colonne liquide s'abaisse aussitôt de près de moitié de sa hauteur. Si, au lieu d'amener l'alcool à la surface de l'eau dans le tube, on le dépose sur la surface extérieure du liquide au voisinage du tube, aucun effet ne se produit. L'alcool étant entièrement miscible à l'eau, l'addition d'une faible quantité d'alcool à la surface de l'eau a simplement pour résultat de changer la nature de cette surface, sans en altérer la courbure, qui reste hémisphérique si le tube est suffisamment étroit, et sans modifier le liquide à une profondeur appréciable. Par conséquent, à une distance sensible de la surface, la pression K est la même que si l'alcool n'existait pas. Quant à la tension superficielle F, elle est devenue celle même de l'alcool. On comprend donc que, à l'extérieur du tube, là où la surface est plane, l'alcool ne produise aucun

([1]) VALSON, *Ann. de chim. et de phys.* (4), XX, 361 ; 1870.

([2]) BULIGINSKI, *Pogg. Ann.*, CXXXIV, 440 ; et *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XV, 205 ; 1868.

([3]) QUINCKE, *Pogg. Ann.*, CXXXIX ; 1870.

effet, tandis que, sur le ménisque, une goutte d'alcool réduira la hauteur de la colonne d'eau soulevée, de manière que le poids de cette colonne soit celui que peut porter le nouveau ménisque.

Au lieu d'eau et d'alcool, on peut aussi employer l'huile d'olive et l'essence de térébenthine : le résultat sera le même. On peut encore, comme l'a indiqué M. Duclaux, substituer au tube la tige d'un aréomètre (227) : l'expérience est plus facile et non moins concluante.

227. Tube ouvert; tige pleine; tube conique. — A l'ascension, dans les tubes cylindriques, de l'eau et des liquides qui mouillent, se rattachent divers phénomènes que nous indiquerons brièvement.

Longueur de la colonne liquide suspendue dans un tube ouvert. — Si l'on retire de l'eau avec précaution un tube qui y plongeait suffisamment et où l'eau montait à la hauteur h, il reste dans le tube une colonne de hauteur $2h$, l'extrémité du tube (que nous supposons taillée en biseau) soutenant un ménisque convexe, identique au ménisque concave qui termine le liquide à l'intérieur du tube. Si,

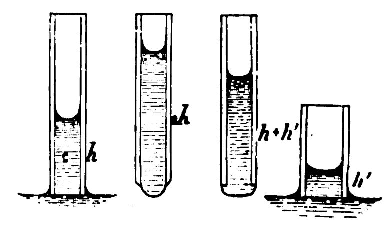


Fig. 349

à la partie inférieure, le tube offrait une base plane parfaitement mouillée, le ménisque s'appuierait sur cette base, et la hauteur soutenue serait $h+h'$, h' étant la hauteur à laquelle l'eau monte dans un tube de diamètre intérieur égal au diamètre extérieur du tube employé. Il est d'ailleurs à remarquer que la hauteur $2h$, ou plus généralement la hauteur $h+h'$ est un maximum. Si l'on enlève un peu de liquide [1], le restant se tient encore suspendu, seulement alors la courbure du ménisque inférieur diminue de façon que la

[1] Pour cela il suffit de secouer le tube, car l'équilibre n'est stable que pour un exhaussement et non pour une dépression de la colonne liquide. (BERTRAND, *loc. cit.*)

›mme des pressions de bas en haut exercées par les ménisques ısse équilibre au poids du liquide soutenu. Si la hauteur du quide se réduit à h, la surface inférieure devient plane. Si la auteur diminue encore, la surface se creuse, et le ménisque ıférieur est concave comme le ménisque supérieur.

Un tissu à larges mailles (2 à 3 millimètres de côté), tendu sous ıne cloche, garde l'eau qu'on y a fait monter par aspiration et ur laquelle on a fermé ensuite le robinet supérieur de façon à em›êcher la rentrée de l'air. On voit alors l'eau se maintenir dans la :loche en formant à chaque maille un ménisque très prononcé. Il est même possible de faire bouillir l'eau sur ce tissu sans qu'elle s'écoule ([1]).

Tube et cylindre intérieur. — Si à l'intérieur d'un tube de rayon R on introduit un cylindre de rayon r, le tube et le cylindre étant tous les deux mouillés, la couche superficielle est tirée par une force $(2\pi R + 2\pi r)$ F : tel est donc le poids de la colonne verticale soulevée, quelle que soit la position du cylindre plein à l'intérieur du tube.

Lorsque le cylindre plein est placé dans l'axe du tube, le volume du liquide soulevé est $\pi\,(R^2 - r^2)\,h$, et l'on a

$$2\pi(R+r)F = \pi(R^2 - r^2)hd,$$

ou

$$(R-r)h = \frac{2F}{d},$$

c'est-à-dire que la hauteur du liquide soulevé est la même que dans un tube dont le rayon serait égal à la largeur de la partie annulaire, ou la même (228) qu'entre deux plans parallèles distants de l'intervalle des deux tubes. Ce théorème, découvert par Laplace, a été sur sa demande vérifié par Haüy. Dans un tube de verre bien calibré, dont le diamètre intérieur était de 5 millimètres, Haüy plaça un cylindre de verre dont le diamètre était de 3 millimètres, en ayant soin de faire coïncider l'axe du cylindre avec celui du tube. Il plongea le tout dans l'eau et vit le liquide

([1]) De Romilly, *Journal de physique*, VI, 85 ; 1877.

s'élever dans l'espace annulaire à la même hauteur qu'entre de[ux] plans parallèles distants de 1 millimètre.

Cylindre mouillé extérieurement. — L'ascension autour d'[un] cylindre mouillé se produit exactement de la même manière q[ue]

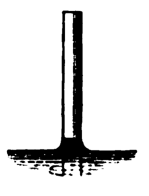


Fig. 350

dans un tube creux de même diamètre. La force $2\pi r\cdot F$ soutient u[n] poids de liquide $\pi r^2 hd$.

Peu d'expériences ont été faites avec les cylindres convexes. Ce[-]pendant Wertheim [1] les a employés à obtenir des modèles en cire sur lesquels il a cherché à déterminer la surface et le volume d[u] ménisque soulevé. Langberg [2] et M. Duclaux [3] ont montré l'in[-]fluence de ce ménisque sur les mesures aréométriques.

Application aux aréomètres. — Soit v le volume de la portion d'un aréomètre immergée dans un liquide de densité d; la poussée du liquide est vd. D'autre part, l'instrument est tiré vers le bas par son poids p et par la tension superficielle $2\pi r F$, s'exerçant sur toute la ligne de contact du liquide avec la tige de rayon r. On a donc

$$vd = p + 2\pi r F.$$

Dans un autre liquide de densité d', le même aréomètre s'enfon-cera de v', et l'on aura

$$v'd' = p + 2\pi r F',$$

F' étant la tension superficielle de ce nouveau liquide. On a donc

$$\frac{d}{d'} = \frac{v'}{v} + \frac{v'}{v}\frac{2\pi r}{p}(F - F'),$$

(1) WERTHEIM, *Ann. de chim. et de phys.*, (3). LXIII.
(2) LANGBERG, *Pogg. Ann.*, CVI, 299; 1859.
(3) DUCLAUX, *Journal de physique*, I, 197; 1872.

est-à-dire que le rapport des densités n'est pas égal au rapport iverse des volumes. Cela ne serait vrai que si l'on avait $F=F'$, : qui n'a pas lieu en général.

M. Duclaux trouve, par exemple, sur un pèse-acides $p=27^{gr},220$, $=5$ millimètres. Pour l'eau, $F=7,5$: le produit $2\pi rF$ vaut donc 35 milligrammes, c'est-à-dire près de $\frac{1}{100}$ de p. Si la tension superficielle de l'eau venait à disparaître, l'instrument remonterait de 3 millimètres. Avec un liquide dont la tension superficielle serait de $\frac{1}{3}$ seulement inférieure à celle de l'eau, la ligne de flottaison serait, par ce seul fait, élevée de 1 millimètre, ce qui ferait sortir un volume de $78^{mmc},5$ soit environ $\frac{3}{1000}$ du volume total : l'instrument ne donnera que 2 décimales exactes de la densité.

Les seuls aréomètres justes sont ceux dont la graduation est empirique et l'usage restreint à une seule sorte de liquide, comme l'alcoomètre centésimal de Gay-Lussac.

Encore faut-il remarquer, avec M. Duclaux, que la méthode ordinairement suivie pour graduer ces instruments, au moyen d'un étalon, n'est exacte que sous certaines réserves. Soient en effet P le poids de l'alcoomètre étalon, p le poids de l'alcoomètre à graduer, R et r les rayons des tiges des deux instruments; V et v les volumes des deux aréomètres immergés dans un alcool de densité d et de tension superficielle F; V' et v' les volumes immergés dans un alcool de densité d' et de tension superficielle F'; on a

$$\begin{aligned} Vd &= P+2\pi RF, & vd &= p+2\pi rF, \\ V'd' &= P+2\pi RF', & v'd' &= p+2\pi rF', \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{V}{V'}=\frac{d'}{d}\frac{P+2\pi RF}{P+2\pi RF'}, \quad \frac{v}{v'}=\frac{d'}{d}\frac{p+2\pi rF}{p+2\pi rF'}.$$

Le procédé suivi exige que

$$\frac{V}{V'}=\frac{v}{v'},$$

ce qui n'a lieu que si

$$\frac{P+2\pi RF}{P+2\pi RF'}=\frac{p+2\pi rF}{p+2\pi rF'},$$

ou

$$\left(\frac{P}{R}-\frac{p}{r}\right)(F-F')=0,$$

c'est-à-dire, F étant différent de F',

$$\frac{p}{r}=\frac{P}{R}.$$

Si cette condition n'est pas remplie, il faut s'astreindre à déterminer directement assez de points de repère pour que le procédé graphique fasse connaître les points intermédiaires sans erreur sensible. C'est ainsi en effet que l'on procède pour les alcoomètres de précision : on obtient des instruments dont les indications diffèrent à peine de celles d'une analyse directe, à condition toutefois que l'instrument soit toujours bien mouillé par le liquide dans lequel on le plonge.

Telle est en effet la condition première de l'usage régulier de tout aréomètre. Les expériences suivantes, dues à M. Duclaux, en prouvent nettement l'importance. L'aréomètre étant en équilibre dans l'eau pure, prenons entre le pouce et l'index une goutte imperceptible d'huile, étendons-la sur les deux doigts, puis plongeons l'un d'eux dans l'eau. Immédiatement l'aréomètre se relève. Un voile imperceptible d'huile s'est étendu à la surface de l'eau et adhère maintenant aux parois de l'éprouvette et à la tige de l'instrument, de telle sorte que si nous jetons l'eau et en reprenons de nouvelle, l'effet de l'huile persistera. Il faut un lavage à l'alcool et un frottement énergique pour rétablir l'affleurement normal. Cette expérience montre toute l'influence d'une trace de matière grasse sur la position du point d'affleurement, et justifie la pratique des constructeurs, qui ont coutume d'ajouter deux ou trois gouttes d'alcool à l'eau dont ils se servent pour marquer le zéro.

En versant de la vapeur d'éther, ou en faisant tomber une ra-

lure de savon au voisinage de la tige d'un alcoomètre plongeant dans l'eau, M. Duclaux observe également un soulèvement, conséquence immédiate de la diminution de la tension superficielle du liquide. C'est, sous une forme nouvelle, l'expérience de Quincke décrite plus haut. Avec un aréomètre dont le tube est en mica, M. Marangoni [1] observe une élévation de 12 centimètres sous l'action de la panamine.

Application à la mesure de la tension superficielle. — L'attraction capillaire exercée sur la tige d'un aréomètre, et en général sur tout corps immergé, par le liquide environnant, donne un procédé facile pour mesurer la tension superficielle des liquides. Ce procédé, mis en pratique par Hagen et par Dupré, consiste à suspendre au plateau d'une balance une bande métallique mince, courbée en anneau à bord horizontal bien dressé, et à mesurer l'augmentation apparente de poids qu'elle éprouve quand on l'amène à affleurer à la surface d'un liquide qui la mouille bien. Le nombre de milligrammes ainsi obtenu, divisé par le double de la longueur de la lame, exprimée en millimètres, représente la tension superficielle du liquide employé.

Tubes coniques. — Nous considérerons encore le cas d'un tube

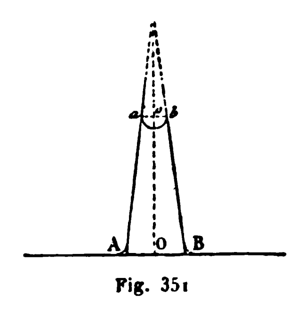


Fig. 351

conique plongé verticalement dans l'eau, la pointe vers le haut. Soient 2β l'angle au sommet du cône, R le rayon AO de la section immergée, r le rayon ao du tube au point où s'arrête le liquide à une hauteur h au-dessus du niveau extérieur. Sur tout le périmètre de la ligne de raccordement ab s'exerce la tension

[1] MARANGONI, *Rivista scientifico-industriale de Guido Vimercati.* Firenze; 1880.

superficielle parallèlement à la surface du tube. La force verticale agisssante est donc $2\pi r F \cos\beta$, et l'équation d'équilibre est par suite

$$2\pi r F \cos\beta = \pi r^2 h d,$$

ou

$$rh = \frac{2F}{d}\cos\beta.$$

D'autre part, on a entre les données de l'expérience la relation

$$\frac{R-r}{h} = \operatorname{tg}\beta,$$

au moyen de laquelle on peut éliminer r. On trouve ainsi

$$h = \frac{R}{2\operatorname{tg}\beta} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4\operatorname{tg}^2\beta} - \frac{2F\cos\beta}{d\operatorname{tg}\beta}}.$$

On voit que h sera imaginaire si

$$R^2 < \frac{8F}{d}\sin\beta.$$

Lors donc que le tube est enfoncé suffisamment pour que le rayon R soit plus petit que $\sqrt{\frac{8F\sin\beta}{d}}$, il n'y a pas d'équilibre possible : le liquide monte jusqu'au haut du tube (243).

Si h n'est pas imaginaire, il y a deux solutions, toutes les deux réelles et positives, par conséquent toutes les deux acceptables. Mais de ces deux valeurs l'une, la plus petite, correspond seule à un équilibre stable, et par conséquent détermine en réalité la *seule* position d'équilibre physique et réalisable. Cela se voit très aisément par une construction géométrique [1].

[1] Éd. Desains, *loc. cit.*

Portant les r sur l'axe des x, et les h sur l'axe des y, construis la droite SA,

$$\frac{R-r}{h}=\operatorname{tg}\beta,$$

l'hyperbole

$$rh=\frac{2F}{d}\cos\beta:$$

s points d'intersection a_1 et a_2 de ces deux lignes marquent les eux solutions.

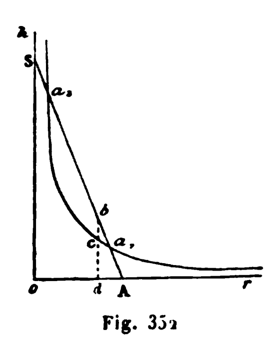


Fig. 352

En a_1 l'équilibre est stable ; supposons en effet que, par aspiration, nous élevions le liquide un peu au-dessus de a_1, en b ; en ce point le rayon du tube est od, et à ce rayon correspond, d'après la loi de Jurin, la hauteur dc, moindre que db ; le liquide ne pourra donc se maintenir en b et retombera. On verra de même que, s'il était au-dessous de a_1, il remonterait.

Au contraire, en a_2 l'équilibre est instable ; car si l'on abaisse le liquide tant soit peu au-dessous de a_2, il descend jusqu'en a_1 ; si on l'élève, il continue à monter en s'éloignant de a_2. Le point a_2 établit ainsi une séparation entre les parties du tube d'où l'eau retombe toujours vers a_1 et les parties d'où elle monte toujours vers le sommet.

2° LAMES PARALLÈLES.

228. Élévation de l'eau entre deux lames parallèles. — L'élévation de l'eau entre deux lames parallèles suffisamment rapprochées est, avec l'ascension dans un tube cylindrique, le phé-

nomène capillaire qui se prête le mieux à des mesures exactes.

Il est d'ailleurs une conséquence immédiate du principe de la tension superficielle. Supposons les lames assez longues pour que l'on puisse négliger ce qui se passe vers les extrémités : la force

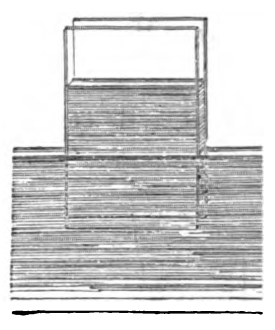


Fig. 353

agissante par unité de longueur est 2F ; le poids du liquide soulevé par unité de longueur est *chd*, *c* étant la distance des deux lames, *h* la hauteur d'un prisme de base $c \times 1$ équivalent à la colonne soulevée, *d* la densité du liquide. On a donc

$$2F = chd,$$

ou

$$ch = \frac{2F}{d}.$$

La hauteur du liquide soulevé entre les deux lames est la même que dans un tube de rayon *r* égal à *c*, ou la moitié de la hauteur à laquelle le liquide s'élève dans un tube de diamètre égal à la distance des deux lames.

On établirait aisément la même proposition par la méthode de M. Bertrand, comme pour un tube cylindrique.

Mesure de Gay-Lussac. — L'élévation de l'eau entre deux plans a été observée depuis longtemps par les physiciens, ainsi qu'on peut le voir dans l'*Optique* de Newton (question 31)[1], mais

[1] La relation entre la hauteur du liquide soulevé et la distance des lames y est formulée pour la première fois en ces termes : « En quelque proportion que varie la distance, la hauteur sera à peu près en proportion réciproque de cette dis-

la première mesure précise est due à Gay-Lussac. Les deux lames étaient assez rapprochées pour que la courbe capillaire se confondît sensiblement avec un demi-cercle tangent aux deux plans : on a alors

$$h = h_1 + c\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \quad \text{ou} \quad h_1 + 0,107c.$$

Gay-Lussac a mesuré, à la température de 16°, l'élévation de l'eau $h_1 = 13^{mm},574$, entre deux lames parallèles dont l'écartement c était de $1^{mm},069$.

Si l'on calcule a à l'aide de la formule

$$c(h_1 + 0,107c) = 2F,$$

en prenant toujours pour F la valeur 7,55 à 8°,5, ce qui fait 7,45 à 16°, on trouve $c = 1^{mm},080$; la différence de cette quantité avec la valeur observée ne dépasse pas les limites des erreurs de l'observation.

Expériences d'Édouard Desains. — Édouard Desains a mesuré aussi l'ascension de l'eau entre deux lames parallèles, et il a trouvé également des résultats tout à fait d'accord avec la théorie. Il prenait deux glaces de verre, les séparait en plaçant aux quatre angles et perpendiculairement aux diagonales quatre petits bouts de cuivre coupés l'un à la suite de l'autre dans un même fil, et les serrait modérément sur ces bouts avec des pinces à vis. Le système était suspendu verticalement au-dessus d'une cuvette pleine d'eau. On avait eu soin de laver les lames à l'acide, puis à la potasse et à l'eau distillée. On ne les retirait de l'eau qu'à l'instant de faire une mesure. On relevait la hauteur seulement lorsque le liquide se terminait par une ligne bien horizontale pour la plus grande partie de sa longueur. Cette condition se trouvait assez ordinairement réalisée dans les moments qui suivaient l'émersion des lames; mais bientôt l'horizontalité de la ligne s'altérait, et le liquide baissait. On replongeait alors les lames dans l'eau, et on les y laissait suffisamment avant de faire

tance; car la force attractive des verres est la même, quelle que soit la distance qu'il y a entre eux; et le poids de l'eau soulevée est le même, si sa hauteur est réciproquement proportionnelle à la distance. » (NEWTON, *Optics*. London; 1704.)

une autre mesure. Ces précautions sont essentielles; et pour les avoir négligées, certains expérimentateurs ont obtenu des résultats entièrement erronés.

En opérant sur deux lames distantes de $0^{mm},84$, Éd. Desains a trouvé, à $8°,5$, une hauteur de l'eau égale à $17^{mm},80$. Si l'on calcule, au moyen de la formule

$$\frac{15,11}{c} = 17,80 + 0,107a,$$

la valeur de c qui correspond théoriquement à cette hauteur, on trouve : $c = 0^{mm},845$, nombre complètement d'accord avec celui qu'a donné l'observation.

Dans deux autres expériences faites l'une à $19°,5$ avec des lames distantes de $0^{mm},88$, l'autre à $25°$ pour une distance de $0^{mm},76$, Éd. Desains observa les ascensions $16^{mm},47$ et $19^{mm},17$: ces nombres exigent théoriquement des distances de $0^{mm},89$ et $0^{mm},76$. Enfin dans une expérience faite par Wertheim avec l'appareil d'Éd. Desains, la température étant $10°$ et la distance des lames $0^{mm},92$, la hauteur observée fut $16^{mm},67$, laquelle répond théoriquement à une distance de $0^{mm},89$.

Vérifications de M. Quet. — Pour des écartements plus considérables, si l'on veut soumettre la théorie au contrôle de l'expérience, il faut d'abord déterminer analytiquement le rapport qui existe entre la hauteur moyenne et la hauteur observée. C'est ce qu'a encore fait M. Quet. Il put alors constater que l'accord entre le calcul et l'observation subsiste complet pour des plaques distantes de $11^{mm},20$: entre de telles plaques l'eau monte à $0^{mm},71$ avec une flèche de $3^{mm},22$. Ainsi toutes les expériences vérifient la théorie.

Expériences de Simon (de Metz) et de Wertheim. — Si certaines expériences de Simon (de Metz) et de Wertheim ont donné des résultats discordants, cela tient à ce que toutes les précautions nécessaires n'avaient pas été prises. Wertheim lui-même l'a reconnu [1]. Aucun doute ne saurait donc rester sur la vraie loi du

[1] *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LXIII, 440; 1861.

énomène. Les expériences de Wertheim ne sont cependant pas s intérêt. Il a déterminé la courbe et le volume du ménis-e soulevé entre deux lames parallèles. Il opérait soit avec de au, soit avec de la cire fondue, qui, une fois solidifiée, lui four-ssait des modèles sur lesquels il pouvait prendre à son aise toutes s mesures micrométriques nécessaires pour établir le profil du énisque.

Adhésion de deux disques mouillés. — Il est enfin à remarquer ue deux lames parallèles entre lesquelles s'élève un liquide sont ollicitées à se rapprocher l'une de l'autre.

Si les lames sont libres de se mouvoir, il se produit des mouvements qui seront examinés plus loin (242). Mais nous rapporterons dès maintenant les expériences curieuses de Simon (de Metz) [1] sur l'adhésion des disques mouillés, expériences dans lesquelles la force qui tend à rapprocher les surfaces parallèles est nettement mise en évidence.

Sur un disque horizontal bien mouillé plaçons un autre disque, également bien mouillé, en les séparant par quelques petits brins de fils de fer, de manière à les maintenir à une distance constante c, et mettons d'abord assez d'eau entre les deux plans pour que la surface extérieure du liquide forme un cylindre vertical ayant les disques pour bases. Si le rayon de ces disques est suffisamment grand pour que l'on puisse négliger la courbure du cylindre, la tension superfi-

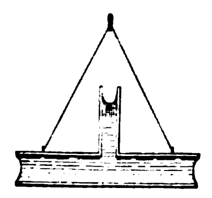


Fig. 354

cielle du liquide n'aura pas de composante normale sensible, et par suite un tube capillaire ou un système de lames parallèles, implanté dans le disque supérieur soutiendra une colonne liquide, de même hauteur que si le système plongeait dans une masse indéfinie. Avec

[1] Simon (de Metz), *loc. cit.*

une pipette enlevons du liquide entre les deux disques jusqu'à ce qu[i] nous ayons creusé une gorge aussi profonde que possible sans déta[-]cher le liquide du bord des disques, l'eau s'abaissera graduellemen[t] entre les lames parallèles fixées au disque supérieur ; et si la distanc[e] de ces lames est la même que celle des disques, la hauteur h de l[a] colonne soulevée se réduit finalement à zéro. A ce moment, en effet, la pression dans tout l'intérieur de la masse d'eau est diminuée d[e]

$$N = F\frac{1}{r} = \frac{2F}{c},$$

$r = \frac{c}{2}$ étant le rayon de courbure du profil de la gouttière suppos[ée] circulaire, et le rayon R des disques étant supposé assez grand pour que $\frac{1}{R}$ soit négligeable. La pression à surmonter pour enlever alors le disque supérieur sera donc

$$\frac{2FS}{c},$$

S désignant la surface du disque. Cette force est proportionnelle à la surface des disques, et en raison inverse de leur distance.

$\frac{2F}{c}$ étant égal à hd, on a $\frac{2FS}{c} = Shd$; en d'autres termes, la force nécessaire pour détacher l'un ou l'autre disque est égale au poids de la colonne liquide qui a pour base ce disque et pour hauteur la hauteur à laquelle l'eau s'élève entre deux lames séparées par la distance des deux disques. Ainsi, par exemple, Simon cherche quelle quantité d'eau il faut mettre entre deux disques de 108 millimètres de diamètre pour que la charge qu'ils puissent supporter soit 500 grammes. Posant Shd ou $9156 \times h \times 1 = 500\,000$, il tire de là $h = 54^{mm},6$. Or des expériences antérieures sur les glaces parallèles lui ont fourni, pour cette élévation $54^{mm},6$, un écart de $0^{mm},19$. Telle devra donc être également la distance des deux disques, ce qui exigera une quantité de liquide $0,19 \times 9156 = 1700^{mc} = 1^{gr},7$. L'expérience directe lui donne $1^{gr},6$. D'autre part, deux disques de 108 millimètres de diamètre et deux autres de 55 millimètres de diamètre, situés à la même distance que les deux premiers, ont nécessité respectivement 400 grammes et

›5 grammes pour leur séparation. Simon a multiplié ces expéences; mais il n'y a pas lieu d'insister sur des mesures qui ne ɔmportent pas grande précision, le liquide se rompant toujours n peu accidentellement.

Élévation de l'eau entre deux lames inclinées. — Soient maintenant deux lames verticales, inclinées l'une sur l'autre d'un angle α. Tant que la distance des deux lames est supérieure au double de l'épaisseur de la couche active, le phénomène obéit à la règle générale : la force qui soutient le liquide est proportionnelle à la projection horizontale de la ligne de raccordement; le poids du liquide soulevé par unité de longueur est donc 2F, quel que soit l'angle α.

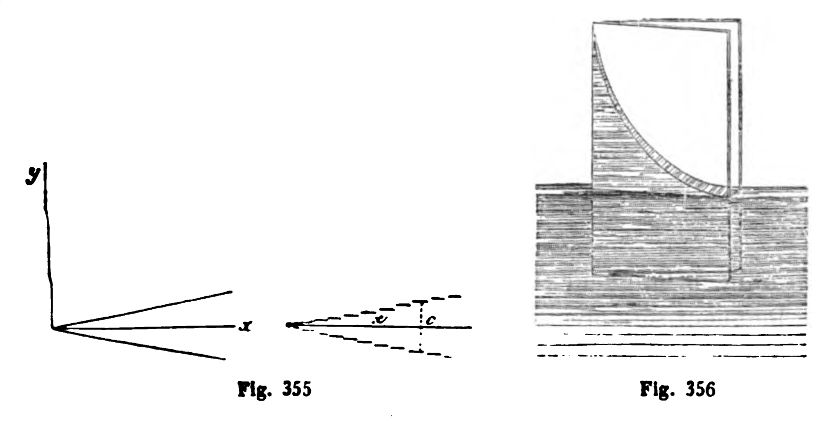


Fig. 355 Fig. 356

Le cas où l'angle α est très faible offre un intérêt particulier. Deux éléments plans, situés en regard l'un de l'autre sur une même perpendiculaire au plan bissecteur, pouvant alors sans erreur appréciable être considérés comme parallèles, la hauteur y du liquide dans le plan bissecteur sera donnée très sensiblement par la formule

$$cy = \frac{2F}{d},$$

c étant la distance des deux éléments perpendiculairement au plan. Soit, dans ce plan, x la distance de la région considérée au sommet,

$$c = 2x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2};$$

on a donc

$$xy = \frac{F}{d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}},$$

ce qui veut dire que l'intersection de la surface du liquide par plan bissecteur est une hyperbole équilatère, ainsi que l'avait r connu Taylor.

3° PHÉNOMÈNES DIVERS.

229. Élévation de l'eau contre une paroi plane. — Supposons une seule lame parfaitement mouillée. La force disponibl



Fig. 357

par unité de longueur étant F, le poids du liquide soulevé par unité de longueur sera précisément égal à F.

Wertheim (¹) a cherché à vérifier ce fait en mesurant l'aire du ménisque soulevé, tant sur des modèles en cire que sur des ménisques d'eau. A cet effet, il déterminait micrométriquement les ordonnées de chaque point de la courbe, ainsi que l'avait déjà tenté Hagen (²), puis reportant ces points sur un bon papier quadrillé, il traçait le profil du ménisque; enfin il découpait le papier suivant ce profil, et le pesait; le rapport du poids ainsi obtenu au poids d'un carré de côté déterminé donnait la surface du ménisque en millimètres carrés (108).

D'après la formule générale $z = \frac{F}{d}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$, le profil du ménisque est

$$y = \frac{F}{d} \times \frac{1}{P}.$$

(¹) Wertheim, *loc. cit.*
(²) Hagen, *Pogg. Ann.*, LXVII, 1845.

deuxième rayon R′ de la surface cylindrique, offerte par le ménisque, étant infini), c'est-à-dire

$$y = \frac{F}{d}\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et, si l'on intègre,

$$\frac{y^2}{2} + C = -\frac{F}{d}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Loin de la lame, on a à la fois $y=0$ et $y'=0$; donc $C = -\frac{F}{d}$; et par suite

$$y^2 = \frac{2F}{d}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right).$$

Contre la lame $y' = \infty$, d'où l'ordonnée à l'origine

$$a = \sqrt{\frac{2F}{d}}.$$

Pour l'eau, à 8°,5, $F = 7,55$, $d = 1$; par suite

$$a = 3^{mm},887.$$

Éd. Desains a mesuré avec grand soin l'élévation de l'eau contre une lame parfaitement nette et soigneusement mouillée, et il a trouvé

$$a = 3^{mm},849.$$

La petite différence de ce nombre avec la valeur théorique doit surtout être attribuée à la difficulté qu'on éprouve à reconnaître exactement la ligne d'attache du ménisque.

Wertheim avait espéré arriver à une détermination plus précise de a par ses mesures de l'aire totale de la section du ménisque, laquelle aire est $\frac{a^2}{2}$ puisque, le liquide étant soulevé en un

cylindre dont le poids est F par unité de longueur, la base d
ce cylindre est $\frac{F}{d}$ ou $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2F}{d}}\right)^2$ (¹).

Mais dans la mesure de la surface se rencontre une difficul
grave, signalée par Éd. Desains, et consistant en ce que, av
le temps, l'eau s'affaisse sur elle-même, tandis que la ligne h
rizontale qui la termine perd de sa netteté. C'est là une cause d'e
reur générale (231) qui a sans doute eu une influence marquée da
les expériences de Wertheim; car les valeurs de a, qu'il a déduit
des aires, bien que toutes supérieures à celles qu'il avait direct
ment mesurées sur ses profils, sont encore très inférieures au nom
bre obtenu par Éd. Desains.

Wertheim a trouvé que le degré de poli de la surface solide in
fluait sur la hauteur du liquide soulevé, ce dont on se rend compt
aisément, les surfaces polies ne se mouillant que très difficilemen
d'une manière uniforme. Par contre, la nature même du corps,
platine, cuivre, laiton, verre, cristal, lui a paru sans action, ains

(¹) Cette expression de l'aire peut également se déduire de l'équation de la courbe capillaire. On a

$$y^2 = \frac{2F}{d}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right),$$

ou, si l'on introduit l'ordonnée à l'origine a,

$$y^2 = a^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right),$$

ce qui peut s'écrire

$$y' \text{ ou } \frac{dy}{dx} = \frac{y\sqrt{2a^2 - y^2}}{a^2 - y^2}.$$

On a donc pour l'aire de la courbe

$$\int_{\infty}^{0} y\,dx = \int_{0}^{a} \frac{a^2 - y^2}{\sqrt{2a^2 - y^2}}\,dy = \frac{1}{2}\int_{0}^{a} d\left(\sqrt{2a^2y^2 - y^4}\right) = \frac{a^2}{2}.$$

Ainsi, la surface entière est égale au triangle rectangle isocèle qui a a pour base et pour hauteur.

Notons enfin que l'équation qui nous a fourni $y\,dx$ donne immédiatement le profil en quantités finies

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} \frac{a\sqrt{2} + \sqrt{2a^2 - y^2}}{y(1+\sqrt{2})} - \sqrt{2a^2 - y^2} + a.$$

e l'avait déjà indiqué Hauksbée et que l'avaient vérifié pour l'eau Œrstedt et Hagen.

Cependant, Linck [1], en opérant avec des couples de lames parallèles en verre, en cuivre et en zinc, avait observé, sinon pour l'eau, ı moins pour l'alcool et l'éther, des ascensions très différentes ıns les trois cas.

Depuis, Wilhelmy [2], par des mesures aréométriques précises, trouvé aussi avec l'alcool des résultats différents au contact de ifférents corps solides. Il y a donc dans certains cas des conditions nouvelles, sur lesquelles nous aurons à revenir, mais qui l'infirment en rien ce qui a été dit dans le cas parfaitement défini que nous avons examiné.

230. Formation des gouttes à un orifice capillaire. — Nous considérerons encore un phénomène qui s'explique aisément à l'aide de la tension superficielle, et qui donne un moyen facile d'évaluer les tensions relatives des divers liquides. Ce phénomène, successivement étudié par Hagen [3], Tate [4], Dupré [5], et M. Duclaux [6], est la formation des gouttes à un orifice capillaire.

Loi de Tate. — Lorsque le liquide se présente à l'orifice, il commence par former un mamelon à forte courbure, ce qui indique en chacun des points de la surface une pression normale assez considérable. Si la pression intérieure n'est pas suffisante, la goutte s'arrête dans son développement. Si, au contraire, la pression intérieure peut triompher de cette résistance initiale, la goutte se gonfle ensuite aisément, comme dans un petit sac élastique dont la tension diminue à mesure que le sac grossit. Puis, lorsque la goutte est devenue assez volumineuse, elle s'étrangle très légèrement à sa partie supérieure et se rompt suivant une circonférence d'un diamètre peu différent de celui de

(1) Linck, *Pogg. Ann.*, XXXI, 593; 1834.
(2) Wilhelmy, *Pogg. Ann.*, CXIX, 177; 1863.
(3) Hagen, *Pogg. Ann.*, LXVII, 152; 1846.
(4) Tate, *Phil. mag.*, (4), XXVII, 176; 1864.
(5) Dupré, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), IX, 345; 1866.
(6) Duclaux, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XXI, 386; 1870.

l'orifice [1]. La goutte se détache donc lorsque son poids est infiniment peu supérieur à la tension superficielle le long du cercle de gorge, et comme le diamètre de ce cercle de gorge peut être supposé proportionnel au diamètre de l'orifice, on voit que

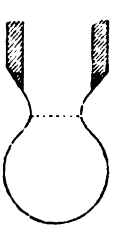


Fig. 358

toutes choses égales d'ailleurs, le poids des gouttes sera proportionnel au diamètre de l'orifice [2] et non pas au carré de ce diamètre, ainsi que cela devrait être si chaque goutte était supportée par une force agissant sur toute la surface du cercle de gorge. L'expérience vérifie entièrement cette manière de voir : Tate a observé que le poids des gouttes d'un même liquide, qui se forment à l'*extrémité* d'un tube étroit, est proportionnel au diamètre du tube. Il a reconnu en outre que ce poids est diminué par l'élévation de température et qu'il est indépendant de la nature du corps solide formant l'orifice, pourvu que le solide soit parfaitement mouillé par le liquide. Tous ces faits sont d'accord avec ce que nous savons des autres phénomènes capillaires.

Application à la mesure des tensions superficielles et à l'alcoométrie. — Des lois qui précèdent se tirent deux applications :

1° Un moyen, indiqué par Hagen et mis en œuvre d'une manière exacte par M. Duclaux, de déterminer les tensions superfi-

[1] C'est par suite de la formation et de l'étranglement complet d'un pareil sac qu'un grain de plomb peut traverser une membrane de liquide glycérique sans la crever.

[2] Sur toute la circonférence du cercle de gorge le plan tangent à la surface de la goutte est vertical ; la tension superficielle F agit donc en sens directement opposé à la pesanteur, et l'on peut écrire

$$p = KRF,$$

p étant le poids de la goutte, K une constante, et R le rayon de l'orifice.

lles relatives des divers liquides (¹) : il suffit pour cela de compter nombre de gouttes N, fourni par un même volume V des vers liquides s'écoulant d'une même pipette à orifice suffisament étroit ; D étant la densité du liquide, $p = \frac{V}{N} D$, et la tension iperficielle F est proportionnelle à $\frac{D}{N}$.

2° Un alcoomètre, imaginé par M. Duclaux, et qui consiste en ne pipette de 5^{cc} de capacité, munie à sa partie inférieure 'un orifice ordinaire de *compte-gouttes* (donnant avec l'eau dislée des gouttes de 50 milligrammes), et fournissant par conséuent 100 gouttes avec l'eau. Si l'on ajoute à l'eau de l'alcool, es gouttes diminuent de grosseur, et par suite leur nombre pour n même volume de liquide augmente ; chaque nouvelle addition l'alcool accroît le nombre des gouttes. On a donc pu dresser une table permettant d'employer la pipette en qualité d'alcoomètre, lequel est particulièrement et remarquablement sensible pour les mélanges pauvres en alcool. Voici quelques nombres de cette table, correspondant à la température de 15°.

Titre alcoolique.	Nombre de gouttes.	Titre alcoolique.	Nombre de gouttes.
0	100	10	145
1	107	15	160
2	113	20	175,5
3	118	30	204
4	123	40	227,5
5	127	50	242
6	131	60	249,5
7	134	70	254
8	137,5	80	257
9	141,5	90	259

Au moyen de cet appareil, on peut aisément montrer que la grosseur d'une goutte est fort influencée par l'action d'une couche d'épaisseur très faible, enveloppant la goutte comme une membrane susceptible d'extension, mais qui se brise quand le poids à soutenir devient trop grand pour elle. Si, en effet, on pro-

(¹) M. Quincke a même essayé de mesurer ainsi les tensions superficielles des métaux fondus, par la grosseur des gouttes se détachant de fils métalliques portés à la fusion (QUINCKE, *Pogg. Ann.*, CXXV, 621 ; 1865 ; et *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XVI, 502).

voque l'écoulement de l'eau à travers la pipette placée au-dessus d'un flacon dont on a humecté les parois d'alcool à divers titres on trouve :

En présence de l'alcool	à	90	degrés	116	gouttes.
»	»	70	»	112	»
»	»	35	»	108	»
»	»	15	»	103	»
»	»	5	»	101	»
En présence de l'eau distillée. . . .				100	»

De ces nombres et d'une analyse du liquide écoulé, M. *Duclaux* a pu déduire l'épaisseur de la couche active qui s'est montrée, dans tous les cas, très voisine de $\frac{1}{50}$ de millimètre.

231. Effet d'un contact prolongé avec l'air. — Chacune des expériences précédemment citées donne un moyen de mesurer la tension superficielle. La valeur du moyen dépend évidemment du degré d'exactitude que comporte l'expérience à laquelle on s'adresse. Cependant un fait général se dégage nettement des mesures faites par les divers procédés. Toutes les fois que la surface liquide, si elle n'a pas pu être complètement abritée, comme dans les tubes, n'est du moins restée à l'air qu'un temps très court, la tension superficielle s'est montrée plus forte que lorsque le contact avec l'air a été un peu prolongé. Sur de l'eau exposée à l'air, il se forme toujours une sorte de feutrage plus ou moins serré, provenant soit des poussières de l'air, soit des résidus que l'évaporation laisse à la surface. Ce feutrage diminue considérablement la tension superficielle [1]. On devra donc, dans les mesures

[1] M. Marangoni explique ainsi comment une aiguille aimantée, oscillant à la surface d'un liquide, peut avoir un mouvement plus lent que lorsque, complètement immergée, elle éprouve des résistances sur ses deux faces. Si dans le premier cas, en effet, sa face inférieure frotte seule contre le liquide, en oscillant elle laisse derrière elle des surfaces fraîches, dont la tension est plus considérable que celle des portions situées en avant, qui ont subi depuis un certain temps le contact de l'air : de là une résistance élastique, s'ajoutant au frottement. Mais Plateau, qui a découvert cette *viscosité superficielle*, avait trouvé que si certains liquides, comme l'eau, les dissolutions salines, la glycérine,

tension superficielle, à défaut d'observations dans les tubes, férer les déterminations rapides sur des surfaces fraîches.

— PHÉNOMÈNES OFFERTS PAR UN LIQUIDE AU CONTACT D'UN SOLIDE QU'IL NE MOUILLE PAS OU D'UN AUTRE LIQUIDE.

232. Tension superficielle au contact d'un solide ou un autre liquide. — Jusqu'ici nous n'avons considéré un quide qu'en contact avec lui-même. Supposons maintenant qu'un iquide soit en contact avec un autre corps liquide ou solide. Si, nous reportant au raisonnement par lequel nous avons prouvé l'existence d'une tension dans la couche de surface libre d'un liquide (219), nous rétablissons au-dessus de cette surface SS les molécules manquant dans chaque sphère d'activité M′, nous détruisons la tension superficielle. L'action tangentielle du liquide rétabli

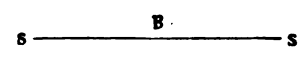


Fig. 359

sur la couche superficielle du liquide inférieur est donc égale à $-F$. Si, au lieu d'ajouter au-dessus de SS du liquide A, nous y mettons un autre corps B, l'action tangentielle de B sur A sera pareillement une certaine force $-F'$; et la tension dans la couche superficielle de A deviendra $F-F'$. Ainsi, au contact d'un autre liquide ou d'un solide B, la tension superficielle en A est $F-F'$.

A. — LIQUIDE EN CONTACT AVEC UN SOLIDE QU'IL NE MOUILLE PAS.

233. Influence de la paroi solide. — Prenons d'abord le cas où le corps B est solide. De part et d'autre de la surface de

présentent à la surface une augmentation de résistance, le contraire a lieu pour l'alcool, l'éther, la térébenthine, le sulfure de carbone. M. Oberbeck a récemment vérifié ces faits. Il paraît donc bien qu'il existe à la surface des liquides une résistance spéciale. (PLATEAU, *loc. cit.*, II, 44; MARANGONI, *Nuovo Cimento*, III, 50, 97, 192; 1878; et *Journal de physique*, VIII, 140; OBERBECK, *Phil. mag.*, (5), XI, 132; 1881; et *Journal de physique*, X, 448.)

séparation et parallèlement à cette surface s'exercent les forces $F - F'$ et $-F'$. L'action superficielle totale est donc

$$f = F - 2F'.$$

Selon la nature des corps mis en présence, cette force f peut être positive, nulle, ou négative.

Si le double de l'action du solide sur le liquide est moindre que l'action du liquide sur lui-même, en d'autres termes si $f > 0$, la surface de contact est le siège d'une véritable tension, absolument comme la surface libre extérieure, seulement cette tension est réduite à f par unité de longueur.

Quand au contraire $f < 0$, la surface de contact est sollicitée par une force d'extension (Van der Mensbrugghe), $2F' - F$, tendant à étaler le liquide sur le solide.

Pour $f = 0$, l'action est nulle; le liquide ne tend ni à s'étaler sur le solide, ni à se resserrer sur lui-même.

Angle de raccordement. — Soient PP′ la paroi, mS la surface libre du liquide; considérons la molécule située en m; si nous faisons abstraction de son poids, entièrement négligeable relativement aux forces ici en jeu, cette molécule est sollicitée par les

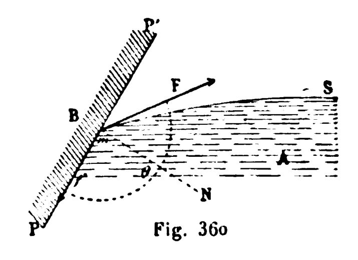


Fig. 360

deux forces : F, dirigée suivant le premier élément de la surface libre, et f dirigée suivant la paroi (du côté du liquide, si la force est positive). Pour que m reste en équilibre, il faut et il suffit que la somme algébrique des composantes suivant PP′ soit nulle (la composante normale étant détruite par la résistance du plan PP′ supposé fixe), ce qui donne

$$F \cos\theta + f = 0,$$

θ désignant l'angle de raccordement compris entre la surface libre et la portion de la paroi en contact avec le liquide.

On tire de là

$$\cos\theta = -\frac{f}{F}.$$

F est toujours positif, θ est donc obtus quand f est positif, c'est-à-

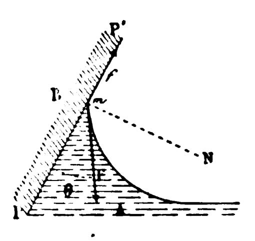


Fig. 361

dire quand le liquide ne mouille pas la paroi. Si $f = 0$, $\theta = 90°$: acier légèrement gras et eau. Si f est négatif, l'angle devient aigu, le liquide commençant à mouiller la paroi. Pour que l'équation qui définit θ donne une valeur réelle de cet angle, il faut que $-f$ soit plus petit en valeur absolue que F, ce qui exige que F' soit plus petit que F, valeur à partir de laquelle intervient le cas des liquides mouillant parfaitement.

Expériences de Wilhelmy et de M. Quincke. — Wilhelmy [1] et M. Quincke [2] ont fait de nombreuses mesures de phénomènes capillaires dans les conditions pour lesquelles l'angle de raccordement est compris entre 0 et 90°. Wilhelmy même pense que l'angle de raccordement du liquide mouillant parfaitement ne doit qu'exceptionnellement être nul. Il admet, après Poisson, que la gaîne liquide adhérente au solide doit en général avoir une densité notablement différente du reste du liquide, et par conséquent provoquer la formation d'un angle θ, dépendant de la condensation spéciale du liquide adhérent. Il est sans doute possible que les choses se passent ainsi. Mais d'une part, les mesures les plus précises établissent pour les liquides mouillant bien des angles toujours petits : l'eau au contact du verre donne à M. Quincke $\theta = 4°40'$ [3].

(1) Wilhelmy, *Pogg. Ann.* CXIX, 177 ; CXXI, 44 ; CXXII, 1 ; 1863-64.

(2) Quincke, *Pogg. Ann.* CXXXV, 621 ; CXXXIV, 1 ; 1868-70.

(3) Poisson supposait cet angle de 30° à 40°. Il est vrai qu'en ajoutant à l'eau une trace de matière grasse, Quincke vit l'angle monter de 4°40' à 40°31'.

D'autre part, on rencontre dans ces expériences une instabilité spéciale, qui rend les mesures singulièrement difficiles. Nous n'insisterons donc pas davantage sur ces faits, tout intéressants qu'ils sont; nous mentionnerons seulement les expériences très ingénieuses de M. Quincke ([1]) pour déterminer le rayon de la sphère d'activité moléculaire.

Rayon de la sphère d'activité moléculaire. — Sur une lame de verre déposons une couche d'argent en forme de coin à angle très aigu ([2]), coupons cette lame en deux par une section perpendiculaire à l'arête du coin; mettons en regard les deux moitiés de manière à constituer un système de deux lames parallèles voisines, trempons le système dans l'eau, et mesurons l'ascension du liquide aux divers points. Cette ascension, là où la couche d'argent est nulle, aura la valeur connue; puis, à mesure que la couche d'argent devient plus épaisse, θ augmente, et l'ascension h diminue jusqu'à ce que, l'épaisseur de la couche ayant atteint une certaine valeur, θ et h restent ensuite constants : cette valeur mesurera évidemment le rayon ρ de la sphère d'activité moléculaire de l'argent relativement à l'eau. Voici, par exemple, les résultats d'une expérience ainsi conduite ([3]).

Distance des deux lames : $0^{mm},633$.

x	ε	h	θ
0^{mm}	$0^{\mu},0040$	$13^{mm},74$	$54°33'$
1	0,0052	13 , 58	55 02
2	0,0080	13 , 33	55 44
3	0,0130	13 , 10	56 26
4	0,0142	12 , 82	57 15
5	0,0200	11 , 92	59 48
6,5	0,0284	9 , 73	65 38

([1]) QUINCKE, *Pogg. Ann.*, CXXXVII, 402; 1869.

([2]) Pour cela on argente la lame avec une couche de liquide Martin, sur laquelle on a posé un cylindre de verre de grand rayon, de façon à avoir une lame de liquide d'épaisseur graduellement croissante depuis la ligne de contact jusqu'au bord.

([3]) Les épaisseurs ε de l'argent aux divers points x étaient mesurées au moyen de l'échelle des teintes de Newton, la couche d'argent déposée étant partout transparente.

Ici la limite n'est pas atteinte. Elle ne le fut même pas dans e autre expérience où ε croissait jusqu'à $0^{\mu},0542$. On a donc

$$\text{argent—eau} \quad \rho > 0^{\mu},0542.$$

En transformant la couche d'argent en sulfure, et en observant s dépressions présentées par le mercure, M. Quincke trouva

$$\text{sulfure d'argent—mercure} \quad \rho = 0^{\mu},0483.$$

l obtint de même

$$\text{iodure d'argent—mercure} \quad \rho = 0^{\mu},0590,$$
$$\text{collodion—mercure} \quad \rho < 0^{\mu},0800.$$

Si l'on compare ces nombres entre eux et à celui qu'a trouvé Plateau (222) pour la sphère d'activité moléculaire du liquide glycérique sur lui-même, on sera amené à conclure que la distance à laquelle se fait sentir l'action moléculaire est sensiblement la même pour tous les corps [1], et très voisine de

$$0^{\mu},050,$$

ou $\frac{1}{20}$ de micron.

234. Phénomènes offerts par le mercure au contact du verre. — Les phénomènes présentés par les liquides qui ne mouillent pas, comme le mercure au contact du verre, ne sont pas aussi nettement définis que ceux que nous avons étudiés dans le cas des liquides mouillant parfaitement. Les résultats expérimentaux manquent de fixité. La nature même du phénomène n'est

[1] M. Bède avait cru observer une influence de l'épaisseur des parois sur l'ascension de l'eau à l'intérieur de tubes capillaires en verre plus ou moins épais, dans des limites naturellement bien supérieures à celles-ci. Mais M. Soret a montré que la différence des résultats provenait uniquement de la différence d'état des surfaces intérieures des tubes, les tubes minces se trempant par refroidissement au moment de la fabrication bien plus que les tubes épais, qui se refroidissent plus lentement : il a suffi à M. Soret de chauffer fortement un tube épais et de le refroidir ensuite brusquement pour le voir se comporter comme un tube mince.

pas hors de toute contestation. Certains physiciens nient formellement que l'on ait un seul exemple de dépression capillaire causée par l'action d'un corps solide sur un liquide sans l'intervention d'un second liquide (¹). Suivant eux, la dépression du mercure est en réalité produite par l'action réciproque de deux liquides de tension superficielle extrêmement différente, l'eau et le mercure. De même, l'eau au contact d'un solide gras se trouverait en présence d'un liquide de moindre tension superficielle, la graisse recouvrant le solide. En fait, toutes les actions observées résulteraient du contact de deux liquides différents. Il paraît cependant possible d'avoir du mercure en contact avec du verre qui ne soit pas mouillé et, en tous cas, cette manière de concevoir les choses rend convenablement compte de phénomènes trop importants pour que, malgré ces incertitudes, nous puissions les passer sous silence.

Expérience de Gay-Lussac. — Avant tout, il est essentiel de vérifier si, comme nous avons été conduit à l'admettre dans l'hypothèse où la pesanteur est absolument négligeable relativement aux forces moléculaires, l'angle de raccordement est constant.

Pour établir cette constance, dans le cas du mercure en présence du verre, Gay-Lussac a fait l'expérience suivante, devenue classique.

Une boule de verre, soufflée dans un tube capillaire vertical, relié lui-même à un tube large également vertical, reçoit le mercure par sa partie inférieure. Au fur et à mesure que le mercure s'élève dans la boule, sa surface présente une série de formes, dont on se rend compte en admettant que l'angle de raccordement reste constant, quelle que soit l'inclinaison de la paroi sur l'horizon. L'angle aigu sous lequel le mercure se détache du verre étant peu différent de 45°, on aura d'abord un bouton très convexe 1, avec une forte dépression 1′1, puis sur le parallèle à 45° dans l'hémisphère inférieur un ménisque 2, quittant verticalement la paroi, et une moindre dépression 2′2. A l'équateur, le premier élément de la surface mercurielle 3 ne se relève plus qu'à 45° sur l'horizon; et la dépression 3′3 a encore diminué. Sur le parallèle 45° dans l'hémisphère supérieur, la surface 4 du mercure est horizontale dans toute son étendue, et exactement au niveau 4′ du mercure dans le tube large.

(¹) Wertheim, *Ann. de chim. et de phys.* (3), LXIII, 168; 1861.

nsuite la surface se creuse en même temps qu'elle s'élève; et à partie supérieure de la boule se forme un ménisque fortement

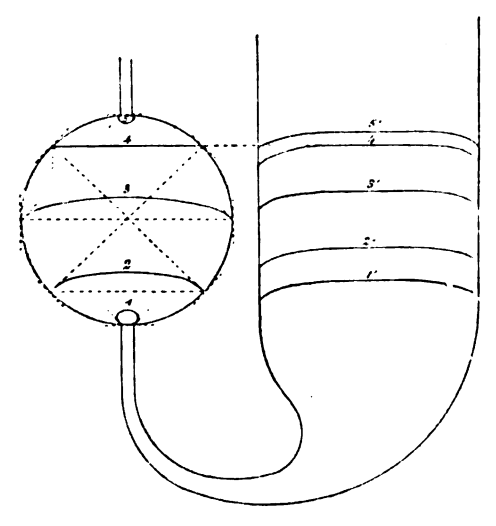


Fig. 362

concave 5, très sensiblement au-dessus du niveau 5′ dans le gros tube.

Des mesures plus précises ont été instituées. Pour le moment, nous regarderons le fait comme exact, et nous y rattacherons les autres phénomènes, en suivant dans cette étude le même ordre que pour les liquides qui mouillent.

235. Dépression dans un tube cylindrique.—Soit d'abord un tube, de rayon r, plongé dans le mercure.

Loi de Jurin. — A l'intérieur du tube la surface est convexe, et sur tout le pourtour du ménisque s'exerce de haut en bas une

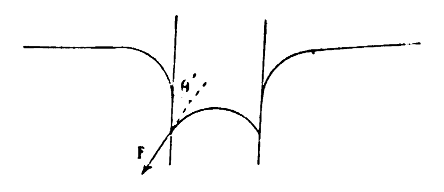


Fig. 363

force verticale $F \cos \theta'$, F désignant la tension superficielle du mercure, et θ' l'angle *aigu* de raccordement. Le liquide est donc dé-

primé à l'intérieur du tube, et en appelant h la hauteur moyenne de la colonne abaissée, d la densité du liquide, on doit avoir

$$F \cos \theta' . 2\pi r = \pi r^2 h d,$$

ou

$$rh = \frac{2F \cos \theta'}{d}.$$

On retrouve la loi de Jurin.

Expériences de Bède, de Danger. — Les vérifications expérimentales offrent une grande difficulté. Il ne s'agit pas seulement de l'obstacle que l'opacité du mercure semble apporter à la lec-

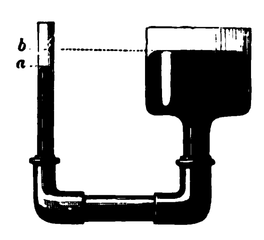


Fig. 364

ture de la dépression : on tourne aisément cet obstacle soit en amenant le tube contre la paroi du vase contenant le mercure (Gay-Lussac), soit en employant un tube à siphon, dont l'une

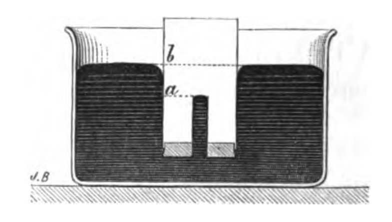


Fig. 365

des branches présente une largeur suffisante pour qu'il n'y ait pas de dépression générale (Regnault). Ces deux moyens conviennent quand le tube est transparent. S'il est opaque, on peut, comme Avogadro, le placer dans l'axe d'un tube de verre, fermé à sa partie in-

rieure d'un bouchon qui laisse seulement passer le tube à expémenter. On enfonce le tout dans le mercure jusqu'à ce que le quide apparaisse au sommet du tube capillaire : la distance *ba* iesure la dépression. On peut mieux encore introduire dans le ibe opaque une sonde électrique, fixée à la vis d'un sphéromètre, t reliée à un galvanomètre qui indique l'instant précis où la sonde ient toucher la surface du mercure. Ces procédés, et d'autres u'on pourrait imaginer, permettent de faire des mesures exactes vec toutes sortes de tubes et de liquides.

Mais la grosse difficulté réside dans la nature même du phénomène.

D'abord il est difficile d'avoir du mercure pur *en contact* avec un solide.

Puis le frottement du mercure contre la paroi du tube intervient pour altérer les résultats, comme le prouve une vieille expérience. Le P. Abat prenait un siphon renversé étroit, y introduisait du

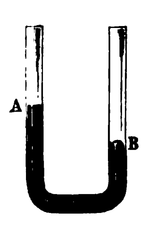


Fig. 366

mercure, inclinait le siphon du côté A, puis le ramenait lentement dans la position verticale : le mercure restait plus haut dans la branche A, tandis que le ménisque de B se bombait fortement sous l'action de la force de frottement s'ajoutant à la tension superficielle en B. En additionnant de tels effets, on peut obtenir des résultats très curieux. Avec un chapelet de gouttes de mercure, séparées par des bulles d'air, M. Jamin (1) a réussi à équilibrer des pressions énormes (2).

(1) Jamin, C. R., L, 172; 1860.

(2) Il est remarquable que l'expérience réussit avec l'eau. En multipliant suffisamment les segments, M. Jamin a obtenu des colonnes résistant à plusieurs atmosphères. Chaque index d'eau se courbe inégalement à ses deux extrémités, et transmet au suivant une pression moindre que celle qu'il reçoit ; on conçoit donc qu'avec un nombre suffisant d'index on puisse faire équilibre à un excès

Enfin, la masse liquide elle-même ne se met que péniblement en équilibre (238).

Cependant M. Bède (1) a obtenu une vérification satisfaisante de la loi avec les tubes fins, pour lesquels la hauteur moyenne h pouvait se déduire assez exactement de la hauteur observée h_1 par une formule approchée $\left(\text{il prenait } h = h_1 + \frac{1}{6} r\right)$.

D'autre part, Éd. Desains a trouvé dans des expériences très nombreuses et très précises de Danger une confirmation *exacte* de la valeur théorique de la flèche f, telle qu'elle a été donnée par

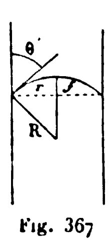


Fig. 367

Laplace. Si le tube est assez étroit pour que le ménisque puisse être assimilé à une calotte sphérique de rayon R, on a

$$f = R(1 - \sin\theta') = r\frac{1 - \sin\theta'}{\cos\theta'}.$$

Mais en général l'expression de la flèche dépend de F ainsi que de θ'. Éd. Desains (2) a trouvé que, si l'on prenait

$$F = 45^{\text{mmg}},6$$

et

$$\theta' = 37^\circ\ 52',$$

le calcul reproduisait à moins de $\frac{1}{20}$ de millimètre les flèches

de pression quelconque. Cela suppose toutefois que le liquide rencontre une certaine difficulté à glisser le long du tube, difficulté qui provient de ce que, dans les conditions ordinaires, le tube est imparfaitement mouillé. Avec un tube bien mouillé, la résistance de 100 index d'eau, mesurée immédiatement après leur introduction, s'est montrée à Plateau à peine de quelques millimètres; deux minutes après, la résistance était déjà beaucoup plus considérable, les index ayant attiré à eux une partie de la gaîne mouillant le tube (Plateau, *loc. cit.*, I, 82).

(1) Bède, *Mémoires couronnés de l'Académie de Bruxelles*, XXV, 3; 1852.

(2) Éd. Desains, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), 41, 435; 1857.

surées par Danger [1] dans des tubes de 1 à 30 millimètres de on.

;es valeurs de F et de θ' diffèrent assez notablement de celles

$$F = 41^{\text{mmg}},4$$

$$\theta' = 45^\circ 30'$$

ıe Poisson [2] avait déduites de trois ou quatre expériences de ıy-Lussac ; l'écart est surtout considérable pour l'angle.

Bravais [3] a trouvé sur divers baromètres des différences plus ;randes encore, tandis que dans un même instrument l'angle va- ;iait fort peu.

De légères impuretés du mercure suffisent sans doute à modifier ırofondément les phénomènes capillaires. D'autre part, avec un nême mercure et un même verre, l'angle capillaire n'est pas réellement constant (238). Aussi, tous ceux qui, depuis Bouvard jusqu'à Mlle Gutkowska, ont construit des tables de correction capillaire pour le baromètre, ont-ils eu soin de donner pour un même rayon les dépressions correspondant à différentes valeurs de θ', ou, ce qui revient au même, à différentes valeurs de la flèche f. Il est plus commode en effet de mesurer la flèche que l'angle capillaire. Si le ménisque était circulaire, la dépression moyenne h serait reliée à la flèche par l'équation

$$h = \frac{4F\mathrm{f}}{d(r^2 + \mathrm{f}^2)}.$$

La théorie donne l'équation exacte. On peut donc, en admettant une valeur constante de F, dresser une table indiquant, pour chaque valeur de r, les dépressions correspondant aux diverses valeurs possibles de la flèche f (274).

Cette table conviendra en général suffisamment pour un baromètre quelconque; car, si d'un mercure à l'autre θ' varie de 38° à

(1) Danger, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXIV, 501; 1848.
(2) Poisson, *loc. cit.*, 219.
(3) Bravais, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), V, 492; 1842.

46°, c'est-à-dire de près de $\frac{1}{5}$, F change beaucoup moins, à peine de $\frac{1}{20}$ de sa valeur.

Ménisque à l'extrémité d'un tube capillaire. — Lorsque le mercure arrive à l'extrémité d'un tube capillaire, le ménisque s'ap-

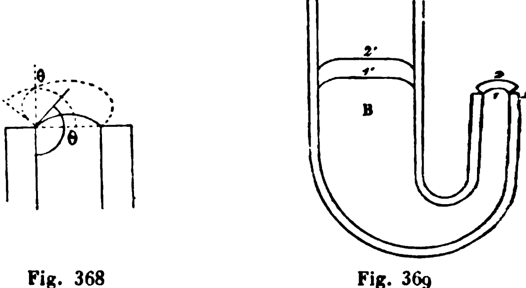


Fig. 368 Fig. 369

puyant sur l'arête inférieure peut présenter toutes les formes comprises entre deux limites qui sont définies par les deux positions du plan tangent faisant l'angle de raccordement, soit avec la *paroi verticale* du tube, soit avec la face plane qui le termine. Chacune de ces formes correspondant à une pression spéciale, on observera toute la série des ménisques possibles en versant graduellement du mercure dans un gros tube B, relié au tube en expérience A : on verra le bouton terminal passer de la forme normale 1 à la deuxième limite 2, pendant que le mercure montera dans la branche large de 1′ à 2′. Pour une pression plus forte, une goutte *se détachera* en A.

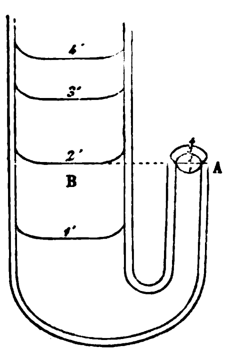


Fig. 370

On peut observer des effets semblables avec l'eau, en graissant

rement l'extrémité plane du tube A (1). On a alors successivement ménisque concave 1, accompagnant l'ascension régulière; puis plan 2, au moment où l'égalité de niveau s'établit dans les x branches; puis un ménisque 3, symétrique du ménisque 1 par port au plan AB, et une dépression 3′3, égale et de signe contraire l'ascension 1′1; puis enfin le ménisque convexe limite 4, avec dépression maximum 4′4, au delà de laquelle l'eau s'échappe par tube A.

236. Dépression entre deux lames parallèles. — La pression entre deux plans parallèles est encore la moitié de celle qui se produit dans un tube de diamètre égal à la distance des deux lames.

237. Dépression contre une paroi plane. — Le volume déprimé contre un plan vertical est, par unité de longueur,

$$\frac{F}{d}\cos\theta'.$$

Le profil du ménisque est

$$y^2 = \frac{2F}{d}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right).$$

Contre la lame, $y' = \operatorname{cotg}\theta'$, d'où l'ordonnée à l'origine

$$h = \sqrt{\frac{2F}{d}(1 - \sin\theta')}.$$

Avec $F = 47^{mg}$ et $\theta' = 42°$ il vient

$$h = 1^{mm},51, .$$

(1) Cette expérience, ordinairement attribuée à Dufay, est due à Aggiunti, de l'Académie del Cimento.

ce qui est précisément la valeur qu'Éd. Desains a trouvée pour dépression le long d'un plan de verre.

238. Goutte de mercure sur un plan de verre. — Si l' dépose une goutte de mercure sur un plan, le liquide prend u forme qui a été soigneusement étudiée. Une goutte très petite se évidemment à peu près sphérique. Si la goutte est assez large po que l'on puisse considérer son rayon comme infini par rapport rayon de courbure de sa section méridienne, la question se rattac immédiatement au cas précédent (¹).

Considérons du mercure en contact avec une paroi incliné Soient ω l'angle de cette paroi avec l'horizon, et α l'angle qu fait la tangente au point de contact avec la verticale. Les conditi

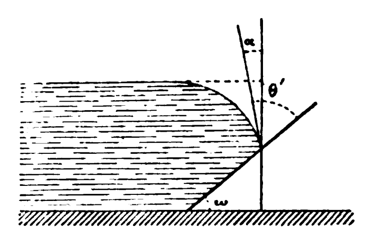


Fig. 371

sont les mêmes que si l'on avait contre une paroi verticale un liquide faisant un angle aigu de raccordement α. L'ordonnée à l'origine est donc

$$y = \sqrt{\frac{2F}{d}(1 - \sin\alpha)}.$$

ou, si l'on remplace α par sa valeur $\omega + \theta' - 90$,

$$y = \sqrt{\frac{2F}{d}(1 + \cos(\omega + \theta'))}.$$

Faisons maintenant $\omega = 0$, l'ordonnée à l'origine mesurera précisément l'épaisseur ε de la goutte.

(¹) Voir Duclaux, *loc. cit.*

On a donc

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{2F}{d}(1+\cos\theta')}$$
$$= 2\sqrt{\frac{F}{d}}\cos\frac{\theta'}{2}.$$

elle est l'épaisseur d'une goutte infiniment large.

Laplace, puis Poisson, ont donné la solution générale.

Mesures d'Édouard Desains. — Édouard Desains a vérifié la formule sur des gouttes de rayons compris entre 7^{mm} et $49^{mm},5$. Il versait du mercure sur un plan de verre entre les pieds d'un sphéromètre ; aussitôt il abaissait la vis jusqu'au contact du mercure, et ensuite jusqu'au contact du verre, le mercure étant enlevé. Il mesurait ainsi, immédiatement après avoir formé la goutte, son épaisseur qui s'est toujours trouvée d'accord avec l'épaisseur calculée. Pour ce calcul, il avait adopté les valeurs

$$F = 47^{mg}$$

et

$$\theta' = 42°,$$

déduites de : 1° la dépression $h = 1^{mm},51$ du mercure au contact d'une paroi verticale de verre ; 2° l'épaisseur $\varepsilon = 3^{mm},465$ d'une goutte de rayon infini.

Le tableau suivant résume ses recherches sur ce sujet :

Rayons.	Épaisseurs. observées.	Épaisseurs. calculées.	Δ
$7^{mm},00$	$3^{mm},569$	$3^{mm},551$	$+0^{mm},018$
8 ,00	3 ,605	3 ,597	+0 ,008
9 ,00	3 ,652	3 ,620	+0 ,032
11 ,75	3 ,638	3 ,627	+0 ,011
15 ,00	3 ,566	3 ,607	−0 ,041
21 ,25	3 ,537	3 ,570	−0 ,033
27 ,25	3 ,518	3 ,548	−0 ,030
38 ,00	3 ,505	3 ,525	−0 ,020
49 ,5	3 ,492	3 ,511	+0 ,019
∞	»	3 ,465	»

Ainsi, l'épaisseur de la goutte, qui serait évidemment nulle pour $r=0$, augmente avec r jusqu'à ce que $r=10$ millimètres environ; l'épaisseur est alors maximum et égale à $3^{mm},65$; elle décroît ensuite très lentement, et, pour $r=\infty$, $\varepsilon=3^{mm},47$. Il ne faut pas oublier que ces nombres se rapportent aux premiers instants de l'existence de la goutte. Éd. Desains a reconnu en effet que l'épaisseur diminue peu à peu avec le temps, tandis que le mercure perd progressivement de sa fluidité, à tel point que si l'on fait une impression sur son pourtour, cette impression persiste comme sur du beurre. Si alors on agite le mercure, il reprend de la fluidité et se relève, sans presque jamais revenir à son premier état. Tous ces faits sont d'accord avec ce que nous a déjà montré l'eau (231), la plus mince couche d'oxyde à la surface du mercure suffisant pour diminuer très sensiblement la tension superficielle. Mais voici des complications nouvelles.

Expériences de M. Quincke. — M. Quincke [1] a d'abord déterminé au cathétomètre sur diverses gouttes, préparées avec le plus grand

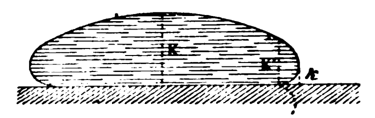


Fig. 372

soin, trois ordonnées : l'ordonnée maximum K, l'ordonnée K' correspondant au point où la goutte se détache du verre, enfin l'ordonnée k correspondant au bord de la goutte [2]. Ces mesures ont mis en évi

[1] QUINCKE, *Pogg. Ann.*, CV, 1; 1858; et *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LV, 22?

[2] Dans le cas d'une goutte très large

$$K=\varepsilon=\sqrt{\frac{2F}{d}(1+\cos\theta')}.$$

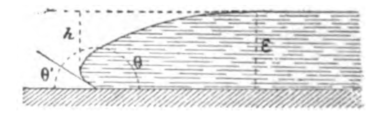


Fig. 373

En se reportant à l'équation

$$y^2=\frac{2F}{d}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\right),$$

ıce un changement continu dans la forme des gouttes, change-nt très rapide pendant les premières minutes qui suivent le dépôt liquide, se ralentissant bientôt, mais ne cessant pas au bout plusieurs heures ni même de plusieurs jours. Par exemple, une utte du poids de $13^{gr},014$, observée dans l'air sec à l'instant où le a été déposée et 5 minutes après, a donné

1re observation	$K=3^{mm},689$	$K'=1^{mm},798$	$k=0^{mm},810$,
2e observation	$3\ \ ,622$	$1\ \ ,798$	$0\ \ ,874$.

'diminue donc. Lorsque ce changement s'est produit d'une manière ıotable, la moindre oscillation de l'appareil amène une modifica-ion en sens inverse : on observe un accroissement temporaire de F, qui lui-même ne tarde pas à être suivi d'un nouveau décroissement continu. La déformation des gouttes a lieu aussi bien dans de l'air entièrement privé d'oxygène, que sous l'eau ou dans l'acide chlorhydrique pur.

M. Quincke a ensuite mesuré optiquement l'angle de raccordement, que les mesures précédentes ne déterminaient qu'avec peu de précision. Pour cela, faisant tomber sur le bord d'une goutte de mercure G, écrasée par un plan de verre V, un mince faisceau

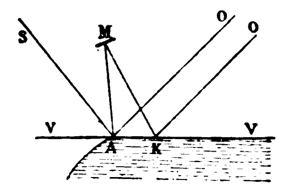


Fig. 374

de rayons parallèles SA, il a reçu les rayons réfléchis par le mercure au point de raccordement A sur un petit miroir plan M, auquel il a donné une orientation telle que le rayon réfléchi successivement

et en y faisant $y'=x$, on a

$$h=\sqrt{\frac{2F}{d}}.$$

De ces deux éléments K et h (ou $k=K-h$) on peut donc déduire F et θ.

suivant AM, MK, KO, arrivât à l'œil O dans la même direction qu
le rayon AO, simplement réfléchi sur la surface de séparation d
verre et du mercure : le miroir M est dès lors parallèle au derni
élément de la surface libre du mercure. Si on le tourne da
un certain sens, l'image produite par le rayon trois fois réfléc
(et que sa faiblesse relative distingue immédiatement) persister
tandis qu'une rotation en sens inverse fera disparaître cette imag
Il est donc facile d'apprécier avec exactitude le moment où l
miroir M est parallèle au dernier élément, et pour connaître θ' i
n'y a plus qu'à déterminer l'angle que fait alors le miroir ave
l'horizon. Ces mesures ont mis en évidence d'une manière abso
lument certaine la variation continue de l'angle θ', et démontré ains
de nouveau que l'équilibre capillaire n'est jamais complet ni stable
Voici par exemple la série des valeurs offertes par θ' dans un vid
imparfait :

Époque de l'observation.	Valeur de θ'.
0^h00^m	31 5'
1 00	32 43
3 45	34 40
9 00	35 7
....	....
46 15	42 46

après une secousse :

46 45	38 41
47 45	41 34
49 00	42 21
....	....
71 45	40 00

Ainsi, une goutte de mercure posée sur un plan de verre ne se trouve jamais en équilibre. Il en est très probablement de même d'une colonne de mercure dans des tubes communiquants, de diamètres inégaux, bien qu'ici le frottement puisse établir un équilibre apparent. Mais alors deux expériences consécutives donneront pour F et θ' des valeurs discordantes, comme cela ne s'est que trop présenté aux divers observateurs.

39. Aiguille flottant, insectes marchant sur l'eau. — on dépose sur l'eau une aiguille d'acier, que l'on a préalable-it passée entre les doigts de manière à la graisser très légère-ıt, cette aiguille, dont la densité est cependant sept fois celle l'eau, reste à la surface du liquide qui se creuse assez forte-nt autour d'elle [1]. En se reportant à ce que nous avons dit la tension superficielle (219), on ne sera pas surpris de voir guille, que l'eau ne mouille pas, reposer à la surface comme sur e membrane élastique, l'action du ménisque s'ajoutant à la ession hydrostatique pour faire équilibre au poids de l'aiguille.

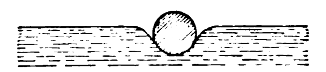


Fig. 375

ı ce dernier est trop considérable, la membrane se déchire, et aiguille tombe dans l'eau. De même si à la longue l'aiguille se

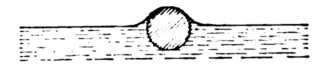


Fig. 376

mouille, l'action du ménisque qui se forme sur les bords l'entraîne rapidement à l'intérieur du liquide.

C'est par un mécanisme tout semblable que certains insectes peuvent marcher sur l'eau : leurs pattes sont naturellement enduites

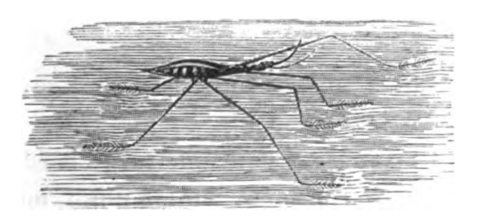


Fig. 377

d'une substance grasse qu'il suffit d'enlever (en les lavant avec de l'éther) pour les faire enfoncer dans l'eau.

[1] Ce fait paraît avoir été découvert par le constructeur anglais Norman, qui le montra à Gilbert, en 1575.

B. — LIQUIDE AU CONTACT D'UN AUTRE LIQUIDE.

240. Tension superficielle à la surface de séparatio de deux liquides. — Considérons maintenant le cas de deu liquides non miscibles en contact. De part et d'autre de la surfac de séparation des deux liquides 1 et 2 s'exercent les tensions $F_1 - F'$ et $F_2 - F'$, F' représentant l'action du liquide 1 sur le liquide 2 o l'action inverse du liquide 2 sur le liquide 1 ; la tension superfi cielle résultante est donc

$$f = F_1 + F_2 - 2F'.$$

Expériences de M. Quincke. — M. Quincke (¹) a cherché à mesure cette tension au moyen de gouttes formées soit par le liquide le plu

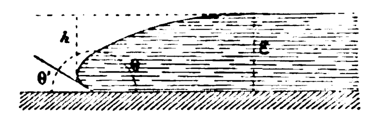


Fig. 378

dense au fond d'un vase rempli du liquide le moins dense (mercure et eau (fig. 378)), soit par le liquide le plus léger sous une lame de

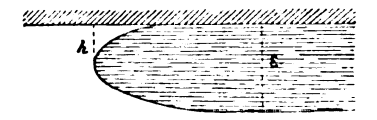


Fig. 379

verre appliquée sur la surface supérieure du liquide le plus lourd (huile et eau, air et eau (fig. 379)).

Si la goutte est assez large pour que sur le bord l'un des rayons de courbure puisse être considéré comme infini, on a, en désignant par R l'autre rayon, par y l'ordonnée d'un point quelconque du bord, par d_1 la densité du liquide le plus léger, et par d_2 la densité du liquide le plus lourd,

$$d_2 y = d_1 y + \frac{f}{R}.$$

(¹) Quincke, *Pogg. Ann.*, CXXXIX, 1 ; 1870.

u point le plus saillant du bord de la goutte (238, note 2),

$$y = h = \sqrt{\frac{2f}{d}}\,^{(1)}.$$

'autre part, l'équation générale de la surface capillaire donne

$$h = \frac{f}{d} \times \frac{1}{R}.$$

)n a donc

$$R = \frac{f}{d}\sqrt{\frac{d}{2f}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2f}{d}} = \frac{1}{2}h,$$

et l'équation d'équilibre devient

$$hd_2 - hd_1 = \frac{2f}{h},$$

d'où

$$f = h^2\,\frac{d_2 - d_1}{2}.$$

On voit comment la mesure de h permet d'avoir la tension superficielle f à la surface de séparation de deux liquides de densités d_1 et d_2 connues. M. Quincke a mesuré cette tension pour un certain nombre de couples de liquides; il l'a trouvée en général peu considérable [2]; il a constaté d'ailleurs qu'elle diminue avec le temps,

[1] Si $\theta' = 0$, $\varepsilon = 2h$.

[2] M. Quincke a vérifié que $f < F_2 - F_1$ toutes les fois qu'une goutte du liquide 1 projetée sur le liquide 2 s'y étale complètement. Pour qu'en effet une goutte du liquide 1 puisse persister à la surface du liquide 2, il faut que sur chaque élément du contour de la goutte les trois forces F_2, F_1, f se fassent équilibre, ou

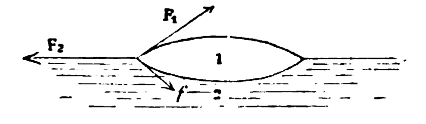


Fig. 380

bien que l'une d'elles, F_2, soit égale à la somme géométrique des deux autres, ce qui exige que $F_2 < F_1 + f$. Sinon, la goutte du liquide 1 sera tirée de tous côtés par la force F_2 que ne peuvent équilibrer les deux autres. C'est ainsi que l'eau s'étale sur le mercure parfaitement propre, que l'huile s'étend à la surface de l'eau bien pure, ce qui, soit dit en passant, explique comment la moindre trace

ce qui indique un commencement de mélange : $f=0$ serait en effet la définition de deux liquides parfaitement miscibles.

Les mesures de M. Quincke sur les gouttes d'un liquide dans un autre liquide lui ont donné des valeurs de θ' affectées des mêmes incertitudes que nous avons déjà signalées pour le mercure dans l'air ou dans l'eau. La détermination des hauteurs respectives des deux liquides superposés dans un même tube capillaire [1] n'a pas donné de meilleurs résultats.

241. Raccordement de la surface de séparation de deux liquides avec une paroi solide. — Lorsque la surface de séparation des deux liquides rencontre une paroi solide, le rac-

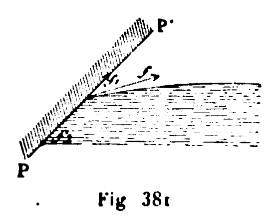


Fig 381

cordement s'effectue sous un angle θ facile à calculer. Soient en effet f_1 la constante d'adhésion du premier liquide pour le corps solide, f_2 la constante d'adhésion du deuxième liquide, f la tension superficielle à la surface de séparation des deux liquides, la somme

de graisse peut changer considérablement la tension superficielle de l'eau, à tel point par exemple qu'une nouvelle quantité d'huile projetée sur l'eau y restera sous forme de goutte. La tension f étant ordinairement petite, presque tout liquide déposé sur un deuxième liquide à tension superficielle un peu forte s'y étale jusqu'à ce que son épaisseur atteigne la grandeur du rayon d'activité sensible.

[1] Quand sur un premier liquide soulevé dans un tube capillaire on introduit une petite quantité d'un deuxième liquide mouillant le tube, la hauteur de la colonne soulevée est modifiée. Ainsi Young vit le niveau de l'eau dans un tube capillaire baisser notablement par la superposition d'un peu d'huile. M. Quincke constata une action analogue de l'alcool sur l'eau et de l'essence de térébenthine sur l'huile d'olive. Dans ces deux derniers cas, les liquides étant miscibles l'un à l'autre, il n'y a qu'un ménisque, au liquide supérieur, et le poids de la colonne soulevée est exactement celui que comporte la tension superficielle de ce liquide (226). Quand il y a deux ménisques superposés, le poids total des liquides soulevés est la somme des poids soutenus par les deux ménisques. (VAN DER MENSBRUGGHE, *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, XLI, 1875.)

es composantes parallèles à la paroi devant toujours être nulle, n a (en négligeant le poids de la molécule m)

$$f_1 - f\cos\theta = f_2,$$

'où

$$\cos\theta = \frac{f_1 - f_2}{f}.$$

'angle de raccordement est constant, aigu si f_1 est plus grand que f_2, obtus dans le cas contraire. $\frac{f_1 - f_2}{f}$ devant être plus petit que 1 en valeur absolue, si l'une des constantes d'adhésion est plus grande que l'autre constante d'adhésion augmentée de f, il n'y a pas d'équilibre possible au contact du solide : le liquide le plus adhérent déplace l'autre et le repousse de la paroi.

Notons enfin qu'il existe entre les phénomènes capillaires à la surface de deux liquides et la force électromotrice de polarisation sur cette surface une relation remarquable sur laquelle nous aurons plus tard à revenir. Nous en conclurons seulement dès maintenant que dans toute recherche relative à l'action capillaire au contact de deux liquides il est avant tout nécessaire de se préoccuper des conditions électriques de l'expérience; sinon, on n'aura jamais que des résultats discordants (1).

V. — MOUVEMENTS DUS AUX ACTIONS CAPILLAIRES.

242. Mouvement de deux plans parallèles plongeant dans un liquide. — Nous terminerons par l'explication de quelques mouvements dus aux actions capillaires.

Reprenons le cas déjà étudié de deux plans parallèles voisins, plongeant dans un liquide (2); mais, au lieu de les tenir à une dis-

(1) Voir à ce sujet l'analyse et la critique d'un travail de M. Quincke, *Pogg. Ann.*, CLIII, 161; 1874) par M. Lippmann, dans le *Journal de physique*, (IV, 248; 1875).

(2) La traction horizontale exercée sur une paroi par le liquide en contact étant dans tous les cas égale à F, quel que soit l'angle capillaire, un plan unique, présentant au liquide deux faces aussi dissemblables que l'on voudra, n'éprouvera pas de déplacement horizontal (fait évident *a priori*). La différence de hauteur des points d'application des deux tractions pourra seulement faire basculer le plan du côté du plus haut affleurement.

tance invariable, supportons-les par de longs fils, de manière à ce qu'ils puissent librement se rapprocher ou s'éloigner. Nous verrons alors les deux plans se rapprocher s'ils sont tous les deux mouillés ou tous les deux non mouillés par le liquide, tandis qu'ils s'éloigneront si l'un est mouillé et l'autre non.

Supposons d'abord les deux plans parfaitement mouillés tous les deux : soient par exemple deux plans de verre Aa, Bb, plongeant dans l'eau qui s'élève entre eux jusqu'en AB. Sur un élément quelconque S de la surface du ménisque existe une pression dirigée vers l'extérieur et égale au poids d'une colonne liquide de base $S = \omega$, et de hauteur Ss, égale elle-même à la distance de l'élément S au niveau du liquide dans le vase. Sur un élément S_1, égal à S et situé au-dessous à la distance SS_1, la pression est la même qu'en S, c'est-à-dire $-\omega.Ss$, plus $\omega.SS_1$; elle est donc égale à $-\omega.S_1s$, le signe $-$

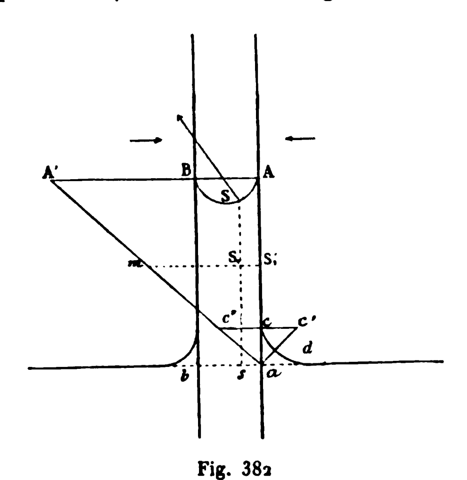


Fig. 382

indiquant que la pression est dirigée de bas en haut. Sur un élément S'_1, pris au même niveau que S_1 sur la paroi, la pression a la même valeur, c'est-à-dire qu'elle est encore égale au poids d'une colonne liquide S'_1m, de base ω, et de hauteur S'_1m égale à la distance S'_1a de l'élément S' au niveau général dans le vase ; et elle est dirigée de la paroi vers le liquide. Ainsi, sur toute la paroi Aa existe un ensemble de pressions que l'on peut figurer par le poids d'un prisme ayant pour section droite le triangle isocèle AaA'. A la base du plan existe, il est vrai, une action contraire, due au ménisque cd.

égale au poids du prisme cac' (cc' étant pris égal à ca). La résul-
nte des pressions exercées sur la paroi Aa est donc représentée
r le poids d'un prisme d'eau ayant pour section droite le trapèze
A'cc'', et cette pression résultante est dirigée du côté du liquide
ulevé. Une force semblable agit sur la lame Bb. Les deux lames
oivent donc marcher l'une vers l'autre, et les actions auxquelles
lles obéissent croissant à peu près en raison inverse du carré de
eur distance, le mouvement continuera jusqu'au contact.

On verrait de même que deux lames de verre, plongées dans le mercure, seront également poussées l'une vers l'autre par une pression d'autant plus énergique qu'elles seront plus rapprochées.

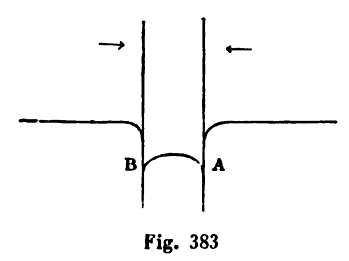


Fig. 383

Considérons enfin deux lames dont l'une soit mouillée et l'autre non. Supposons d'abord les deux lames assez éloignées pour que les ménisques aient partout leur entier développement : chaque lame, se trouvant alors sollicitée sur ses deux faces par des forces égales, reste au repos. Rapprochons les lames, le liquide intérieur est obligé de s'accommoder à une forme intermédiaire : il s'abaisse du côté

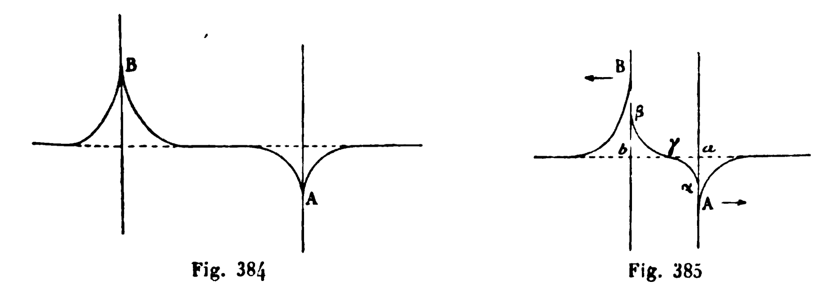


Fig. 384 Fig. 385

de la lame mouillée et s'élève de l'autre, le point de raccordement γ, où le rayon de courbure est infini, restant nécessairement dans le plan de la surface libre. Il est visible que sur l'une et l'autre lame

les actions extérieures l'emportent et tendent à éloigner les deux plans (¹). Si cependant on rapprochait assez les deux plans pour faire disparaître le ménisque $\gamma\alpha$ (lequel disparaît le premier, la branche $\gamma\alpha$ qui se raccorde à la lame A sous l'angle θ étant toujours plus petite que la branche βB qui se raccorde à la lame B sous l'angle ω) et pour forcer le liquide à s'élever entre les deux lames, la répulsion pourrait se changer en attraction, comme l'a montré Laplace.

Attraction et répulsion des corps légers flottant à la surface d'un liquide. — Les attractions entre des flotteurs tous les deux mouillés ou tous les deux non mouillés et les répulsions entre flotteurs, l'un mouillé, l'autre sec, se rattachent aux mêmes principes, ainsi que l'expérience suivante, indiquée par Mariotte (²). Un verre à boire est à moitié plein d'eau; à côté on place un deuxième verre que l'on remplit entièrement, de manière à ce que l'eau dépasse le *niveau* du verre. On voit alors les bulles d'air qui existent à la surface du liquide se porter au bord dans le premier verre et au centre dans le deuxième (³). De petits corps légers mouillés se comporteront comme les bulles d'air, tandis que de petits flotteurs non mouillés seront entraînés vers le centre du verre demi-plein et à la périphérie du verre qui déborde. Tous ces faits s'expliquent immédiatement si l'on remarque que dans le premier cas la surface de l'eau est concave, dans le deuxième convexe, et si l'on se rappelle qu'il y a attraction entre deux corps toutes les fois que les ménisques formés au voisinage des corps sont tous les deux de même sens, répulsion dans le cas contraire.

243. Mouvement d'un liquide dans un tube conique. — Un autre cas intéressant de mouvement dû aux actions capillaires est celui qu'offrent les liquides dans les tubes coniques. Soient un

(¹) De la remarque faite plus haut il résulte que la nature de la face postérieure des lames est indifférente. Toute paroi est en effet sollicitée par la force horizontale F, quel que soit le ménisque produit, pourvu qu'il atteigne une horizontale. Si le ménisque se termine en un point γ où la tangente fait un certain angle ω avec l'horizon, la force se réduit à $F(1 - \cos\omega)$. A cette diminution de la traction correspond une variation exactement équivalente de la pression hydrostatique, de sorte que l'on peut se borner à considérer cette dernière.

(²) MARIOTTE, *Traité du mouvement des eaux*. Paris; 1700.

(³) C'est le fait vulgaire des bulles d'air qui, à la surface du café, se portent au centre ou vers le bord, suivant que la tasse est sèche ou humide.

›e conique dont l'axe est horizontal, et dans ce tube une colonne uide terminée d'une part à un cercle de rayon r, d'autre part à cercle de rayon R. Sur le périmètre du cercle de rayon r agit ıe force $F\cos\theta'.2\pi r$, dont la composante parallèle à l'axe du tube $\cos\theta' 2\pi r \cos\beta$ (2β désignant l'angle au sommet du cône) produit, ır unité de surface, une pression $\dfrac{F\cos\theta' 2\pi r\cos\beta}{\pi r^2} = \dfrac{2F\cos\theta'\cos\beta}{r}$. ur l'autre extrémité de la colonne s'exerce une pression, par unité e surface, égale à $\dfrac{2F\cos\theta'\cos\beta}{R}$. Il y aura donc mouvement. Si le quide mouille parfaitement, les deux pressions sont l'une et autre dirigées vers l'extérieur, et le liquide, obéissant à la plus rande $\dfrac{2F\cos\beta}{r}$, marchera vers la pointe du tube. Si le liquide ne nouille pas le tube, les pressions sont toutes les deux dirigées vers 'intérieur, c'est encore leur différence qui agit, et comme cette

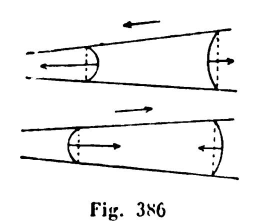


Fig. 386

différence est toujours de même signe que la pression sur la plus petite base, le liquide s'éloignera du sommet. On vérifiera aisément le fait en introduisant une petite colonne de mercure dans un tube conique en verre. Quant au premier cas, il se présente constamment avec l'eau dans les pipettes, ainsi qu'avec l'encre dans les tire-lignes, où le phénomène est évidemment du même ordre.

244. Mouvement d'une goutte de mercure dans l'eau acidulée. — Nous citerons encore l'expérience suivante, due à M. Lippmann ([1]), et dans laquelle on observe des mouvements énergiques et réguliers. On met une large goutte de mercure dans une soucoupe. Par-dessus, on verse de l'eau additionnée d'acide sulfu-

([1]) LIPPMANN, *Journal de physique*, I, 396; 1872.

rique et d'un peu de bichromate de potasse. Enfin sur le bord de l soucoupe on fixe un fil de fer plongeant dans l'eau acidulée et arri vant au contact du mercure. La goutte se contracte aussitôt, pui revient toucher le fil de fer, se contracte de nouveau, et le mêm jeu se continue pendant plusieurs heures. Au contact, en effet, d liquide oxydant, la tension superficielle diminue, la goutte s'aplatit elle touche alors le fil de fer avec lequel elle forme un couple voltaï que, dans lequel l'hydrogène se porte sur le mercure et réduit l surface : de là contraction. Le contact cesse, la goutte s'oxyde d nouveau, et les mêmes phénomènes recommencent.

CHAPITRE IV

DIFFUSION

245. Diffusion. — Lorsque deux liquides miscibles sont mis présence, on constate au bout d'un certain temps que chacun s liquides a pénétré plus ou moins profondément l'autre : c'est tte pénétration réciproque que l'on appelle *diffusion*.

Deux cas sont à considérer, suivant que les liquides sont en ntact immédiat ou séparés par un diaphragme ou *septum* per- éable. Nous étudierons successivement ces deux cas : 1° la *diffu- on simple;* 2° la *diffusion à travers un septum*, ou *osmose*, en ommençant par la diffusion simple, bien qu'historiquement étude des phénomènes d'osmose par Dutrochet (1) ait précédé es recherches de Graham (2) sur la diffusion simple.

I. — DIFFUSION SIMPLE.

246. Expériences de Graham. — Dans un grand bocal plein d'eau pure descendons une petite fiole entièrement remplie d'eau salée, et momentanément fermée par un obturateur que nous enlèverons avec précaution quand la fiole sera en place au fond du bocal; abandonnons l'appareil à lui-même. Quelques heures plus tard, le nitrate d'argent nous permettra de vérifier que, contrairement aux lois de la pesanteur, une certaine quantité d'eau salée a passé dans l'eau pure. Inversement, cette eau salée a été remplacée dans la fiole par un égal volume d'eau pure. En analysant de temps en temps le liquide du bocal, on peut suivre les progrès de la diffu-

(1) DUTROCHET, *Mémoires pour servir à l'histoire des végétaux*, I; 1827.
(2) GRAHAM, *Phil. Trans.*, 1850.

sion; et en remplaçant l'eau salée par d'autres solutions on peut opérer sur diverses substances. C'est la méthode de la fiole (*phial*

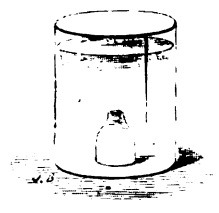


Fig. 387

diffusion), la première employée par Graham. Des expériences poursuivies d'après cette méthode et exposées dans deux mémoires lus à la Société royale de Londres en 1850, Graham conclut les lois suivantes :

1° La vitesse de diffusion varie avec la nature de la substance en dissolution dans la fiole.

2° Les quantités de sel diffusées dans un même temps par des solutions diversement concentrées d'une même substance sont proportionnelles aux degrés de concentration (voir plus loin).

3° La quantité de sel diffusée par une solution donnée augmente rapidement avec la température.

Plus tard Graham (¹) revint sur ce sujet par une méthode plus précise, la méthode de la jarre (*jar-diffusion*). Au fond d'une jarre cylindrique, pleine d'eau pure, on amène sous l'eau, à l'aide d'une

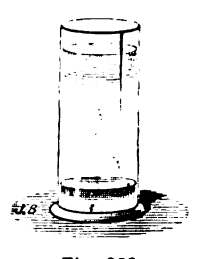


Fig. 388

pipette, la dissolution à étudier; on abandonne l'expérience à elle-même dans un local à température bien constante; puis, après un certain nombre de jours, on prélève dans la jarre à diverses hau-

(¹) GRAHAM, *Phil. Trans.*; 1861.

s, au moyen d'un siphon capillaire, des échantillons que l'on yse ; ou bien, si l'on veut mettre fin à l'expérience, on enlève quide au moyen du siphon, couche par couche, et l'on procède analyses.

oici quelques nombres ainsi obtenus avec des solutions à 10 r 100, insinuées sous une colonne d'eau pure 7 fois plus haute, bandonnées pendant 14 jours à une température sensiblement stante et voisine de 10°; après quoi le liquide a été enlevé par ches de 50 centimètres cubes chacune.

***Poids**, pour* 100, *de substance diffusée, dans chaque couche.*

des couches commençant r le haut.	Chlorure de sodium.	Sulfate de magnésie.	Sucre.	Gomme.	Tannin.	Albumine.	Caramel.
1	0,104	0,007	0,005	0,003	0,003	»	»
2	0,129	0,011	0,008	0,003	0,003	»	»
3	0,162	0,018	0,012	0,003	0,004	»	»
4	0,198	0,027	0,016	0,004	0,003	»	»
5	0,267	0,049	0,030	0,003	0,005	»	»
6	0,340	0,085	0,059	0,004	0,007	»	0,003
7	0,429	0,133	0,102	0,006	0,017	»	0,005
8	0,535	0,218	0,180	0,031	0,031	0,010	0,010
9	0,654	0,331	0,305	0,097	0,069	0,015	0,023
10	0,766	0,499	0,495	0,215	0,145	0,047	0,033
11	0,881	0,730	0,740	0,407	0,288	0,113	0,075
12	0,991	1,022	1,075	0,734	0,556	0,343	0,215
13	1,096	1,383	1,435	1,157	1,050	0,855	0,705
14	1,187	1,803	1,758	1,731	1,719	1,892	1,725
15 et 16	1,266	3,684	3,783	5,601	6,097	6,725	7,206

On peut aussi déterminer les temps que ces corps mettent pour se diffuser également; Graham a trouvé que ces temps étaient entre eux comme les nombres suivants :

Acide chlorhydrique.	1
Sel marin	2,33
Sulfate de magnésie.	7
Sucre	7
Albumine	49
Caramel.	98

Ainsi, les divers corps présentent, au point de vue de la diffusibilité, des différences de même ordre qu'au point de vue de la volati-

lité. De même qu'à côté de substances très volatiles, se réduisant rapidement en vapeur, comme l'éther, on a des corps, la glycérine par exemple, qui n'émettent pas de vapeurs sensibles à la température ordinaire; de même certains corps, tels que l'acide chlorhydrique, sont très diffusibles, tandis que d'autres, comme le caramel, ne le sont presque pas.

Les corps qui se diffusent le mieux sont les substances cristallisées, sel marin, sulfate de magnésie, sucre, etc., ou les liquides, acide chlorhydrique, acide sulfurique, etc. : ce sont les *cristalloïdes*. Graham appelle au contraire *colloïdes* les substances analogues à la colle : gomme, albumine, gélatine, caramel, tannin, etc., dont la diffusibilité est très faible ou nulle. En réalité, ainsi que l'a remarqué H. Sainte-Claire Deville, les cristalloïdes sont les corps vraiment solubles; les colloïdes sont incapables de se dissoudre et donnent non point de véritables solutions, mais des gelées. La manière essentiellement différente dont se comportent ces deux classes de corps au point de vue de la diffusion fournit un moyen de séparer un cristalloïde d'un colloïde : telle est en effet l'origine de la *dialyse*.

Le tableau suivant montre comment il est possible de séparer partiellement deux sels mélangés (la quantité de chaque sel dissoute était de 5 grammes, et le temps de la diffusion encore 14 jours) :

Poids, en grammes, de substance diffusée, dans chaque couche.

Nos des couches (en commençant par le haut).	Mélange, à parties égales, de chlorure et de sulfate de sodium.		Mélange, à parties égales, de chlorures de sodium et de potassium.	
	Chlorure de sodium.	Sulfate de sodium.	Chlorure de sodium.	Chlorure de potassium.
1	0,077	0,005	0,018	0,014
2	0,089	0,009	0,025	0,015
3	0,105	0,014	0,044	0,014
4	0,130	0,026	0,075	0,017
5	0,161	0,044	0,101	0,034
6	0,199	0,072	0,141	0,063
7	0,240	0,111	0,185	0,104
8	0,289	0,173	0,252	0,151
9	0,337	0,241	0,330	0,212
10	0,392	0,334	0,359	0,351
11	0,433	0,433	0,418	0,458
12	0,487	0,539	0,511	0,559
13	0,525	0,646	0,552	0,684
14	0,555	0,745	0,615	0,772
15 et 16	0,979	1,609	1,385	1,551

L'inégale diffusibilité des deux éléments d'une combinaison peut ıême amener leur séparation presque complète, comme Graham montra par le dédoublement partiel du bisulfate de potasse en ılfate neutre et acide sulfurique hydraté, plus diffusible (1).

Mais c'est principalement par diffusion au travers d'un septum ue Graham a produit ses remarquables dialyses.

247. Analogie entre la diffusion et la conduction. —)ans son *Essai de statique chimique*, Berthollet (2) signale l'analogie ui existe entre la diffusion et la conduction. Dans l'un et l'autre as, en effet, la marche graduelle du phénomène indique que l'état l'un point de la masse n'a d'influence que sur l'état des points immédiatement voisins. Ce fait d'expérience étant l'unique base sur

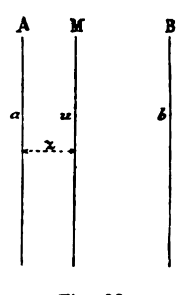


Fig. 389

laquelle Fourier (3) a élevé sa *théorie de la chaleur*, tous les résultats auxquels il arrive pour la conduction calorifique sont, par conséquent, immédiatement applicables à la diffusion du liquide. Ainsi, Fourier établit d'abord que dans un mur homogène, dont les deux faces A et B sont maintenues à des températures constantes a et b, le flux calorifique, c'est-à-dire la quantité de chaleur transmise dans l'unité de temps à travers l'unité de surface d'un plan M parallèle aux faces, est à chaque instant proportionnel à $-\frac{du}{dz}$, u étant la tem-

(1) De même l'alun potassique se dissocie par diffusion, le sulfate de potasse se séparant en partie du sulfate d'alumine.

(2) BERTHOLLET, *Essai de statique chimique*, 412 et suiv. Paris ; 1803.

(3) FOURIER, *Théorie de la chaleur*. Paris ; 1822. Cf. *Mémoires de l'Académie des sciences* ; 1807 et 1811.

..e du plan considéré, z la distance du plan à

..sidérant particulièrement l'état stationnaire, il mon..
..t une fois établi, la température u du plan M est rep..
..r la formule

$$u = a - \frac{a-b}{e} z, \qquad (1)$$

.. l'épaisseur du mur.

.. lux calorifique est alors le même pour tous les plans M, ..

$$k \frac{a-b}{e}, \qquad (2)$$

..signant un coefficient particulier, que l'on appelle le coefficie..
.. conductibilité calorifique de la substance.

Tous ces résultats s'appliquent à la diffusion à travers une colonn.. ..uide, dont les deux bases A et B sont maintenues à des concen.. ..tions différentes : on appelle *concentration* d'une substance dan.. ..u milieu le poids de cette substance dans l'unité de volume d..

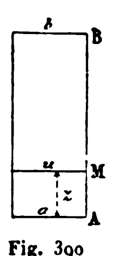


Fig. 390

milieu. Si l'on suppose qu'il n'y ait pas de contraction, le courant de diffusion est en chaque point proportionnel à $-\frac{du}{dz}$, u étant la concentration actuelle au point considéré, et z la distance de ce point à la base A. Lorsque l'état stationnaire est atteint, la concentration d'une couche M est

$$u = a - \frac{a-b}{e} z; \qquad (1)$$

en d'autres termes, *les densités varient linéairement sur toute la longueur de la colonne; et la quantité de sel traversant, pendant*

nité de temps, l'unité de surface d'une couche quelconque, parallèle ux bases, est alors constante et égale à

$$k\frac{a-b}{e}; \qquad (2)$$

est ce que l'on appelle le *coefficient de diffusibilité*. Ce coefficient e définira donc, comme celui de conductibilité, la quantité d'une ubstance donnée qui, pendant l'unité de temps, traverse l'unité le surface de la section droite d'un cylindre de hauteur égale à l'unité, et dont les bases sont maintenues à des concentrations différant d'une unité.

Fick [1] mit en lumière ces conséquences de l'idée de Berthollet, et il entreprit de les vérifier par l'expérience. Son appareil consistait en un tube vertical A, ouvert à ses deux extrémités. Ce tube, plein d'eau pure, reposait par son extrémité inférieure sur un

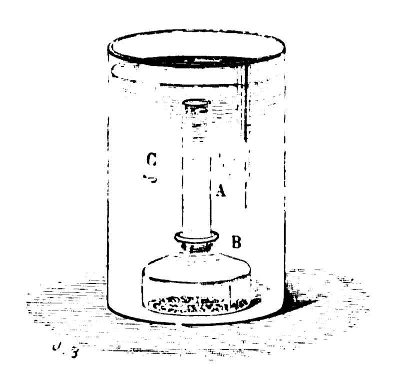


Fig. 391

flacon B, rempli d'une dissolution saturée et maintenue telle par un excès de sel; il s'ouvrait à sa partie supérieure dans un vase C contenant de l'eau pure, sans cesse renouvelée, de sorte que la concentration à l'extrémité supérieure du tube était toujours zéro. Après un temps plus ou moins long, une petite boule de verre, suspendue à un fil attaché lui-même à une balance, accusait dans chaque couche une perte de poids ne variant plus : l'état stationnaire était atteint. Soit alors q la perte de poids dans une couche

(1) Fick, *Pogg. Ann.*, XCIV, 59; 1855.

donnée, la perte de poids dans l'eau pure étant prise pour unité la concentration au point considéré est $q-1$, si le sel se dissout dans l'eau sans en modifier le volume. L'expérience montre que, conformément à l'équation (1), la concentration varie proportionnellement à la hauteur. Toutefois, la précision des mesures n'est pas grande; la seule série indiquée par Fick est la suivante :

Profondeur de la couche à partir de la surface supérieure.

10mm	32,2	54,4	76,6	98,8	121,0	143,2	165,4	187,6	209,8	2[illegible].

Densité (dont l'excès sur 1 représente la concentration).

1,009	1,032	1,053	1,073	1,093	1,115	1,135	1,152	1,170	1,187	1,196.

Bien que probablement l'état statique ne fût pas encore atteint ici, la méthode par elle-même ne comportait pas de rigueur.

En laissant toutes choses égales d'ailleurs, et en faisant varier seulement la longueur du tube A, Fick observa encore que les quantités de sel diffusées dans un même temps par les divers tubes étaient en raison inverse des longueurs des tubes, ainsi que le veut l'équation (2). La mesure de ces quantités lui permit en outre de déterminer k.

Il trouva ainsi pour le sel marin $k=0,0370$, l'unité de temps étant l'heure, l'unité de longueur le centimètre, et l'unité de poids le gramme.

248. Recherches diverses. — Sir W. Thomson (1), imitant un procédé de Faraday pour mesurer la densité des gaz liquéfiés, introduit dans le liquide une série de perles de densités différentes. Ces perles, choisies de façon à se tenir d'abord toutes à la surface de séparation des deux liquides, s'échelonneront ensuite à différents niveaux, et indiquant ainsi les densités des couches successives, elles permettront de déterminer rapidement la diffusibilité de la substance en expérience.

Beilstein (2) a effectué sur la diffusion des recherches assez étendues, se rapprochant davantage de celles de Graham : son appareil,

(1) W. Thomson, *Encyclop. Brit.*, XI, 586; 1856.
(2) Beilstein, *Annalen der Chemie und Pharmacie*, XCIX, 165; 1856.

guré ci-contre, fournit facilement les diffusibilités relatives des



Fig. 392

différentes substances enfermées en solution dans la fiole supérieure, mais ne permet pas d'obtenir des mesures exactes de k.

En 1857, MM. Simmler et Wild (¹) indiquèrent plusieurs méthodes nouvelles pour étudier la diffusion, et en particulier la *méthode optique*, que M. Johannisjanz (²) appliqua vingt ans plus tard. Dans l'intervalle, M. Voit (³) et M. Hoppe-Seyler (⁴) utilisèrent le pouvoir rotatoire du sucre pour suivre sa diffusion dans l'eau. C'est par des mesures d'indices que procéda M. Johannisjanz : dans un prisme à liquide il mit d'abord une couche de la solution à étudier, puis de l'eau par-dessus, et, quand le sel se fut suffisamment diffusé, il mesura l'indice du liquide à diverses hauteurs. Ces expériences, en apparence très précises, ne donnèrent cependant que des résultats contradictoires. La raison en est, comme l'a montré M. Stefan (⁵), qu'un liquide dont la densité varie depuis le bas jusqu'en haut agit sur la lumière à la façon d'un prisme dont l'arête réfringente serait tournée vers le haut, de sorte qu'un rayon lumineux tombant horizontalement sur ce liquide est dévié vers le bas : les résultats se trouvent ainsi complètement altérés.

(1) Simmler et Wild, *Pogg. Ann.*, C, 217; 1857.

(2) Johannisjanz, *Wied. Ann.*, II, 24; 1877.

(3) Voit, *Pogg. Ann.* CXXX, 227; 1867.

(4) Hoppe-Seyler, *Medicinisch-chemische Untersuchungen*, Berlin; 1876.

(5) Stefan, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien*, LXXVI; 1878.

[illegible] début [illegible] déceler [illegible] collimateur et [illegible] à faces [illegible] au moyen d'un [illegible] un [illegible] même [illegible] indé- [illegible] divergentes. [illegible] ses formules aux [illegible] n'a pas [illegible] cependant montré com- [illegible] pour cette solution de [illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
2	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]
6	[illegible]	[illegible]
7	[illegible]	0,215
8	[illegible]	0,325
9	[illegible]	0,469
10	[illegible]	0,648
11	[illegible]	0,853
12	1,057	1,073
13	1,317	1,290
14	1,527	1,482
15 et 16	3,281	3,528

(1) [illegible], *C. R.*, XC, 307; 1880.
(2) [illegible], *loc. cit.*, LXXVII; 1879.

M. Stefan trouva ainsi pour k, c'est-à-dire pour le poids de substance qui passerait en 1 jour à travers chaque 1^{cq} d'une couche de 1^{cm} d'épaisseur, dont les deux bases seraient maintenues à des concentrations différant de 1^{g} par 1^{cc} :

Substances.	t	k
Acide chlorhydrique............	5°	1,742
Chlorure de sodium........	5	0,765
»	10	0,910
Sulfate de magnésie............	10	0,354
Sucre........................	9	0,312
Gomme arabique...............	10	0,130
Tannin.......................	10	0,101
Albumine.....................	13	0,063
Caramel......................	10	0,047

D'après les mêmes expériences, on aurait pour le sel marin à diverses températures

$$k = 0,630(1 + 0,0429t).$$

M. H.-F. Weber (1) a repris la question d'après une méthode ingénieuse et très précise : deux électrodes de zinc, plongeant dans des dissolutions inégalement concentrées de sulfate de zinc, manifestent une force électromotrice dirigée de la solution la plus faible vers la plus forte ; si l'on détermine cette force électromotrice pour des concentrations différentes des solutions, la mesure de la différence de concentration de deux dissolutions de sulfate de zinc en contact avec des électrodes de zinc se trouvera dès lors ramenée à une mesure de force électromotrice. Tel est le principe des expériences de M. Weber : les forces électromotrices étaient mesurées par la méthode de compensation de du Bois-Reymond au moyen d'un Daniell ne variant pas de $\frac{1}{1300}$; on pouvait apprécier des différences de concentration de $\frac{1}{120}$ de milligramme par 1 centimètre cube. L'influence des moindres variations de température se montra dès le début considérable, et l'appareil dut être installé, soigneusement protégé, dans

(1) H.-F. Weber, *Vierteljahrsschrift der Züricher naturforschenden gesellschaft*, nov. 1878 ; et *Wied. Ann.*, VII, 469 et 536. Voir aussi *Journal de physique*, IX, 325.

les caves de l'Observatoire fédéral à Zurich. Les expériences furent alors parfaitement concordantes, et la loi de la conduction se vérifia d'une manière très satisfaisante. On chercha alors à préciser l'influence de la température, et l'on trouva pour le coefficient de diffusibilité du sulfate de zinc

$$k = 0,1187(1 + 0,0557t),$$

les unités étant toujours le centimètre, le gramme (poids) et le *jour*. A 18°,5, k est devenu 0,2421; et à 44°,7, limite supérieure des expériences, $k = 0,4146$.

Aux travaux que nous venons de rappeler il faudrait encore ajouter des recherches de M. Marignac (1) sur la diffusion simultanée de deux sels d'après la méthode de Graham, et un récent travail de M. Long (2), effectué au laboratoire de M. Lothar Meyer à Tubingue. Mais les auteurs se sont surtout occupés du point de vue chimique, que nous n'avons pas à examiner ici.

Toutes ces expériences ont principalement porté sur des dissolutions aqueuses, mises en contact avec de l'eau pure. Les effets restent essentiellement les mêmes avec deux liquides miscibles quelconques, et en particulier la loi de la conduction s'applique encore exactement : en chaque point de la masse, le courant de diffusion propre à chaque liquide est proportionnel au $\frac{du}{dz}$ du liquide au point considéré.

Il resterait maintenant à rendre compte du fait même de la diffusion, que Gay-Lussac a rapproché avec tant de justesse de l'expansion d'un gaz. H. Sainte-Claire Deville a marqué la nature exacte du phénomène en insistant sur l'absorption de chaleur qui accompagne la diffusion : la diffusion est due au mouvement que nous appelons chaleur. Quand nous étudierons la chaleur, nous dirons comment on a essayé de se représenter le phénomène d'après la nature probable du mouvement des molécules dans un liquide.

(1) MARIGNAC, *Archives des sciences physiques et naturelles*, L, 89; et *C. R.*, LXXVIII; 1874.

(2) LONG, *Wied. Ann.*, IX, 613; 1880.

II. — DIFFUSION A TRAVERS UN SEPTUM, OU OSMOSE.

249. Expérience de Nollet [1]. — La découverte de la diffusion à travers un septum est due à l'abbé Nollet, qui l'observa au ours de « recherches sur les causes du bouillonnement des iquides ». Voulant conserver de l'esprit de vin à l'abri de l'air, il « en avait rempli une fiole cylindrique, longue de cinq pouces et large d'un pouce environ, et l'ayant couverte d'un morceau de vessie mouillée et ficelée au col du vaisseau, il l'avait plongée dans un grand vase plein d'eau (fig. 393). Au bout de cinq ou six

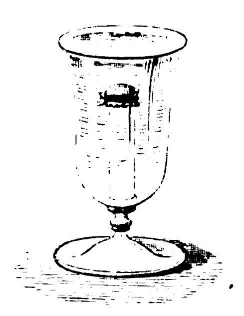


Fig. 393

heures, il fut tout surpris de voir que la fiole était plus pleine qu'au moment de son immersion, quoiqu'elle le fût alors autant que ses bords pouvaient le permettre; la vessie qui lui servait de bouchon était devenue convexe, et si tendue qu'en la piquant avec une épingle, il en fit sortir un jet de liqueur qui s'éleva à plus d'un pied de hauteur ».

Pensant que le soulèvement de la vessie ne pouvait être attribué qu'à l'introduction de l'eau dans la fiole, Nollet « s'en assura par une autre expérience, qu'on peut regarder comme l'inverse de la première : il remplit d'eau une pareille fiole qu'il boucha aussi avec un morceau de vessie mouillée, et l'ayant plongée dans l'esprit de vin il vit cette espèce de bouchon s'enfoncer peu à peu et l'eau qui était dessous diminuer de même ».

L'attention du physicien ne fut point frappée, comme elle aurait

(1) Nollet, *Histoire de l'Académie des sciences*; année 1748.

dû l'être, par la découverte de ce phénomène curieux, dont l'étude ne fut entreprise que quatre-vingts ans plus tard par Dutrochet.

250. Expériences de Dutrochet [1]. — L'*endosmomètre* de Dutrochet consistait essentiellement en une fiole, dont le fond était formé par le septum, et dont le col portait un tube gradué. Prenons pour septum un morceau de vessie de porc, mettons dans la fiole de l'alcool, et plongeons l'appareil dans l'eau : nous voyons bientôt le liquide monter dans le tube gradué et s'y élever progressivement à une grande hauteur. Si alors on introduit un



Fig. 394

aréomètre dans la fiole, on reconnaît que l'alcool est étendu d'eau; le même aréomètre plongé dans l'eau extérieure nous montre que cette eau contient maintenant de l'alcool. Il y a donc eu double courant à travers la membrane : courant d'eau dirigé vers l'intérieur et courant d'alcool marchant de l'intérieur à l'extérieur; et la dénivellation observée est la résultante des deux phénomènes inverses et concomitants que Dutrochet distingue sous les noms

(¹) Dutrochet, *loc. cit.*, passim; et *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXXV, 393; XXXVII, 191; XLIX, 411; LI, 159; LX, 337; 1827-35.

d'*endosmose* et d'*exosmose*. C'est par ce procédé que s'effectuent tous les échanges de liquides dans les êtres vivants.

Si, en place d'alcool, on mettait dans la fiole une dissolution saline quelconque, une dissolution de sulfate de cuivre par exemple, on observerait un phénomène tout semblable : double courant, et avec tous les sels métalliques proprement dits ascension du liquide dans l'endosmomètre. Cette ascension, contraire aux lois de l'hydrostatique, suffirait à elle seule pour attester une action spéciale de la membrane, venant compliquer le phénomène. L'influence considérable de la membrane dans l'osmose ressortira plus nettement encore de ce fait que si, à la vessie, nous substituons une lame de caoutchouc pour fermer l'endosmomètre, en mettant, comme dans la première expérience, de l'alcool dans la fiole et en plongeant l'appareil dans l'eau, au lieu d'une élévation nous constaterons un abaissement du liquide dans le tube gradué : la différence des vitesses des deux courants a changé de signe.

Il est clair d'ailleurs que l'appareil de Dutrochet, ne mesurant que cette différence, est très imparfait : deux liquides qui traverseraient la membrane avec des vitesses égales pourraient se diffuser énergiquement sans que l'endosmomètre accusât rien. Aussi n'insisterons-nous pas sur les expériences de Dutrochet, ni sur celles de Jerichau (1), Brucke (2), Vierordt (3) et autres, qui ont opéré soit avec l'appareil même de Dutrochet, soit avec des appareils très semblables. Il est cependant à noter que déjà Dutrochet et Vierordt avaient annoncé que, toutes choses égales d'ailleurs, l'énergie de l'endosmose était proportionnelle à la densité de la dissolution saline enfermée dans l'appareil, conclusion qui parut ensuite justifiée par les mesures de Jolly et de Schmidt, mais qui n'est pourtant pas exacte.

251. Expériences de Jolly, Eckhard, Graham, Ludwig. — Jolly (4), laissant de côté les mesures de volume stériles, procéda

(1) Jerichau, *Pogg. Ann.*, XXXIV, 613 ; 1835.
(2) Brucke, *De diffusione humorum per septa mortua et viva* (Dissert. inaug.). Berlin ; 1841. Voir aussi *Pogg. Ann.* LVIII, 77 ; 1843.
(3) Vierordt, *Archiv von Roser und Wunderlich*, VI ; 1847.
(4) Jolly, *Zeitschrift für die rationnelle Medicin*, VII, 83 ; 1846 ; et *Pogg. Ann.*, LXVIII, 261 ; 1846.

par des mesures de poids. Son appareil était un simple tube de verre, de 20cm de long et 1cm, 5 de large, fermé en bas par une vessie, et plongé dans un grand vase plein d'eau que l'on renouvelait de temps en temps. Le liquide à étudier était placé dans le tube que l'on enfonçait plus ou moins dans l'eau pour rétablir l'égalité de niveau que l'osmose tendait sans cesse à détruire ([1]). Le tube était pesé à intervalles rapprochés (tous les jours

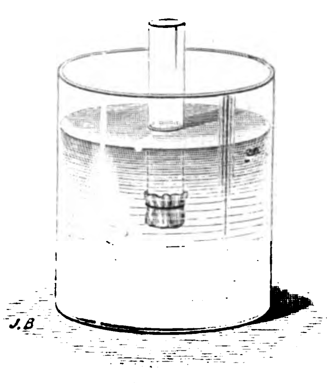


Fig. 395

par exemple) jusqu'à ce que son poids cessât de croître : il ne contenait plus alors que de l'eau pure, et l'accroissement de poids total du tube faisait connaître la quantité d'eau qui avait remplacé la substance soumise à l'expérience. Ainsi, dans une expérience sur le sel marin, on eut :

Au début,

poids du tube vide, avec la vessie mouillée. . .	37gr,81	46gr,01
» du sel marin, sec.	2 ,00	
» de l'eau servant à dissoudre le sel. . . .	6 ,20	

Six jours après, tout le sel ayant disparu du tube,

poids du tube et du liquide contenu.	53 ,17
Différence.	7gr,16

([1]) M. Carlet a adopté une disposition beaucoup plus commode pour avoir toujours même pression sur les deux faces de la membrane (Carlet, C. R., LXVI, 377 ; 1873).

e poids d'eau qui a remplacé les 2gr de sel est donc 9gr,16; et par uite on a

pour 1 gramme de sel marin 4gr,58 d'eau.

Dans une autre expérience, faite avec 2gr,4 de sel, on eut

pour 1 gramme de sel marin 4gr,32 d'eau;

et dans une troisième, avec 0gr,74 de sel,

pour 1 gramme de sel marin 4gr,34 d'eau.

Jolly crut pouvoir conclure de ses expériences que, pour chaque substance, le poids d'eau qui se substitue à 1 gramme de la substance à travers une membrane est constant, et il nomma ce poids l'*équivalent endosmotique* de la substance. Cet équivalent dépend essentiellement de la membrane employée, à tel point qu'il n'est pas le même avec différents morceaux d'une même vessie de porc. Voici les valeurs moyennes pour une vessie de porc et les diverses substances indiquées à une température voisine de zéro (d'après Schmidt [1] ces valeurs ne sont pas très différentes à 10 ou à 15 degrés).

Acide sulfurique	0,39
Bisulfate de potasse	2,3
Sel marin	4,3
Sulfate de cuivre	9,5
Sulfate de soude	11,1
Sulfate de magnésie	11,7
Sulfate de potasse	12,8
Potasse caustique	231,4
Alcool	4,2
Sucre	7,1

Mais bientôt la constance de l'équivalent endosmotique fut contestée par M. Ludwig [2] d'abord, puis par M. Eckhard [3]. Il est vrai que

[1] SCHMIDT, *Pogg. Ann.*, CII; 1857.

[2] LUDWIG, *Zeitschrift für die rationnelle Medicin*, VIII; 1849; et *Lehrbuch der Physiologie des Menschen*, I; 1852.

[3] ECKHARD, *Pogg. Ann.*, CXXVIII, 61; 1866; et *Beiträge zur Physiologie*, II, Giessen; 1870.

les expériences de M. Ludwig sont peu précises, et quand on lui voit trouver successivement pour un même sel, au même degré de concentration et à la même température, 31,9, 21,0 et 8,0 comme équivalent endosmotique, on hésite à admettre sans réserve ses conclusions. Mais depuis les recherches de M. Eckhard, l'idée de Jolly ne paraît plus soutenable. M. Eckhard opéra avec le péricarde de bœuf qui lui avait déjà servi dans une première recherche : cette membrane, après avoir dégorgé plusieurs heures dans l'eau froide, se conserve identique à elle-même pendant très longtemps, à la seule condition qu'on la replace dans de l'eau distillée froide après chaque expérience. Dans un tube fermé par cette membrane M. Eckhard introduisit d'abord une dissolution saturée de sel marin et du sel en excès, il plaça le tube dans un grand vase plein d'eau pure sans cesse renouvelée, et il arrêta l'expérience avant que tout le sel solide en excès eût disparu : il pesa alors le tube et détermina le poids du sel restant. Il obtint de cette manière 3,2 pour l'équivalent endosmotique du sel marin, en solution saturée, diffusant à travers le péricarde de bœuf. Il opéra ensuite sur des solutions diluées; pour maintenir la constance de composition du liquide dans le tube malgré l'osmose, il fit passer la solution en un courant réglé de façon que la concentration ne diminuât que très peu par son passage dans le tube, et il dosa exactement le sel à l'entrée et à la sortie; il trouva ainsi, avec une solution à 22 parties de sel pour 100 d'eau, 2,88 comme équivalent endosmotique; et avec une solution à 12,5 de sel pour 100 d'eau, 2,34. L'équivalent diminue donc lorsque la concentration diminue; ou, plus exactement, il n'y a pas d'équivalent endosmotique.

C'est ce qui résulte encore des recherches de Graham [1], qui a établi que la diffusion à travers un septum n'est généralement pas parallèle à la diffusion simple : ainsi, avec des solutions diversement concentrées de sulfate de magnésie, il détermina pour chaque solution : 1° la quantité de sel simplement diffusé après un temps toujours le même; 2° la quantité de sel remplacé par de l'eau dans l'endosmomètre; 3° l'élévation du liquide dans le même appareil, et il obtint les résultats suivants :

[1] Graham, *Phil. Trans.*; 1854.

oids de sel dans 100 parties d'eau		2	5	10	20
iffusion simple, sans membrane. Poids de sel diffusé		2	4,43	8,21	13,73
iffusion à travers une membrane (osmose).	Poids de sel diffusé	2	4,12	7.48	12,50
	Hauteur dans l'endosmomètre.	2	4,73	9,08	16,54

Graham vérifia aussi que l'endosmose augmente avec la température, comme la diffusion simple, mais suivant une autre loi nconnue.

252. Rôle de la membrane. — Dans l'endosmose la membrane joue le rôle le plus important. Toute membrane organique doit être considérée comme criblée de pores extrêmement fins, trop petits pour permettre une filtration sensible (l'eau ne filtre pas à travers une vessie), mais dans lesquels cependant les différents liquides peuvent s'introduire et cheminer par capillarité. Cette absorption, qui dépend des actions moléculaires du liquide et de la paroi, varie considérablement avec les divers liquides pour une même membrane. Une vessie se gonfle et se ramollit dans l'eau, tandis qu'elle reste dure dans l'alcool. Au cours d'une série de recherches concernant l'influence que l'eau exerce sur plusieurs substances azotées solides, M. Chevreul [1] a constaté que le tissu jaune élastique, préalablement desséché, absorbait 240 centièmes d'eau pure, et seulement 37 centièmes d'eau saturée de sel marin. Liebig [2] et M. Cloetta [3] ont confirmé le fait, et montré qu'une membrane plongée dans une dissolution saline se charge d'autant moins de liquide que la quantité de sel dissous est plus grande. En outre, comme Brucke [4] l'a remarqué le premier, le tissu perméable, attirant plus fortement l'eau que le sel, s'imprègne d'un liquide moins riche en sel que le bain circonvoisin. M. Cloetta a trouvé en effet que la concentration du liquide absorbé par une vessie est moindre que celle du liquide extérieur : avec le sel marin, le rapport des deux concentrations est à peu près constant et égal à 0,80 ; avec le sulfate de soude, ce rapport varie de 0,39 à 0,57, la concentration

(1) Chevreul, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XIX, 52 ; 1821.
(2) Liebig, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXV, 374 ; 1849.
(3) Cloetta, *Diffusionsversuche durch membranen mit zwei Salzen* (Dissert. inaug.). Zurich ; 1851.
(4) Brucke, *loc. cit.*

du liquide extérieur variant elle-même de 11,7 à 4,8 pour 10[0]. M. Ludwig [1] a fait à ce sujet une expérience démonstrative : dan[s] un flacon contenant une dissolution saturée de sel marin, il intro[-]duit un morceau de vessie sèche qui se gonfle d'eau, et bientôt o[n] voit le sel se déposer en cristaux abondants, tandis que dans u[n] flacon témoin, renfermant seulement de la dissolution saturée, il n'y a pas trace de cristallisation. Dans la diffusion d'un sel à travers une membrane, on a donc en réalité trois couches liquides distinctes à considérer.

M. Lhermite [2] a étudié directement le cas de trois liquides superposés. Il a mis dans un même tube du chloroforme, puis de l'eau, et enfin par dessus l'eau de l'éther. Le chloroforme ne pénètre pas dans l'eau, mais l'éther s'y répandant peu à peu arrive bientôt au contact du chloroforme, dans lequel il se diffuse. Ce mouvement persiste jusqu'à ce que la couche d'éther superposée à l'eau ait entièrement disparu. On observe alors que le chloroforme a augmenté de volume, tandis que l'épaisseur de la couche d'eau n'a pas sensiblement varié. Dans cette expérience le diaphragme formé par l'eau est imperméable à l'un des deux liquides qu'il sépare. De même une lame de caoutchouc placée entre de l'alcool et de l'eau ne se laisse pas traverser par l'eau, mais livre passage à l'alcool qui se diffuse dans l'eau sous-jacente dont il augmente le volume. En général les choses sont plus compliquées, la diffusion s'opérant à la fois dans les deux sens, quoiqu'il n'y ait toujours qu'un courant capillaire.

Le phénomène est donc très complexe. S'il est déjà difficile de donner une explication théorique de la diffusion simple, combien ne doit-on pas être plus réservé encore dans le cas actuel!

253. Applications. — Les études précédentes ne sont cependant pas restées stériles : elles ont d'abord jeté quelque jour sur le mécanisme de l'échange des liquides dans les êtres vivants. En outre, d'importantes applications ont été faites que nous devons brièvement signaler.

(1) LUDWIG, *loc. cit.*
(2) LHERMITE, C. R., XXXIX, 1179; 1854; et *Ann. des sc. nat.* (bot.), (4) III, 78.

Dialyseur de Graham. — C'est d'abord la dialyse, ou analyse par iffusion, imaginée par Graham, et fondée sur la rapide diffusibilité es cristalloïdes, qui permet de les séparer des colloïdes à peine iffusibles. Le dialyseur de Graham est un vase peu élevé A, dont le ond est formé par une feuille de papier-parchemin (papier modifié ıar immersion dans l'acide sulfurique) : la substance à dialyser

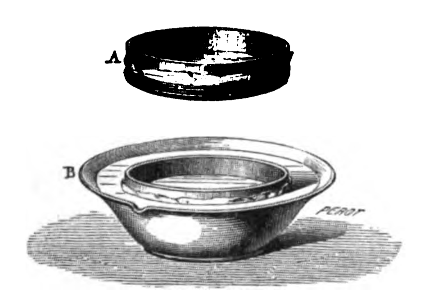


Fig. 396

est mise dans ce vase A, et le vase lui-même plongé dans l'eau B. La surface du dialyseur étant de 1 centimètre carré, une couche liquide de 1 centimètre de hauteur contenant en dissolution 2 grammes de matière sèche perd en 24 heures les quantités de matière suivantes :

Chlorure de sodium.	1gr,657	ou 1
Ammoniaque.	1 ,404	0,85
Théine.	1 ,166	0,70
Salyciline.	0 ,835	0,50
Sucre de canne.	0 ,783	0,47
Cachou.	0 ,265	0,16
Caramel.	0 ,009	0,005

Si donc on place dans le dialyseur un mélange de chlorure de sodium et de caramel, par exemple, le chlorure de sodium passera presque tout entier dans l'eau extérieure, le caramel restant dans le dialyseur. C'est ainsi que Graham a pu préparer divers colloïdes (silice soluble, alumine soluble, etc.), en dissociant par

diffusion [1] certains sels peu stables, dont l'élément colloïdal était retenu par la membrane.

La dialyse constitue une méthode précieuse en toxicologie; car elle permet de séparer les poisons cristalloïdes (acide arsénieux, strychnine, etc.) des colloïdes (albumine, mucus, etc.), dont la présence entrave ordinairement les recherches (Graham).

Un bel exemple de dialyse a été donné par M. Péligot dans son étude de l'eau de la Seine, près d'Asnières, en 1864 : après avoir séparé plusieurs principes par les méthodes ordinaires, il obtint un résidu noirâtre qu'il eut l'heureuse idée de dialyser : il put ainsi en retirer un cristalloïde, l'urée, qui était précisément la cause de l'altération de l'eau.

Osmogène de Dubrunfaut. — Dès 1853, Dubrunfaut [2] avait fait une application importante de l'osmose au traitement des jus de betteraves. Lorsque ces jus, qui contiennent à la fois du sucre et des sels minéraux (chlorure de potassium, azotate de potasse, etc.), sont soumis à la cristallisation, le sucre cristallise seul, et les sels restent dans les eaux-mères. Celles-ci, convenablement traitées, abandonnent encore du sucre par cristallisation, et ce traitement peut être plusieurs fois répété. Mais à chaque opération nouvelle la richesse en sels augmente, et comme ceux-ci sont un obstacle à la cristallisation du sucre, il arrive un moment où les eaux-mères, bien que contenant encore du sucre, ne peuvent plus le déposer. C'est alors que Dubrunfaut les soumet à l'osmose dans un appareil qu'il appelle l'*osmogène*, et qui consiste en une série de cadres BB, recouverts de papier-parchemin [3] : le jus sucré circule d'un côté du papier, tandis que de l'autre côté circule de l'eau pure. Or les sels minéraux traversent facilement le papier-parchemin qui est beaucoup moins perméable au sucre. On conçoit donc qu'en réglant convenablement la longueur de l'appareil et la vitesse du courant, on puisse enlever au jus sucré la majeure partie des sels qu'il renferme. Dans l'osmogène de Dubrunfaut l'effet est tel

(1) H. Sainte-Claire Deville, *Leçons professées devant la Société chimique de Paris en 1864 et 1865*; p. 270.

(2) Dubrunfaut, brevet de 1854.

(3) Ce fut le papier-parchemin qui rendit l'appareil réellement pratique (1864).

ı'un jus contenant à l'entrée 4 parties de sel pour 1 de sucre pré-
nte à la sortie la composition inverse : il ne contient plus que

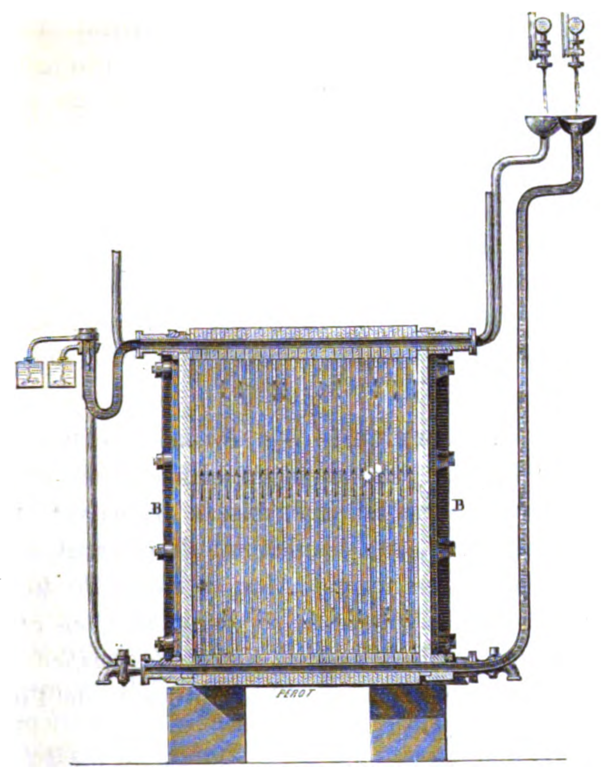


Fig. 397

1 partie de sel pour 4 parties de sucre, et peut par conséquent cristalliser de nouveau.

CHAPITRE V

ÉCOULEMENT DES LIQUIDES

I. — ÉCOULEMENT PAR UN ORIFICE EN MINCE PAROI.

254. Règle de Torricelli. — *Énoncé.* — Dans un large vase rempli de liquide pratiquons un orifice étroit et *en mince paroi*, c'est-à-dire à bords taillés en biseau tranchant. Le liquide s'échappe par cet orifice, et l'écoulement s'accélérant rapidement arrive bientôt au régime normal. Alors *la vitesse du liquide à sa sortie est égale à celle qu'aurait un corps tombant, en chute libre, du niveau supérieur dans le vase au niveau de l'orifice.* Si donc h désigne la hauteur de la surface libre au-dessus de l'orifice, la vitesse du liquide sortant est

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Cette règle a été découverte par Torricelli (¹), disciple de Galilée, puis vérifiée expérimentalement par Mariotte et Guglielmi. Daniel Bernoulli (²) en a le premier donné une démonstration théorique satisfaisante, en supposant que le liquide, au moins dans le voisinage de la surface et à sa sortie de l'orifice, se meut par tranches parallèles et qu'entre ces deux niveaux chaque particule suit une trajectoire continue, et en négligeant les frottements du liquide tant

(¹) TORRICELLI, *De motu gravium naturaliter descendentium*. Florence; 1643.
(²) D. BERNOULLI, *Hydrodynamica, seu de viribus et motibus fluidorum commentarii*. Argentorati (Strasbourg); 1738.

ıtre les parois que sur lui-même. La règle de Torricelli est alors e conséquence immédiate du théorème du travail (61).

Démonstration de D. Bernoulli. — Le régime normal étant établi, nsidérons le système pendant le temps infiniment petit s'étenınt de t à $t+dt$. Dans cet intervalle de temps dt, il sort de l'orifice ı volume de liquide EFE'F' égal à $svdt$, ayant une masse $\frac{\varpi}{g} svdt$,

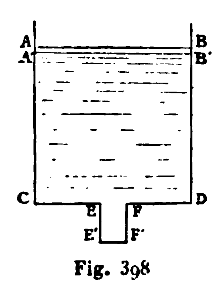


Fig. 398

si ϖ représente le poids spécifique du liquide, et possédant une puissance vive $\frac{\varpi}{g} svdt \frac{v^2}{2}$. En même temps, la tranche supérieure AB est venue en A'B', le volume ABA'B' étant égal au volume EFE'F'; mais la puissance vive de la masse ABA'B' est négligeable, la vitesse à la surface étant insensible par suite de la grande largeur du vase. La partie A'B'CD est au même état à l'époque t et à l'époque $t+dt$. La variation de la puissance vive du système pendant l'intervalle de temps dt se réduit donc à

$$\frac{\varpi}{g} svdt \frac{v^2}{2}.$$

Si l'on fait abstraction de la pression atmosphérique, envisagée comme s'exerçant également sur la surface supérieure du liquide et à l'orifice, la somme des travaux des forces pendant l'intervalle de temps considéré consiste uniquement dans le travail de la pesanteur. Sur une particule quelconque, de poids q, située d'abord à la hauteur z au-dessus d'un plan horizontal donné et venue au ni-

veau z', le travail de la pesanteur est $q(z-z')$. Le travail total est donc $\Sigma q(z-z')$, la sommation s'étendant à toute la masse.

Mais

$$\Sigma q(z-z') = \Sigma qz - \Sigma qz'$$

et, comme dans les deux sommes entre une portion commune se rapportant à la partie A'B'CD, il reste simplement

$$\varpi s v dt.h,$$

c'est-à-dire que le travail de la pesanteur est le même que si la masse ABA'B' était tombée directement en EFE'F'.

Le théorème du travail donne donc

$$\frac{\varpi}{g} s v dt \frac{v^2}{2} = \varpi s v dt.h,$$

ou

$$v^2 = 2gh.$$

ϖ disparaissant, la vitesse est, sous les réserves introduites, indépendante du liquide employé, et égale dans tous les cas à

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Vérifications expérimentales. — Pour vérifier cette valeur de la vitesse, on peut d'abord, comme l'a fait Torricelli, étudier la trajectoire décrite par le jet liquide, trajectoire qui aura la *forme* d'une parabole, puisqu'elle sera parcourue par une série de particules soumises à l'action de la pesanteur avec une vitesse initiale (84).

Si la vitesse initiale $v_0 = \sqrt{2gh}$ est dirigée horizontalement, l'équation de la trajectoire est

$$z = \frac{gx^2}{2v_0^2} = \frac{x^2}{4h},$$

ou

$$x^2 = 4hz,$$

·tant l'abscisse du point où le jet rencontre un plan horizontal né à la distance z au-dessous de l'orifice.

Prenons un grand vase, de hauteur H, très large à sa partie ›érieure, afin que le niveau ne varie pas sensiblement pendant lurée de l'expérience, pratiquons-y à diverses hauteurs des orifices oits et en mince paroi : de chaque orifice sortira un jet parabo-

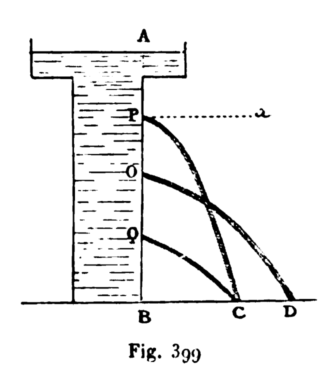


Fig. 399

lique, et si nous en mesurons l'amplitude sur le plan horizontal mené par la base du vase, nous vérifierons qu'elle est égale à

$$a = \sqrt{4h(H-h)}.$$

En opérant avec du mercure, sur lequel la résistance de l'air n'a que peu d'influence, Bossut trouva les amplitudes exactes à $\frac{1}{100}$ près.

L'expression de l'amplitude étant symétrique en h et $H-h$, si l'on prend BQ=AP, le jet sorti de l'orifice Q rencontrera le plan horizontal BD au même point C que le jet sorti de l'orifice P. L'amplitude maximum correspond au cas où ces deux facteurs de somme constante sont égaux, c'est-à-dire au cas où l'orifice est au milieu de AB.

Avec des ajutages obliques, il serait aisé de diriger le jet sous diverses inclinaisons, de manière à varier les expériences, mais l'emploi d'ajutages complique la question.

On a cependant pu, en prenant certaines précautions, obtenir des vérifications suffisamment approchées sur des jets verticaux, ou

plutôt légèrement inclinés pour que les particules descendantes

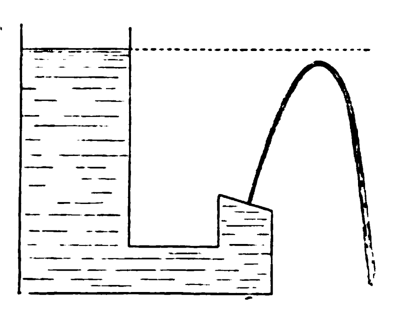


Fig. 400

ne retombent pas sur les particules ascendantes.

Un autre mode de vérification qui s'offre naturellement à l'esprit est la constatation de la *dépense*, ou de la quantité de liquide qui s'écoule par l'orifice pendant l'unité de temps. D'après ce qui précède, cette dépense devrait être représentée par un cylindre ayant pour base la section de l'orifice et pour hauteur la vitesse $\sqrt{2gh}$. Or, si l'on mesure la quantité de liquide écoulée pendant une seconde, on trouve qu'elle n'est que les 0,62 environ de la dépense théorique. Cet écart ne saurait être mis sur le compte de la vitesse, dont la valeur est maintenant hors de doute; c'est donc ailleurs qu'il faut en chercher la cause.

255. Contraction de la veine. — Nous avons admis qu'à sa sortie de l'orifice le liquide formait un cylindre ayant pour base cet orifice. En fait, cela est inexact, ainsi que Newton [1] l'a observé. Quand on examine attentivement la *veine*, on reconnaît qu'elle se contracte jusqu'à une certaine distance de l'orifice pour affecter ensuite une forme sensiblement cylindrique, de sorte que la section à laquelle s'appliquent en réalité nos raisonnements est la *section contractée*.

L'expérience a montré qu'en moyenne le diamètre *cd* de la section contractée est égal aux 0,8 du diamètre *ab* de l'orifice [2], la

[1] Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Londres, 1687.

[2] Pour $ab > 10^{mm}$, cd est égal à $0,78\,ab$; ab décroissant de 10^{mm} à 1^{mm}, cd n'augmente que jusqu'à $0,83\,ab$; enfin pour $ab = 0^{mm},55$, $cd = 0,88\,ab$. (Hachette, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), III, 78 ; 1816).

stance *ef* étant environ les 0,5 de *ab*. Toutefois ces rapports n'ont

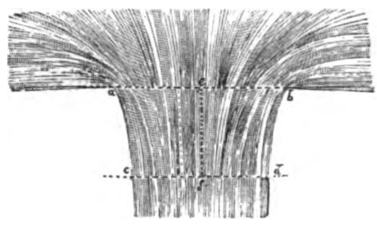


Fig. 401

rien d'absolu; la distance *ef* est surtout variable : elle peut s'élever jusqu'à 1 et même 1,5 *ab*.

La contraction n'est pas due, comme on pourrait le croire, au frottement contre les bords de l'orifice, ou du moins ce frottement n'intervient que fort peu dans la production du phénomène; car si l'on entoure l'origine de la veine d'un ajutage conique ayant exactement la forme de la partie contractée, on ne change pas sensiblement le débit, bien qu'on augmente considérablement le frottement.

La contraction provient surtout de ce que le liquide affluant vers l'orifice de tous côtés, ainsi qu'on le constate aisément en mêlant à l'eau une poussière de même densité (de la sciure de bois, par exemple), les divers filets, rapprochés par la cohésion du liquide, ne deviennent parallèles qu'à une certaine distance *ef* de l'orifice *ab*.

L'influence de la cohésion se manifeste encore par l'effet de la tension superficielle, l'enveloppe extérieure agissant comme un anneau élastique qui entourerait le jet au point où il sort du vase. Girard [1] avait déjà constaté que l'alcool coule plus rapidement que l'eau à travers un orifice en mince paroi. Récemment M. Isarn [2] a accéléré l'écoulement de l'eau en évaporant dans le voisinage du jet, à l'exemple de M. Duclaux (230), de l'alcool ou de l'éther. Bien que la proportion de vapeur dissoute fût insignifiante, (assez faible pour que le liquide remis dans l'appareil et coulant à l'air libre employât à s'écouler le même temps que l'eau pure),

[1] Girard, *Mémoires de l'Académie des sciences*, I; 1816.
[2] Isarn, *Journal de physique*, IV, 167; 1875.

l'effet produit sur la vitesse d'écoulement était considérable. la tension superficielle étant grandement diminuée.

256. Constitution de la veine ; recherches de Savart [1]. — *Forme de la veine.* — Au-dessous de la section contractée, on distingue dans la veine d'abord une première partie calme et transparente, puis au-delà une portion trouble, agitée, recouverte de nodosités.

Savart a fait de la forme et de la constitution de la veine une étude qui est un modèle du genre, et à laquelle nous empruntons les détails suivants.

La partie limpide, semblable à une baguette de cristal, descend en s'amincissant légèrement sous l'action de la pesanteur. Soient en effet deux sections droites traversant l'orifice à un intervalle de $\frac{1}{10}$ de seconde par exemple; elles se succéderont en un point quelconque de la veine à $\frac{1}{10}$ de seconde d'intervalle; mais comme leur vitesse s'accélère uniformément avec le temps, leur distance croîtra elle-même proportionnellement au temps nécessaire pour atteindre le point considéré.

La partie trouble et gonflée de la veine présente des renflements ou ventres, régulièrement espacés, qui ont l'aspect de fuseaux allongés, dont la surface est onduleuse, et dont l'intérieur paraît formé de lames liquides extrêmement minces, imbriquées. Le jet limpide se perd insensiblement vers le milieu du premier ventre et semble se transformer au delà en un tuyau creux qui régnerait dans toute l'étendue de la partie trouble (fig. 402, I) [2].

Cette disposition générale de la veine est indépendante du diamètre de l'orifice et de la hauteur du liquide dans le réservoir; on l'observe avec des orifices de $0^m,001$ de diamètre, de même qu'avec des orifices de $0^m,02$ à $0^m,03$, pour des charges de $0^m,03$ ou $0^m,04$, aussi bien que pour des charges de 4^m ou 5^m. Savart cite comme exemple la veine sortant d'un orifice de $0^m,006$ de diamètre sous une charge de $0^m,12$: la longueur de la partie

(1) Félix SAVART, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LIII, 337 ; 1833.

(2) Les ventres de la partie trouble et le tuyau qui paraît en occuper l'axe s'aperçoivent très bien lorsqu'on regarde obliquement de bas en haut une veine d'eau noircie, fortement éclairée par les rayons solaires. Avec un bon éclairement, il n'est pas difficile de rendre ces détails visibles à un auditoire nombreux.

ıpide de la veine est d'environ 0m,60; les ventres ont à peu près 30 de long (Savart entend par longueur d'un ventre la distance deux nœuds consécutifs), et 0m,01 de large; le diamètre des ıuds est de 0m,007 à 0m,008.

La longueur de la partie continue du jet, variable avec la na-ɾe du liquide, est sensiblement proportionnelle au diamètre de rifice, et proportionnelle à la racine carrée de la charge (pourvu e celle-ci ne soit pas trop faible); le diamètre des ventres est ıssi à peu près proportionnel à celui de l'orifice, tandis que leur ngueur, ainsi que le diamètre des nœuds, croît beaucoup plus ıpidement que le diamètre de l'orifice ([1]).

([1]) Les tableaux suivants, dressés par Savart, résument ses mesures, néces-ıirement un peu grossières.

Liquides.	Longueur du jet continu.
Orifice de 3mm; $t = 10°$; pression de 50cm.	
Éther	90cm
Alcool	85
Eau	70
Ammoniaque	46

Pression à l'orifice.	Longueur du jet continu.	Longueur des ventres.	Diamètre des ventres.	Diamètre des nœuds.	Diamètre minimum du jet continu.
Orifice de 6mm de diamètre; $t = 10°$.					
47cm	112cm	60cm	1cm,2	0cm,9	0cm,22
27	82	39	1 ,1	0 ,8	0 ,21
12	59	30	1	0 ,75	0 ,2
4 ,5	40	25	0 ,9	0 ,7	0 ,2
Orifice de 3mm de diamètre; $t = 15°$.					
47	55	16	0 ,6	0 ,4	0 ,15
27	41	13	0 ,55	0 ,36	0 ,13
12	25	9	0 ,52	0 ,32	0 ,11
4 ,5	16	7 ,8	0 ,5	0 ,28	0 ,1

Charges.	Rapport des racines carrées des charges.	Longueur de la partie continue.	Rapport des longueurs des parties continues.
Orifice de 6mm; $t = 6°$; membrane à la naissance de la partie trouble.			
51	1	45cm	1
102	1,41	65	1,44
153	1,73	75	1,66
459	3	145	3,22

Discontinuité de la partie trouble. — Les apparences bizarres de la veine, les ventres lamelleux et le tuyau très mince qui paraît en occuper l'axe, ne sont-ils pas le résultat d'une illusion d'optique?

Si, en effet, comme l'indique Savart, on dirige les yeux vers un point lumineux du jet, et qu'on les abaisse brusquement de manière à suivre le mouvement du point considéré, on n'aperçoit plus, au lieu de la partie trouble, que de très grosses gouttes, placées verticalement les unes au-dessous des autres, et laissant entre elles des espaces vides, huit ou dix fois plus grands que le diamètre des gouttes. La partie trouble du jet est donc discontinue. Savart vérifie cette discontinuité en coupant rapidement la veine avec un carton qui montre la trace de gouttes séparées, souvent même n'est pas mouillé (1). Il observe aussi qu'un jet de mercure, qui se présente d'ailleurs sous la même forme qu'une veine d'eau, est translucide à partir du milieu du premier ventre de la partie trouble, de sorte qu'on peut aisément lire à travers cette partie, tandis que le haut de la veine est absolument opaque. A ces preuves on peut ajouter le fait, observé par Magnus, d'un fil métallique introduit à une petite profondeur dans un ventre, et faisant ressentir à la main qui le tient l'impression d'un mouvement énergique de vibration, tandis que, plongé dans la partie limpide, le fil ne fait éprouver qu'une pression uniforme.

La veine, dans sa partie trouble, est donc constituée par des gouttelettes séparées, se succédant rapidement, et produisant l'apparence d'une traînée translucide, comme le charbon que l'on fait tourner rapidement semble, par suite de la persistance des impressions sur la rétine, un ruban continu et en même temps transparent.

Observation des gouttes isolées. — On peut cependant, par différents moyens, se mettre à l'abri de cette illusion, et voir les gouttes comme si elles étaient immobiles. Savart faisait mouvoir

(1) Hagen a cherché à transformer cette expérience en un procédé de mesure : il place sous la veine un cylindre tournant, recouvert de papier buvard, sur lequel chacune des masses isolées marque son empreinte, de sorte que l'on peut déterminer le nombre de ces masses qui se détachent dans un temps donné, et jusqu'à un certain point leurs grosseurs relatives et les distances qui les séparent. (Hagen, *Pogg. Ann.*, LXXVIII, 451 ; 1849.)

erticalement de bas en haut, derrière une veine d'eau noircie, un arge ruban sans fin, présentant alternativement des parties blanches et des parties noires. Quand une goutte d'eau passe devant une partie blanche, elle se détache en noir sur un fond blanc; quand elle se trouve devant une partie noire, elle est invisible. On voit donc chaque goutte par intermittences, et l'on peut régler la rotation du ruban de manière que la durée d'une intermittence soit égale au temps qu'une goutte met à prendre la place de celle qui la précédait immédiatement; on aura alors avec les deux gouttes la même image et, ces images se succédant rapidement, l'impression sera permanente. Billet [1] obtint un résultat semblable en disposant derrière le jet un miroir concave, réfléchissant sur la veine même, située légèrement en deçà du centre de courbure, son image renversée : l'œil, placé un peu au delà du centre, voit les gouttes se détachant encore en noir sur fond gris. Le même physicien employa aussi un second procédé beaucoup plus commode, et consistant à regarder la veine à travers un disque tournant de Plateau [2]; chacune des fentes radiales du disque laissant voir la veine pendant un temps si court qu'elle semble immobile, on obtiendra encore, pour

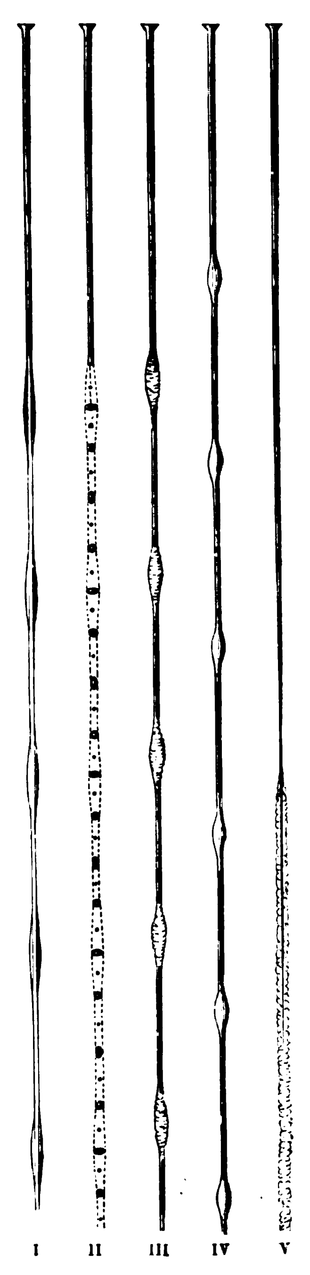


Fig. 402

[1] Billet, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXI, 326; 1851.

[2] Plateau, *Ann. de chim. et de phys.* (2), LIII, 304; 1833.

une certaine vitesse, une série d'impressions identiques produisant une sensation permanente. On peut enfin, à l'exemple de Matteucci [1], éclairer la veine par une étincelle électrique, qui la saisit pendant un instant si court qu'elle paraît absolument immobile, et qui donne néanmoins une vision durant assez longtemps pour permettre d'étudier tous les détails du phénomène [2] : il est aisé d'ailleurs de répéter l'expérience, et même de rythmer les étincelles de manière à obtenir une image fixe et persistante.

Quel que soit le procédé suivi, on observe (fig. 402, II) une série de grosses gouttes, affectant toutes les formes depuis un ellipsoïde aplati jusqu'à un ellipsoïde allongé, ce dernier s'aplatissant de nouveau pour s'allonger plus loin, et ainsi de suite; entre ces gouttes, on en voit d'autres plus petites, situées suivant l'axe du jet.

Les apparences de la veine se comprennent dès lors facilement : les renflements et les rétrécissements de la partie trouble sont dus aux changements périodiques de forme, que subissent pendant leur chute des gouttes se remplaçant à des intervalles moindres que la durée de la sensation produite sur la rétine par chacune d'elles : l'apparence imbriquée des ventres provient de ce que les gouttes ne se succèdent pas aux mêmes lieux identiquement avec les mêmes formes. Le pseudo-canal central n'est autre chose que le sillage des petites gouttes intermédiaires qui tombent suivant l'axe.

Pour montrer que des gouttes qui parcourent une même verticale à la suite les unes des autres peuvent, en passant devant l'œil, prendre l'aspect d'un jet continu présentant des renflements uniformément espacés et toutes les particularités précédemment décrites, Savart disposa un vase cylindrique, muni en haut d'un robinet, et percé au fond d'un orifice auquel était adapté un tube cylindrique d'environ 1 centimètre de diamètre et 6 centimètres de longueur. Ce vase étant préalablement rempli de liquide, on ouvre

(1) Matteucci, C.R., XXII, 260 ; 1846.

(2) Il faut pour cela observer non pas la veine elle-même, mais son ombre sur un écran blanc, ombre qui est parfaitement nette, tandis que chacune des masses isolées n'est guère visible que par un point brillant (Buff, *Liebig's Annalen von Chemie und Pharmacie*, LXXVIII, 162 ; 1851).



robinet de façon à produire un écoulement ar gouttes plus ou moins rapprochées. Si ces outtes, tombant devant un écran noir vertical, e succèdent à des intervalles d'environ $\frac{1}{5}$ de econde, on aperçoit un jet continu, diaphane, ffrant des renflements dont la longueur est l'autant plus considérable qu'ils sont plus éloignés de l'orifice; l'axe de ce jet est occupé dans oute sa longueur par un autre jet semblable, l'un diamètre beaucoup moindre, et sur lequel un éclairement intense permet aussi de distinguer une série de ventres courts et peu saillants. En un mot, la succession rapide des gouttes se détachant de l'orifice reproduit exactement les apparences de la partie trouble de la veine.

Il suffit d'ailleurs de ralentir l'écoulement pour observer que chaque goutte, de 5^{mm} à 6^{mm} de diamètre, est constamment suivie d'une seconde goutte, d'un diamètre beaucoup moindre, et qu'au moment de leur départ les gouttes se contractent sur elles-mêmes avec tant d'énergie qu'elles lancent toujours plusieurs petites gouttelettes; elles dépassent donc la forme sphérique, et ne l'atteindront qu'après une série de contractions et d'allongements périodiques, d'où résulteront les renflements et les étranglements observés sur le jet apparent produit par l'ensemble de ces gouttes.

La constitution de la veine étant ainsi établie en quelque sorte par l'analyse et par la synthèse, Savart examine en détail les déformations périodiques dont elle est le siège.

Renflements de la partie continue. — Il constate d'abord que des nodosités existent également sur la portion limpide de la veine; mais,

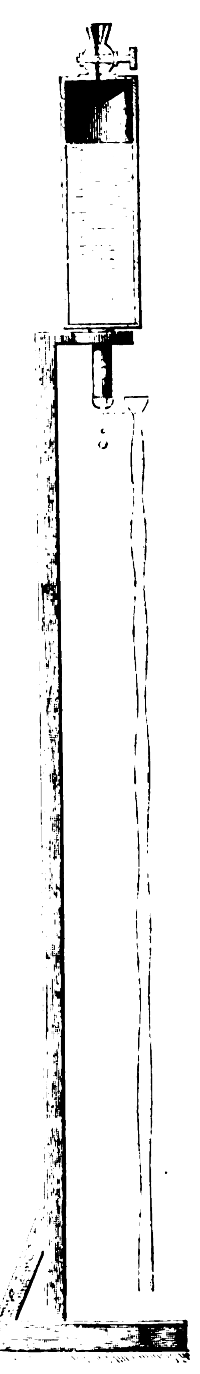


Fig. 403

au lieu d'être fixes dans l'espace comme les ventres, ces nodosités se transportent de la section contractée à l'extrémité du jet, en se renouvelant sans cesse. Si l'on fait tomber sur cette partie continue un faisceau solaire sortant d'une étroite fente horizontale, la zone éclairée paraît alternativement monter et descendre, et cet effet dû au passage périodique de renflements annulaires, se remarque jusque près de l'orifice, en s'affaiblissant toutefois à mesure qu'on s'éloigne de la partie trouble. Depuis, Hagen (¹) a donné pour observer les variations de section de la partie continue un procédé très simple, consistant à couper le jet avec une plaque de verre à travers laquelle on examine la section ainsi déterminée : l'expérience est surtout commode dans le cas d'une veine jaillissant de bas en haut, et venant frapper la concavité d'un verre de montre.

Son propre de la veine. — La propagation des renflements le long du jet et l'émission des gouttes dans la partie trouble se produisent avec une parfaite régularité, comme l'atteste un phénomène qui ne pouvait échapper à Savart. Quand on approche l'oreille de la partie trouble de la veine, on entend un son sourd, provenant du choc périodique des renflements et des gouttes contre l'air et contre le corps sur lequel tombent les masses isolées ; et l'on peut faire acquérir à ce son une grande intensité en recevant la partie discontinue sur une membrane ou sur le fond d'un vase de métal. Le son est le même, à quelque hauteur de la partie trouble que l'on place la membrane, et le même encore, bien que beaucoup plus faible, lorsqu'on la remonte jusque dans la partie limpide. Il n'est donc pas douteux que les renflements de cette partie et les gouttes qu'ils forment en arrivant à l'extrémité du jet soient soumis à la même périodicité. Savart reconnut sans peine que pour un même orifice la hauteur du son propre de la veine est proportionnelle à la racine carrée de la charge et en raison inverse du diamètre de l'orifice. Elle paraît d'ailleurs indépendante de la nature du liquide, comme de la température.

Influence des vibrations extérieures. — Si, dans les conditions

(¹) Hagen, *loc. cit.*

dinaires, la veine effectue ainsi en toutes ses parties des brations régulières, il était naturel de penser que des ondes riennes de même période l'influenceraient d'une manière sensible. Savart trouva en effet que, sous l'influence d'un son à unisson de celui de la veine ([1]), la partie continue du jet se raccourcit, et les ventres remontent en devenant plus ramassés et plus guliers (fig. 402, III)([2]). Le son extérieur est-il voisin de l'unisson, n voit la portion limpide s'allonger et se raccourcir alternativement, en même temps que l'oreille perçoit une série de battements qui coïncident avec les allongements et les raccourcissements suivis par l'œil. D'autres sons modifient plus ou moins profondément le mouvement vibratoire de la veine. Dans tous les cas la dépense reste la même.

Un fait important constaté encore par Savart, c'est que, pour agir efficacement, les vibrations extérieures doivent se transmettre à l'orifice. Si, en effet, l'écoulement a lieu dans un tube vide d'air, ce qui ne change en rien l'état de la veine, les ondes sonores, excitées à distance dans l'air et transmises à l'orifice par les parois du réservoir, agissent sur la veine exactement de la même manière que si l'écoulement avait lieu dans l'air. Mais qu'à l'exemple de Magnus ([3]) on adapte l'orifice à l'extrémité d'un tube en caoutchouc qui empêche toute communication de mouvement du fond du vase à l'orifice, et un son produit dans l'air à l'unisson de celui de la veine sera sans influence aucune, à moins qu'à l'aide d'une planchette maintenue contre l'orifice même on ne transmette directement à celui-ci les vibrations. En appuyant un diapason sur le réservoir d'où sortait la veine, Savart avait vu la partie limpide et transparente se réduire presque à rien (fig. 402, IV), et les ventres devenir aussi calmes et aussi limpides que s'il y avait eu continuité dans la substance qui les formait, tant la période d'émission des gouttes était alors parfaitement régulière, tant le point où elles se détachent de la partie continue était rigoureusement déterminé.

([1]) Un harmonique produit un effet analogue, mais bien moins marqué.

([2]) L'action est tellement énergique, qu'à plus de 20 mètres un violon à l'unisson amène la transformation de la veine.

([3]) MAGNUS, *Pogg. Ann.*, CVI, 1 ; 1859.

Cette extrême régularité permettait d'apercevoir très distinctement à l'intérieur des ventres, et suivant la direction de l'axe du jet, la série des petites gouttes intercalées entre les grosses, d'observer que ces gouttes de moindre diamètre sont également le siège d'oscillations donnant aussi naissance à des ventres, de constater enfin l'existence d'une troisième série de gouttes excessivement petites, situées entre les deux précédentes, et subissant également des oscillations pendant leur chute (¹).

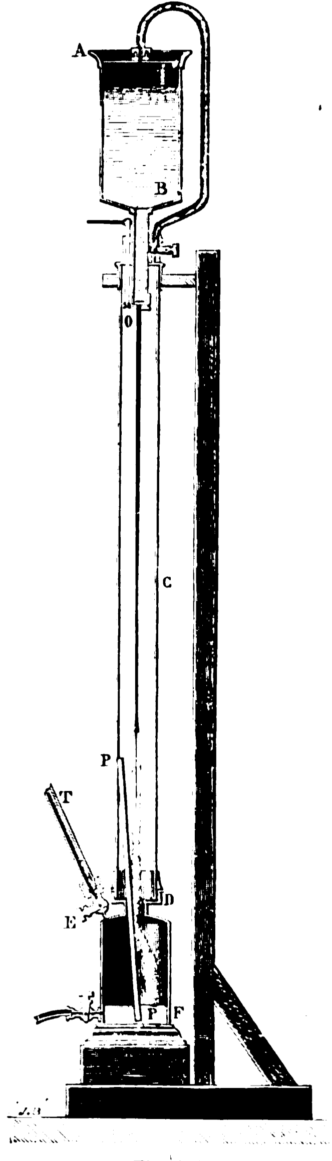


Fig. 404

Afin de reconnaître exactement le rôle des vibrations qui viennent frapper le réservoir AB, Savart le mit autant que possible à l'abri des trépidations extérieures : à cet effet, par plusieurs doubles de drap il l'isola de son support qui fut placé lui-même sur des coussins de drap ; et la veine fut reçue sur une planche très épaisse, fortement inclinée, PP, contre laquelle elle se brisait sans bruit sensible. On pouvait d'ailleurs faire le vide dans tout l'appareil ACF ; mais cette précaution fut trouvée en général inutile, les actions transmises par l'air à l'état ordinaire étant très faibles. Dans ces conditions, la partie limpide de la veine s'allonge et s'effile considérablement (fig. 402, V) ; elle se termine par une partie trouble

(¹) On observe fréquemment que ces petites gouttes sont lancées en dehors de l'axe de la veine et forment des jets paraboliques, tantôt fixes, tantôt oscillant, tantôt tournant autour du jet principal.

ui ne présente plus de ventres, mais seulement de légères bosseres irrégulièrement placées et changeant onstamment de position. Magnus a reconnu i effet, au moyen du disque tournant de ateau, que la partie trouble est alors formée : masses inégales, s'isolant à des hauteurs ifférentes, de sorte qu'on ne peut plus observer de ventres réguliers. Si l'on reçoit cette artie trouble sur une membrane tendue, ussitôt il se produit un son identique à celui que faisait entendre la veine sous la même charge, dans les conditions ordinaires. En même temps les ventres reparaissent très réguliers, et la longueur de la partie continue se réduit beaucoup. Un son convenable, émis à distance, amène une transformation analogue. Pour que la veine prenne son apparence habituelle de nœuds et de ventres fixes, il faut donc que des vibrations extérieures d'un rythme déterminé soient communiquées à l'orifice par lequel s'échappe le liquide.

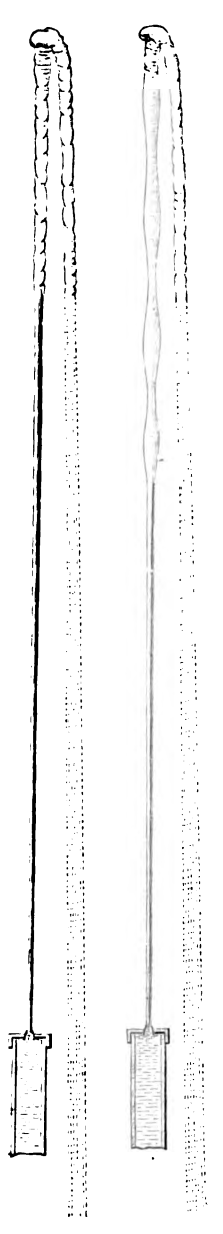


Fig. 405

Veines dirigées horizontalement, ou obliquement, ou verticalement de bas en haut. — Savart observa enfin que la constitution des veines lancées horizontalement, ou obliquement, ou même verticalement de bas en haut, ne diffère pas essentiellement de celle des veines lancées verticalement de haut en bas. Dans tous les cas, des vibrations d'une période déterminée ne laissent pas d'agir sur la veine de la même manière que quand le jet tombe librement de haut en bas. Il est toutefois à noter que, sous l'action de vibrations d'une période convenable, la gerbe des veines obliques est susceptible de se résoudre en deux ou même trois jets bien distincts, ayant chacun leurs ventres et leurs nœuds régulièrement formés ; mais il est

toujours un nombre de vibrations pour lequel la gerbe se condense

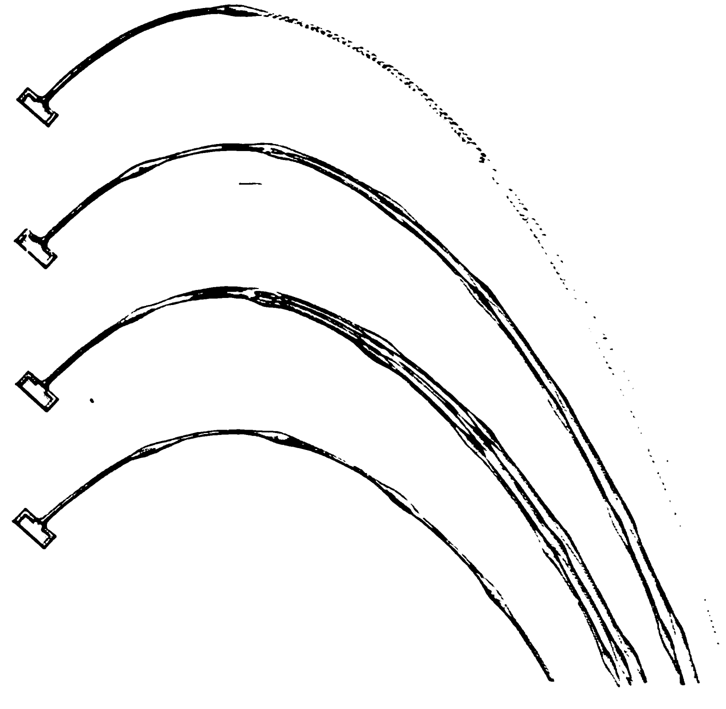


Fig. 406

en un seul jet parfaitement régulier, et ce son est aussi celui qui correspond au plus grand raccourcissement de la partie continue.

257. Théorie de Plateau. — Le premier phénomène que nous ait offert la veine liquide est le trouble produit à un certain niveau par la résolution du jet en gouttes distinctes. On serait naturellement tenté d'attribuer cette résolution à un déchirement résultant de l'étirement excessif causé par la pesanteur; mais la veine ascendante, refoulée au contraire par la pesanteur, se convertit de même en masses isolées. Il faut donc chercher ailleurs la raison du phénomène. Plateau l'a mise en lumière par la démonstration de ce fait qu'au delà d'une certaine limite de longueur tout cylindre liquide tend nécessairement à se partager en sphères et sphérules par le seul jeu des forces de cohésion (222). Au repos, le cylindre ne persiste pas au delà d'une longueur peu supérieure à

ois fois son diamètre. Entraîné rapidement, le cylindre presque :act que constitue la veine ne se divisera qu'après avoir atteint ne longueur beaucoup plus grande, la transformation demandant n certain temps pour s'accomplir; mais, à petite distance de l'orice, la partie continue présentera déjà des nodosités, premiers signes es sphères de rupture. Ces déformations, imperceptibles d'abord, e prononceront de plus en plus, les renflements devenant plus aillants et les étranglements plus profonds. Enfin les masses se éepareront en gouttes et gouttelettes de diverses grosseurs, qui outes, en oscillant, tendront vers la forme sphérique.

Le temps nécessaire à la segmentation complète d'un cylindre donné étant évidemment indépendant de la vitesse de translation de ce cylindre, la longueur de la partie continue de la veine doit croître avec la charge. Et même, comme dans les premiers instants la vitesse $v=\sqrt{2gh}$, due à la charge, l'emporte beaucoup sur la vitesse $u=gt$, due à la pesanteur, surtout si la charge est un peu considérable, la longueur de la partie continue sera sensiblement proportionnelle à v, et par conséquent à la racine carrée de la charge. D'autre part, la durée de la transformation d'un cylindre en sphères étant sensiblement proportionnelle au diamètre de ce cylindre, la longueur de la partie continue doit être sensiblement proportionnelle au diamètre de l'orifice. Il est évident enfin que la durée de la transformation du cylindre liquide est liée à la nature du liquide : il en sera donc de même de la longueur de la partie continue de la veine. Toutes ces conséquences sont d'accord, comme l'on sait, avec les lois trouvées par Savart.

Les phénomènes observés par l'illustre physicien relativement à la hauteur du son propre de la veine ne se rattachent pas moins naturellement aux principes précédents. En effet, la distance entre les milieux de deux étranglements naissants ne dépend, d'après ce qui a été dit, que du diamètre du cylindre auquel on peut assimiler la veine; d'où il suit que, si l'orifice demeure le même, le nombre des divisions naissantes qui passeront dans un temps déterminé à la section contractée sera proportionnel à la vitesse et par suite à la racine carrée de la charge, et que pour différents diamètres la longueur d'une division naissante sera proportionnelle au diamètre. Mais chacune de ces mêmes divisions donne plus bas une masse isolée,

et chaque masse isolée produit un choc contre la membrane placée sous la veine ; le nombre de ces chocs par seconde, et par conséquent le nombre des vibrations sera donc proportionnel à la racine carrée de la charge et en raison inverse du diamètre de l'orifice.

Quant à l'influence des vibrations communiquées au vase, on s'en rendra compte aisément en remarquant que des oscillations verticales et de même durée que celles du son propre de la veine, exécutées par le fond du vase contenant le liquide, ajouteront leur action à celle des forces de cohésion pour grossir les renflements et creuser les étranglements, sans changer d'ailleurs en rien ni la longueur d'une division ni sa vitesse de translation. La transformation s'effectuera donc suivant les mêmes lois, mais en moins de temps : chaque division atteindra l'état de masse isolée à une moindre distance de l'orifice ; la partie continue se raccourcira. De plus, le mouvement vibratoire de l'orifice sollicitant encore les masses qui se détachent, celles-ci s'aplatiront pour s'arrondir ensuite, puis s'allonger, pour éprouver en un mot ces variations de forme qui donnent lieu aux ventres et aux nœuds.

Enfin il ne serait pas difficile d'expliquer par les mêmes principes la formation de la gerbe des veines obliques et la réduction de cette gerbe à un, deux ou trois jets sous l'influence d'un son, de l'octave grave, et de la double octave grave de ce son (1).

258. Choc d'une veine liquide contre un plan. — Savart (2) a encore étudié le choc des veines liquides, soit contre des solides, soit entre elles. Nous rapporterons seulement quelques-uns des faits observés dans le choc d'une veine liquide contre un plan circulaire.

Un disque de métal de 27 millimètres de diamètre est disposé à 20 millimètres d'un orifice circulaire de 12 millimètres de diamètre, surmonté lui-même d'un long tube de verre préalablement rempli d'eau. A l'instant où l'écoulement est établi, la veine, après avoir frappé le disque, se répand dans tous les sens et forme une nappe circulaire et continue AB, dont le diamètre a environ 60 centimètres ; la partie centrale de cette nappe, ab, est mince, unie et transparente ; le pourtour, l'auréole comme l'appelle Savart, est épaisse,

(1) Voir PLATEAU, *loc. cit.*
(2) SAVART, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), LIV, 55 et 113 ; 1833.

ouble, et recouverte de nombreuses stries qui projettent au loin ne multitude de gouttelettes. La nappe tout entière est le siège 'un mouvement périodique d'élévaon et d'abaissement, qui engendre n son sourd, analogue à celui que roduit le vol de certains oiseaux, andis que son diamètre croît et décroît assez régulièrement pour donner naissance à un son fort et soutenu lorsqu'on approche une membrane jusqu'au contact de l'auréole. Le niveau du liquide dans le tube s'abaissant continuellement, le diamètre de la nappe s'agrandit peu à peu; en même temps l'auréole diminue, et elle disparaît complètement lorsque la pression n'est plus que de 60 à 62 centimètres. Alors, la nappe atteint son diamètre maximum, qui est d'environ 80 centimètres, et elle présente l'aspect d'une large capsule parfaitement unie, dont le contour libre, légèrement denté, lance une pluie de gouttelettes. La pression à l'orifice continuant toujours à décroître, cette nappe unie diminue graduellement de diamètre, se recourbe sur elle-même à sa partie inférieure en se portant vers la tige qui soutient le disque, et à la pression de 32 à 33 centimètres elle se ferme entièrement en prenant la forme d'une toupie d'environ 40 centimètres de diamètre et 45 centimètres de hauteur. A partir de cet instant, la nappe décroît insensiblement, son profil ressemblant toujours beaucoup à une lemniscate; mais, lorsque la pression n'excède pas 10 à

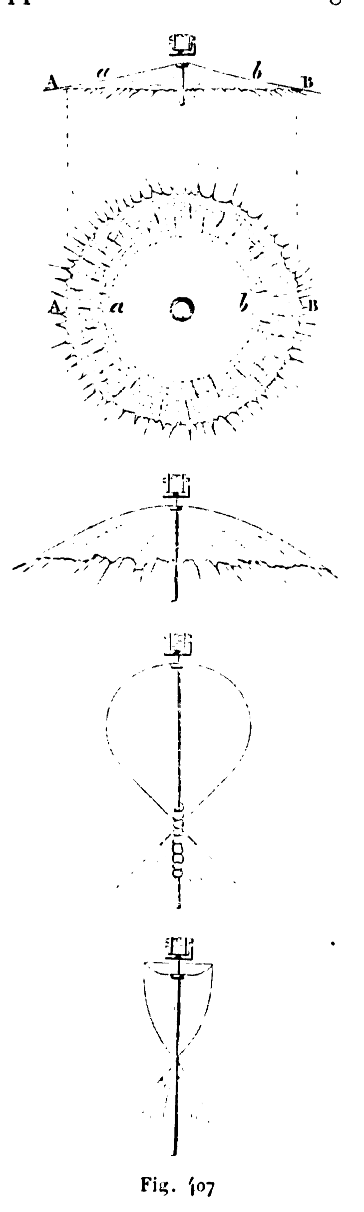


Fig. 407

12 centimètres, sa partie supérieure devient tout à coup concave, puis après un temps extrêmement court la première figure reparaît, et ces changements instantanés se renouvellent périodiquement sept à huit fois, jusqu'à ce que la nappe, diminuant toujours de volume, finisse par disparaître complètement. Nous n'entreprendrons point d'expliquer ces phénomènes complexes; disons seulement que, selon Savart, la partie unie de la nappe correspond à la partie continue de la veine et l'auréole à la partie trouble, et que, suivant Plateau, la transformation du bourrelet en gouttelettes se rattache à la conversion d'un cylindre en masses isolées.

259. Temps nécessaire pour qu'un vase se vide complètement. — Parmi les conséquences du principe de Torricelli, se place encore l'évaluation du temps nécessaire pour qu'un vase se vide complètement. Soit un vase cylindrique, de section S et de hauteur H, percé à son fond d'un orifice, de section s, par lequel s'écoule le liquide qui remplissait complètement le vase à l'origine. Au bout du temps t, la hauteur du liquide dans le vase est h; et la quantité de liquide, $-\mathrm{S}\,dh$, qui s'écoule pendant le temps dt, est égale à $s'\sqrt{2gh}\,dt$, s' désignant la section contractée. On a donc,

$$-\mathrm{S}\,dh = s'\sqrt{2gh}\,dt,$$

ou

$$\frac{dh}{2\sqrt{h}} = -\frac{s'}{\mathrm{S}}\sqrt{\frac{g}{2}}\,dt;$$

d'où, en intégrant,

$$\sqrt{h} = \sqrt{\mathrm{H}} - \frac{s'}{\mathrm{S}}\sqrt{\frac{g}{2}}\,t.$$

$\sqrt{\mathrm{H}}$ étant la constante déterminée par cette condition qu'à l'origine de l'écoulement, pour $t=0$, on ait $h=\mathrm{H}$ [1].

[1] La vitesse du liquide à l'orifice,

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g\mathrm{H}} - \frac{s'}{\mathrm{S}}gt,$$

décroît proportionnellement au temps.

Pour que le liquide s'écoule complètement, c'est-à-dire pour que $h = 0$, il faut un temps

$$T = \frac{S}{s'}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Si le niveau avait été maintenu constant à la hauteur H, l'écoulement d'une égale quantité de liquide SH aurait exigé un temps T_1, défini par la relation

$$SH = s'\sqrt{2gH}\,T_1,$$

c'est-à-dire un temps

$$T_1 = \frac{S}{s'}\sqrt{\frac{H}{2g}}.$$

On a donc

$$T = 2T_1.$$

Le temps T que met le vase à se vider est le double de celui que demanderait l'écoulement d'une quantité de liquide égale à celle qui remplissait le vase au début, si le niveau était maintenu à sa hauteur initiale.

Ce curieux résultat a été vérifié par Mariotte.

II. — ÉCOULEMENT PAR UN TUYAU.

260. Théorème de Bernoulli [1]. — La plupart des questions relatives au mouvement des fluides ne peuvent pas être résolues par les seules ressources de l'hydrodynamique. L'*hydraulique* constitue une partie difficile de l'art de l'ingénieur, où la pratique intervient sans cesse pour corriger les résultats d'une théorie imparfaite, fondée à la fois sur les principes certains de la mécanique et sur des hypothèses approximatives. Telle est l'*hypothèse des tranches*, d'après laquelle toutes les molécules situées à un instant donné entre deux sections infiniment voisines d'un tuyau, sont encore comprises entre deux pareilles sections à une époque quelconque du mouvement. Bien que cette hypothèse ne convienne en réalité qu'exceptionnellement, nous l'admettrons d'une manière générale, et nous chercherons la loi du mouvement permanent d'un

[1] BERNOULLI, *loc. cit.*

liquide dans un tuyau de forme quelconque, mais continue, en négligeant encore les frottements de l'eau contre le tuyau et sur elle-même. Il suffira pour cela de généraliser le raisonnement

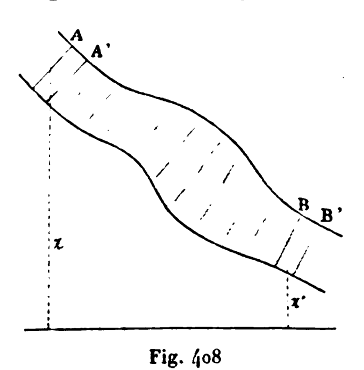


Fig. 408

par lequel nous avons établi la règle de Torricelli. Soient A et B deux tranches de section s et s', animées des vitesses v et v',

$$sv = s'v'.$$

Considérons l'écoulement pendant un temps dt : la masse AB vient en A'B', et le théorème des forces vives donne, si l'on appelle p et p' les pressions en A et B, z et z' les hauteurs des centres de gravité des tranches A et B au-dessus d'un plan horizontal quelconque,

$$\frac{\varpi}{g}\frac{s'v'dt.v'^2}{2} - \frac{\varpi}{g}\frac{svdt.v^2}{2} = psvdt - p's'v'dt + \varpi svdt.z - \varpi s'v'dt.z',$$

ou

$$\frac{p}{\varpi} + \frac{v^2}{2g} + z = \frac{p'}{\varpi} + \frac{v'^2}{2g} + z',$$

ou encore

$$\frac{p}{\varpi} + \frac{v^2}{2g} + z = \text{C}^{\text{te}}.$$

Tel est le théorème de Bernoulli, fondamental en hydraulique.

261. Théorème de Borda (¹). — Quand la section du tuyau éprouve un changement brusque, il y a une perte de travail, me-

(¹) Borda, *Histoire de l'Académie des sciences*; 1786.

ırée par la puissance vive perdue. Ce principe, formulé d'abord ar Borda comme une extension, très contestable, du théorème de arnot (191), peut se justifier aisément, non plus par le principe des ›rces vives, la force vive des mouvements vibratoires produits dans : tourbillonnement étant inconnue, mais par le théorème des rojections des quantités de mouvement ([1]), où, pour une moyenne, es mouvements vibratoires n'entrent pas. Soit un tuyau cylindri- ¡ue AA_1, de section s, s'élargissant brusquement en CC_1 suivant un ıouveau cylindre BB_1, de section s', auquel nous supposerons même

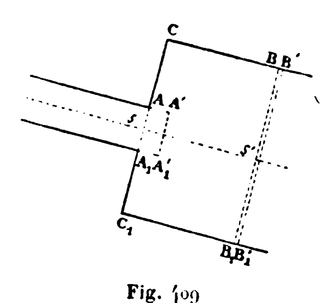


Fig. 409

axe que le premier, cet axe étant celui sur lequel nous projetterons les quantités de mouvement et les forces. Dans le grand cylindre prenons une section BB_1, assez loin de CC_1 pour que le mouvement soit redevenu régulier ; la variation de la somme des projections des quantités de mouvement de la masse AA_1BB_1 est

$$\frac{\varpi}{g}(s'v'dt.v' - svdt.v);$$

([1]) Nous voulons dire par là le théorème fondamental (57)

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X,$$

ou

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dx}{dt} = \Sigma X,$$

d'après lequel la dérivée par rapport au temps de la somme des projections des quantités de mouvement sur un axe quelconque est égale à la somme des projections des forces sur le même axe.

la dérivée de cette somme est donc

$$\frac{\varpi}{g}(s'v'^2 - sv^2).$$

Elle est égale à la projection des forces

$$ps' - p's' + \varpi s' l \frac{z - z'}{l}:$$

nous supposons la pression égale à p dans toute la masse tourbillonnante, jusqu'au voisinage de BB_1 où elle devient brusquemen p'. On a donc

$$\frac{\varpi}{g}(s'v'^2 - sv^2) = ps' - p's' + \varpi s'(z - z'),$$

ou, si l'on se rappelle que $sv = s'v'$,

$$\frac{\varpi}{g}(v'^2 - vv') = p - p' + \varpi(z - z'),$$

ou encore

$$\frac{\varpi}{2g}\left(v'^2 - v^2 + (v - v')^2\right) = p - p' + \varpi(z - z'),$$

ou enfin

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} + z = \frac{v'^2}{2g} + \frac{(v - v')^2}{2g} + \frac{p'}{\varpi} + z',$$

équation qui ne diffère de celle de Bernoulli que par le terme $\frac{(v - v')^2}{2g}$, représentant la perte de puissance vive due à la variation brusque de la vitesse.

262. Écoulement par un ajutage. — Ces principes nous permettront de nous rendre compte de l'effet des *ajutages* qui ont sur la forme de la veine liquide et par conséquent sur la dépense une influence considérable.

Ajutage rentrant. — Supposons d'abord l'ouverture munie d'un

utage rentrant, court et aminci, de façon à empêcher le liquide e glisser le long de la paroi avec une vitesse sensible au voisinage e l'orifice s. Considérons la masse comprise entre la surface supé-

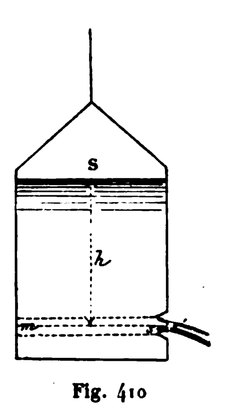


Fig. 410

rieure S et la section contractée s'. Le vase étant toujours supposé très large par rapport à l'orifice, la variation de la somme des projections des quantités de mouvement suivant l'horizontale se réduit à $\frac{\varpi}{g}s'v'dt.v'$; la dérivée de cette somme est donc $\frac{\varpi}{g}s'v'^2$. Elle est égale à la somme des projections des forces sur l'horizontale. Or, la seule force à considérer est la pression en s. On a donc

$$\frac{\varpi}{g}s'v'^2 = \varpi sh.$$

Mais, d'après la règle de Torricelli,

$$v'^2 = 2gh.$$

Par conséquent

$$s' = \frac{s}{2}.$$

La dépense réelle, réduite au minimum, est alors la moitié de la dépense théorique, conformément à une expérience de Borda.

La pression en m est $\varpi s'.2h$. Le vase, suspendu par un fil, s'écarte de la verticale (203) sous l'influence de cette pression, double de celle que l'on estimerait d'après la dépense.

Ajutage conique. — Nous avons déjà dit (255) qu'un ajutage conique, modelé sur la forme de la veine sortante, n'introduit qu'un frottement à peine sensible. La dépense, rapportée à l'orifice extérieur s' de cet ajutage, sera donc très voisine de la dépense théorique : Castel trouve effectivement que, pour un angle de cône de 15°, elle en est les 0,94.

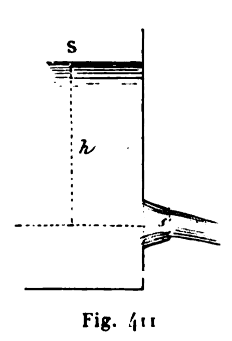


Fig. 411

Ajutage cylindrique. — Lorsque l'orifice est muni d'un ajutage cylindrique par lequel le liquide coule *à gueule bée*, la veine présente à sa sortie la forme d'un cylindre ayant pour base l'orifice s de l'ajutage. Comme d'ailleurs la pression atmosphérique en s s'exerce librement de même qu'à la surface libre S, il semble que, d'après le principe de Torricelli, on devrait avoir en s

$$v=\sqrt{2gh}$$

et par conséquent

$$Q=s\sqrt{2gh},$$

tandis que l'expérience donne

$$Q=0,82\,s\sqrt{2gh}.$$

C'est qu'alors, en effet, l'adhérence du liquide aux parois de l'ajutage modifie brusquement la direction des filets au delà de la sec-

contractée s' : ce changement brusque entraîne une perte de vive, et par suite une diminution de la dépense.

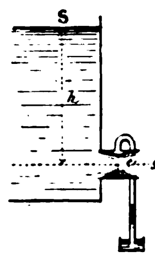


Fig. 412

De S en s' le théorème de Bernoulli est immédiatement applicable :

$$\frac{p_0}{\varpi}+h=\frac{v'^2}{2g}+\frac{p'}{\varpi};$$

de s' en s on a, d'après la règle de Borda,

$$\frac{v'^2}{2g}+\frac{p'}{\varpi}=\frac{v^2}{2g}+\frac{(v'-v)^2}{2g}+\frac{p_0}{\varpi};$$

d'où l'on tire

$$\frac{v^2}{2g}+\frac{(v'-v)^2}{2g}=h:$$

la vitesse à la sortie v est plus petite que la valeur théorique $\sqrt{2gh}$. Comme d'ailleurs on a toujours

$$sv=s'v',$$

si l'on suppose $s'=0,62\,s$, on aura

$$v'=1,61\,v,$$

d'où

$$(v'-v)^2=0,38\,v^2,$$

et par suite

$$v=0,85\sqrt{2gh},$$

quantité qui diffère peu de la valeur trouvée expérimentalement.

En s'

$$v' = 1{,}38\sqrt{2gh}.$$

L'accroissement de vitesse en s' entraîne une diminution de pression. La première équation

$$\frac{p'}{\varpi} = \frac{p_0}{\varpi} - \left(\frac{v'^2}{2g} - h\right)$$

donne en effet

$$\frac{p'}{\varpi} = \frac{p_0}{\varpi} - \left(\frac{(0{,}82)^2}{(0{,}62)^2} - 1\right)h,$$

ou

$$\frac{p'}{\varpi} = \frac{p_0}{\varpi} - 0{,}75\,h.$$

En adaptant à l'ajutage un tube qui se recourbait verticalement pour plonger dans un vase plein d'eau, Venturi a constaté en effet que l'eau montait dans ce tube et s'y tenait à une hauteur égale à $0{,}74\,h$. Il y a donc en s' une véritable succion, que l'on utilise dans les *trompes* et autres appareils aspirateurs, et que l'on peut encore augmenter en donnant à l'ajutage une forme conique divergente.

Ajutage conique divergent. — Si l'ajutage conique divergent

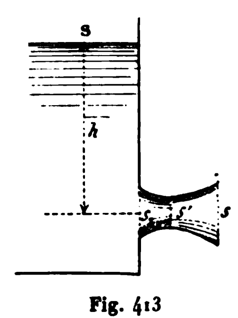


Fig. 413

s'élargit graduellement à partir de la section contractée, il n'y a pas de variation brusque de vitesse. On a donc en s

$$v = \sqrt{2gh},$$
$$Q = s\sqrt{2gh}.$$

On pourrait croire d'après cela qu'avec une ouverture donnée s_1,

laquelle correspond une section contractée constante $s' = 0,62\,s_1$, accroîtrait indéfiniment la dépense en augmentant indéfiniment la section de sortie s. Mais en même temps que cette section augmente et que, par suite, la vitesse v' en s' augmente elle-même, pression p' en s' diminue. Or, il faut que p' reste positif.

Appliquons le théorème de Bernoulli aux surfaces S, s' et s :

$$\frac{p_0}{\varpi} + h = \frac{p'}{\varpi} + \frac{v'^2}{2g} = \frac{p_0}{\varpi} + \frac{v^2}{2g}.$$

D'autre part, on a toujours

$$sv = s'v'.$$

De ces équations on tire d'abord

$$v^2 = 2gh,$$

puis

$$\frac{p'}{\varpi} = \frac{p_0}{\varpi} - \left(\frac{v'^2}{2g} - h\right)$$
$$= \frac{p_0}{\varpi} - h\left(\frac{s^2}{s'^2} - 1\right).$$

Pour que l'écoulement ait lieu comme nous l'avons supposé, il faut donc que les dimensions de l'ajutage satisfassent à la condition [1]

$$\frac{s}{s'} < \sqrt{1 + \frac{p_0}{\varpi h}}.$$

On a ainsi pour la dépense un maximum

$$Q_m = s'\sqrt{2gh + \frac{2gp_0}{\varpi}}.$$

Avec un ajutage conique, Venturi est parvenu à tripler la dépense qui aurait eu lieu sans cette disposition.

[1] Si la condition n'est pas remplie, le liquide se détachera de l'ajutage, qui deviendra dès lors inutile.

263. Écoulement par un tuyau. — Dans un tuyau d'u certaine longueur, les frottements que nous avons négligés j qu'ici ne peuvent plus être laissés de côté.

Comme nous le verrons bientôt, les lois de l'écoulement à tra les tuyaux cylindriques très étroits et parfaitement mouillés pu être établies d'une façon tout à fait satisfaisante tant par théorie (267) que par l'expérience (264).

Pour les tuyaux larges, la question est beaucoup plus comple et dans l'impossibilité de tenir un compte exact de tous les frot tements, on a dû chercher une représentation empirique de la rés tance totale qu'ils occasionnent. Des expériences nombreuses o montré que, pour une même vitesse du liquide, la résistance proportionnelle à l'étendue de la surface par laquelle le liqui touche le tuyau. Cette résistance varie d'ailleurs avec la vitesse, co trairement à ce que l'on observe dans le frottement des solides (180). On admet, d'après Coulomb, qu'on peut la représenter par la somme de deux termes, l'un proportionnel à la vitesse moyenne V, l'autre au carré V^2 de cette vitesse, la vitesse moyenne étant celle que devrait posséder le liquide s'écoulant d'un seul bloc pour donner le même débit que fournit l'écoulement réel avec des vitesses inégales aux différents points d'une même section. Si donc on appelle L la longueur du tuyau et c le contour de la surface mouillée s, la résistance due au frottement aura pour expression

$$cL\varpi(aV+bV^2).$$

Quand le mouvement uniforme est établi, la vitesse moyenne est la même en toute section du tuyau supposé cylindrique, et l'on a

$$\frac{p-p'}{\varpi}+z-z'-\frac{cL}{s}(aV+bV^2)=0.$$

A l'état statique, la pression p' au bout du tuyau serait égale à la pression p à l'origine, augmentée du poids de la colonne liquide $z-z'$. L'équation que nous venons d'écrire montre qu'à l'état dynamique le frottement amène une perte de charge égale à

$$\frac{cL}{s}(aV+bV^2).$$

perte est proportionnelle à la longueur. Les pressions à diverses
ıces de l'origine décroissent donc proportionnellement aux
ıces.

ur mesurer la pression en un point du tuyau, il suffit d'y
anter un tube de verre qui s'élève verticalement : la hauteur
[uelle l'eau montera dans ce tube donnera la pression au point
idéré (abstraction faite de la pression atmosphérique). En dis-

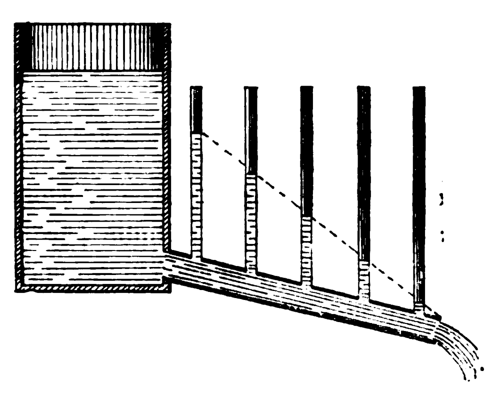


Fig. 414

posant ainsi une série de tubes le long du tuyau, on verra effectivement les extrémités des colonnes d'eau soulevées dans ces tubes s'aligner suivant une droite qui part d'un point situé un peu au-dessous de la surface libre du liquide dans le réservoir [1] pour aboutir à l'extrémité la plus éloignée du tuyau.

Si l'on néglige la perte à l'origine, la perte de charge par mètre courant est égale à la pente par mètre courant, I, calculée à raison de la différence des niveaux au réservoir et à l'orifice du tube,

$$I = \frac{c}{s}(aV + bV^2).$$

Dans le cas d'un canal circulaire plein, de diamètre D, on a

$$I = \frac{D}{4}(aV + bV^2),$$

[1] Le tuyau joue en effet par rapport au réservoir le rôle d'un ajutage cylindrique produisant une perte de force vive qui se traduit par un abaissement brusque de la charge, égal à $1{,}49\,\frac{v^2}{2g}$.

ou

$$\frac{DI}{4} = aV + bV^2,$$

équation qui, une fois les coefficients a et b déterminés expérimentalement [1], permettra de calculer la dépense $Q = \frac{\pi D^2 V}{4}$, et en général de résoudre tous les problèmes relatifs à l'écoulement de l'eau dans les tuyaux.

III. — ÉCOULEMENT PAR LES TUBES CAPILLAIRES.

264. Recherches de Poiseuille. — L'écoulement par les tubes capillaires a été soigneusement étudié par Poiseuille [2]. A travers le tube capillaire d, complètement immergé [3], il faisait passer, sous une pression connue, une quantité déterminée de liquide, mesurée entre les deux repères c et e d'une ampoule a soudée au tube; et il notait le temps nécessaire à ce passage pour diverses pressions et différentes longueurs et sections de tube. Les niveaux étaient relevés à une lunette l, mobile le long d'une règle verticale graduée r. La pression, donnée par une pompe à main, régularisée par un réservoir à air comprimé, et mesurée par un manomètre, était transmise par le tube m au vase en fuseau f, duquel se détachait latéralement le tube b, s'ouvrant dans l'ampoule a. Cette disposition avait pour but d'arrêter autant que possible les

(1) Il est à remarquer que a est toujours très petit. Si donc il ne s'agit pas d'écoulements très lents, la formule se réduit sensiblement à son deuxième terme. Darcy prend alors

$$DI = \left(\alpha + \frac{\beta}{D}\right)V^2,$$

et M. Bazin a adopté la même formule pour représenter l'écoulement de l'eau dans les canaux.

(2) Dr Poiseuille, *Mémoires des savants étrangers*, IX; 1846. Voir en outre le rapport de Regnault au nom de la Commission de l'Académie, chargée de contrôler les expériences de Poiseuille (C. R., XV ; 1842).

(3) Quand l'écoulement a lieu dans l'air, même sous une pression considérable, il ne se produit pas à plein jet, mais par gouttes successives; et les résultats obtenus dans deux expériences, en apparence identiques, sont différents.

poussières qui auraient pu s'engager dans le tube capillaire. Le renflement *k* limitait nettement l'entrée de ce tube, dont la lon-

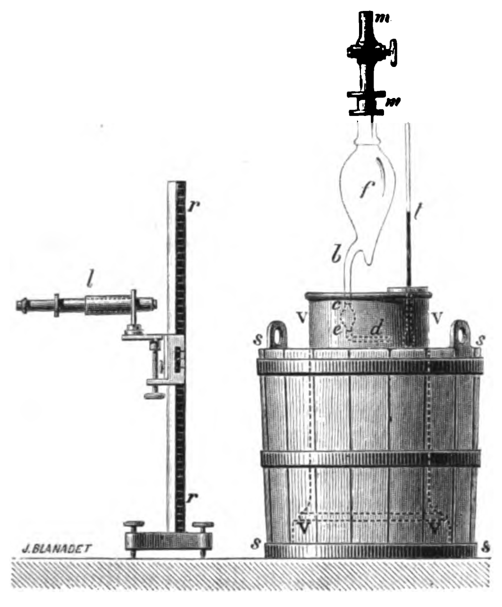


Fig. 415

gueur pouvait dès lors être exactement mesurée. Le vase V était placé dans un seau *s*; un thermomètre *t*, plongé dans le vase V

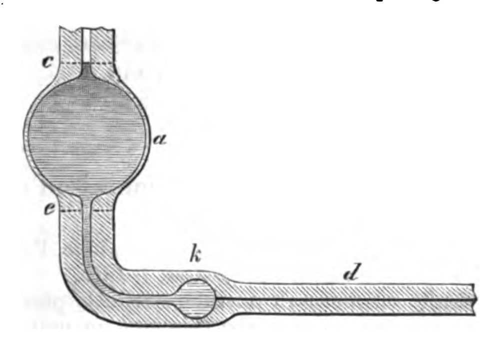


Fig. 416

en face de l'orifice du tube *d*, faisait connaître la température du liquide soumis à l'expérience.

Poiseuille établit d'abord que la quantité de liquide qui traverse un tube capillaire est, toutes choses égales d'ailleurs, proportion-

nelle à la pression (et non plus à la racine carrée de la pression comme dans le cas des tubes larges). Cette loi avait déjà été trouvée par Dubuat [1] et Girard [2] sur des tubes étroits, mais entre des limites de pression peu étendues; Poiseuille la démontra pour des pressions variant de 35 centimètres à 240 mètres d'eau. Nous rapporterons, par exemple, les expériences faites à la température de 10° sur le tube D″, large de 0mm,043739 [3], et long de 25mm,175 :

PRESSION en millimètres de mercure à 10°.	TEMPS employé à l'écoulement de 0cc,3629	
	observé.	calculé.
98mm,917	10149s	10128s
147 ,857	6789	6776
193 ,485	5178	5178
386 ,847	2589	2590
773 ,985	1293	1294

Poiseuille montra ensuite que le débit est en raison inverse de la longueur, comme les recherches antérieures l'indiquaient déjà. Ainsi, le tube D, réduit successivement à des longueurs de plus en plus petites, donna, sous la pression constante de 775 millimètres de mercure :

Tubes.	Longueur.	TEMPS Employé à l'écoulement de 0cc,3629		
		observé.	corrigé.	calculé.
D_1	150mm,15	6900s,8	6900s,8	6900s,8
D	100 ,30	4839,5	4593,0	4609,7
D′	50 ,225	2504,7	2437,9	2423,4
D″	25 ,175	1291,3	1249,0	1255,5
D‴	9 ,95	519,6	511,5	510,3
D^{IV}	3 ,35	175,3	175,0	174,9

L'avant-dernière colonne contient les nombres qu'eussent fournis

(1) Dubuat, *Principes d'hydraulique et de pyrodynamique*. Paris; 1779.

(2) Girard, *Mémoires de l'Académie des sciences*, I; 1816.

(3) A chaque extrémité on mesurait au microscope le plus grand et le plus petit diamètre, et regardant le tube comme elliptique, on prenait pour diamètre moyen la moyenne géométrique de ces deux mesures; la moyenne arithmétique des diamètres extrêmes ainsi déterminés fut considérée comme représentant le diamètre moyen du tube. Dans l'exemple cité on avait :

Extrémité libre... $\begin{cases} d = 0^{mm},0430 \\ D = 0\ \ ,0450 \end{cases}$

Extrémité opposée $\begin{cases} d = 0\ \ ,0425 \\ D = 0\ \ ,0445 \end{cases}$

s tubes D, D′, D″..., s'ils avaient eu respectivement les diamètres ιoyens des tubes D_1, D, D′...; de même, la dernière donne le temps e chaque expérience, calculé suivant la loi de la proportionnalité 'après celui de l'expérience qui précède immédiatement. Il faut bserver toutefois que la loi n'est vraie qu'à partir d'une cer-ιine longueur [1], d'autant plus considérable que le tube est plus ırge : pour un tube de 0^{mm},01 de diamètre, il suffit d'une longueur e quelques dixièmes de millimètre, tandis qu'avec un tube de ^{mm},5 de diamètre une longueur de 150 millimètres est nécessaire.

Comparant enfin les quantités de liquide écoulé dans des tubes le diamètre différent, mais de même longueur, sous la même pression et à la même température, Poiseuille a trouvé que ces quantités étaient en raison directe des quatrièmes puissances des diamètres. Cette relation porte particulièrement le nom de *loi de Poiseuille*, et l'appellation est parfaitement justifiée. Des deux seuls savants qui se soient occupés sérieusement de la question avant Poiseuille, l'un, Girard, avait annoncé que la dépense est proportionnelle au cube du rayon, l'autre, Hagen [2], par une interprétation ingénieuse mais arbitraire des résultats de quelques expériences effectuées sur des tubes trop larges et trop courts, avait indiqué la relation exacte, sans la démontrer. Les expériences de Poiseuille établirent péremptoirement la loi dans des limites étendues, comme le prouvent les nombres suivants, relatifs à une pression de 775 millimètres de mercure, à la température de 10°, à une durée d'écoulement de 500 secondes, et à une longueur de tube de 25 millimètres :

Tubes.	Diamètre moyen des tubes.	Débit observé.	Débit calculé.
M	0^{mm},013 949	1^{mmc},465	1^{mmc},465
E	0 ,029 380	28 ,826	28 ,808
D	0 ,043 738	141 ,50	141 ,63
C	0 ,085 492	2067 ,39	2066 ,93
B	0 ,113 400	6398 ,3	6389 ,2
A	0 ,141 600	15532	15547
F	0 ,652 170	6995870	6995870

[1] Au-dessous de cette limite, la proportionnalité à la pression ne subsiste pas non plus.

[2] Hagen, *Pogg. Ann.*, XLVI, 839; 1839.

Les nombres de la dernière colonne sont calculés d'après la loi de la quatrième puissance du diamètre, chacun au moyen de l'observation du tube qui suit immédiatement.

On a donc

$$Q = K\frac{PD^4}{L},$$

Q étant la quantité de liquide écoulé pendant l'unité de temps par un tube de longueur L et de diamètre D sous la pression P; K est une constante qui, pour l'eau à la température de 10°, est égale à $2495^{mmc},224$, l'unité de temps étant la seconde, l'unité de longueur le millimètre, et la pression étant exprimée en millimètres de mercure à 10°.

K croît rapidement avec la température : à 40° le débit est plus que double de ce qu'il était à 10°. Poiseuille trouve, entre 5° et 45°.

$$K_t = 1836,724(1 + 0,0336793t + 0,000220936t^2).$$

Le même savant a également étudié les mélanges d'eau et d'alcool, sur lesquels Girard avait déjà fait quelques expériences. Il a reconnu que l'alcool à 54°, $C^4H^6O^2+6HO$, pour lequel Rudberg avait constaté le maximum de contraction, coule plus lentement que tous les autres; en deçà et au delà, la vitesse augmente, mais inégalement des deux côtés, l'alcool absolu coulant moins vite que l'eau. Dans une expérience où l'eau s'était écoulée en 523 secondes. l'écoulement d'alcool pur a duré 682 secondes, et celui du mélange précité 1731 secondes.

Graham (¹) étendit à divers hydrates $SO^3,2HO$; $AzO^5,4HO$; $C^4H^3O^3,3HO$ (²); $C^6H^8C^6,18HO$, etc., le fait observé par Poiseuille; et. ayant mesuré les durées d'écoulement d'un grand nombre de composés organiques, il conclut que « pour les corps homologues, la place de chaque substance dans la série semble pouvoir être assignée aussi nettement d'après son coefficient d'écoulement que d'après sa vola-

(¹) GRAHAM, *Phil. Trans.*; 1861; et *Ann. de chim. et de phys.* (4), I, 129; 1864.

(²) D'après M. Vijkander, l'hydrate d'acide acétique pour lequel a lieu le maximum dépend de la température (VIJKANDER, *Lunds Physiogr. Sällsk. Jubelskrift;* 1878; et *Beiblätter*, III, 18; 1879).

ilité comparative. » M. Hagenbach ([1]) avait déjà proposé d'attribuer ι chaque substance, sous le nom de *viscosité*, un coefficient constant, proportionnel à la durée d'écoulement à travers un tube capillaire.

La détermination de ce coefficient, plus exactement nommé *coefficient de frottement intérieur* ([2]), donne une importance particulière à l'écoulement des liquides à travers les tubes capillaires (267). Aussi les expériences à ce sujet ont-elles été nombreuses; nous citerons seulement celles de M. Roiti ([3]) : il releva photographiquement la marche du ménisque inférieur d'une colonne d'eau qui descendait dans un tube capillaire vertical, et il put ainsi vérifier, les lois relatives à la pression et à la longueur jusque sur des tubes de 4^{mm},11 de diamètre.

De l'ensemble de ces recherches il résulte que la loi de Poiseuille est vraie d'une manière très générale. D'après M. Warburg ([4]) et M. Villari ([5]), le mercure lui-même y obéit sensiblement.

265. Écoulement à travers les espaces capillaires. — Les lois de l'écoulement restent les mêmes au travers des espaces capillaires, que ceux-ci soient fournis par une pipette Salleron à obturateur conique (Duclaux), par des plaques poreuses (Duclaux) ([6]), par des couches filtrantes (Brunhes) ([7]), ou par des membranes animales (Schmidt) ([8]). Il est particulièrement intéressant de noter que la *filtration*, dans toutes ses circonstances, est un phénomène exactement comparable à l'écoulement de l'eau à travers un tube capillaire ([9]).

([1]) Hagenbach, *Pogg. Ann.*, CIX, 385 ; 1860.

([2]) Nous venons de voir en effet que l'alcool coule à travers un tube capillaire plus lentement que l'eau : la durée d'écoulement ne mesure donc pas la *viscosité* au sens habituel du mot.

([3]) Roiti, *Nuovo Cimento*, III ; 1870.

([4]) Warburg, *Pogg. Ann.*, CXL, 367 ; 1870.

([5]) Villari, *Memorie dell' Accademia di Bologna* (3), IV ; et *Journal de physique*, VI, 63 ; 1877.

([6]) Duclaux, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XXV, 433 ; 1872.

([7]) Brunhes, *Sur le passage des liquides à travers les substances perméables et les couches filtrantes* (Thèse). Toulouse ; 1881.

([8]) Schmidt, *Pogg. Ann.*, XCIX, 337 ; 1856.

([9]) Relativement aux membranes il faut toutefois remarquer que la quantité de liquide écoulé est proportionnelle à $P - a$, P étant la pression employée et a la pression limite sous laquelle la membrane, imperméable dans les conditions ordinaires, laisse transsuder le liquide.

Malgré cette identité de loi, quand on détermine les durées d'écoulement relatives des divers liquides dans ces différentes conditions, ainsi que l'a fait M. Duclaux, on ne trouve pas des résultats identiques. Il faut donc admettre une influence de la paroi sur la vitesse d'écoulement. Cette influence paraît tenir à l'épaisseur variable de la couche liquide adhérente au solide, épaisseur qui dépend à la fois des deux corps en présence.

Épaisseur de la couche liquide adhérente à une paroi mouillée. — Pour montrer que, quand un liquide circule dans un espace capillaire, il y a une couche immobile adhérente à la paroi, M. Duclaux prend un thermomètre à alcool coloré, amène à la partie supérieure de la colonne un peu d'alcool incolore, et chauffe le réservoir : on voit alors un jet d'alcool coloré percer, à la façon d'une vrille, la couche incolore, la traverser complètement, et venir s'étaler à la surface.

En mesurant à diverses reprises la longueur d'un index liquide, promené dans un tube qu'il mouille, on peut calculer le volume étalé sur les parois. M. Duclaux trouve ainsi pour l'épaisseur de la couche adhérente [1] :

Liquides.	Épaisseur.
Eau	0$^{\mu}$,50
Alcool à 90	0,64
à 50	0,76
Éther	0,25
SO^3, HO	2,13
2HO	2,82
3HO	1,22
4HO	0,85
Glycérine	4,88
Huile d'olive	3,44

Sans attacher à ces nombres une rigueur qu'ils ne sauraient avoir, on voit que, dans les espaces capillaires très étroits, l'in-

(1) Cf. PLATEAU, à propos des expériences de M. Bède, *Mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles*, XXV; 1853.

ıence de la couche immobile peut devenir sensible. C'est ce ıe l'on reconnaît très aisément avec la pipette Salleron, ouverte nperceptiblement : les durées relatives d'écoulement des divers quides sont complètement différentes de celles qui se rapportent ıx tubes capillaires ordinaires.

CHAPITRE VI

FROTTEMENT INTÉRIEUR

266. Frottement intérieur. — Lorsque dans un liquide en mouvement deux couches contiguës se meuvent avec des vitesses différentes, il se développe entre elles, par suite de leur action réciproque, une résistance qui, de même que le frottement des solides, tend à égaliser les vitesses des surfaces en contact.

Cette résistance, ou *frottement intérieur*, est proportionnelle à l'étendue des surfaces frottantes. Elle croît avec la vitesse. Dès lors, la différence de vitesse de deux couches contiguës étant nécessairement fort petite, il est naturel de considérer leur frottement comme proportionnel à cette différence. Si donc on appelle s la surface de contact de deux couches contiguës, dv la différence de leurs vitesses, le frottement intérieur pourra se représenter par

$$k_1 = c_1 s dv,$$

c_1 étant un certain coefficient dépendant du liquide, extrêmement grand, et d'ailleurs aussi complètement inconnu que la distance de deux couches contiguës. Mais la vitesse v d'une couche étant une fonction de la distance x de cette couche à une couche fixe donnée, on a

$$dv = \frac{dv}{dx} dx :$$

on peut donc écrire

$$k_1 = c_1 dx\, s \frac{dv}{dx},$$

ou

$$k_1 = \eta s \frac{dv}{dx}$$

étant encore un coefficient caractéristique du liquide, puisque la distance dx de deux couches contiguës est, comme c_1, une quantité déterminée pour chaque liquide; mais ce coefficient η sera de grandeur convenable, et directement accessible à l'expérience.

267. Écoulement par les tuyaux capillaires (¹). — Considérons par exemple un liquide en mouvement permanent dans un tuyau qu'il mouille. Si le tuyau est très étroit, le mouvement ne s'opère que parallèlement à l'axe. Le liquide, suivant la conception fondamentale de Navier (²), se partage en couches cylindriques, s'emboîtant les unes les autres, et dont chacune se meut sur toute sa longueur avec une même vitesse, variable d'une couche à l'autre, depuis la vitesse nulle de la couche adhérente à la paroi jusqu'à un maximum correspondant au filet axial. Chaque couche subit donc deux frottements, dont l'un, agissant sur sa face externe, tend à ralentir son mouvement, et dont l'autre, sur sa face interne, tend à l'accélérer; mais le premier frottement l'emporte sur le second, et, somme toute, la couche est soumise à une force retardatrice, qui équilibre exactement la force accélératrice quand le régime permanent est atteint. Écrivons que cet équilibre a lieu.

Dans une couche de rayon r, d'épaisseur dr, animée sur toute sa longueur d'une vitesse v, considérons à une distance l de l'origine un tronçon de longueur dl. Si p désigne la pression hydraulique en l, à l'extrémité $l + dl$ elle est $p + dp$ ou $p + \frac{dp}{dl}\,dl$, et comme la base du tronçon est $2\pi r\,dr$, la force accélératrice est

$$2\pi r \frac{dp}{dl}\,dr\,dl.$$

La force retardatrice est la différence des deux frottements, $\eta 2\pi r dl \frac{dv}{dr}$ sur la face interne, et $\eta \pi 2\,(r + dr)\,dl \left(\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2}dr\right)$ sur la face externe,

$$\eta 2\pi \left(\frac{dv}{dr} + r\frac{d^2v}{dr^2}\right)dr\,dl.$$

(¹) Voir Hagenbach, *loc. cit.*; Stefan, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien*; 1862; Mathieu, C. R., LVII, 320; 1863; et Boussinesq, C. R., LXVII, 219, et *Journal de Liouville*, XIII, 377; 1868.

(²) Navier, *Mémoires de l'Académie des sciences*, VI; 1823.

Pour que le mouvement soit uniforme, il faut que l'on ait

$$\frac{dp}{dl}=\eta\left(\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right)$$

De cette équation ressort immédiatement une relation important touchant p. La pression en effet est fonction de la distance seulement, et le deuxième membre de l'équation ne contient pas l : p est donc une fonction linéaire de l,

$$p=a+bl.$$

Les constantes a et b sont définies par les conditions relatives aux extrémités : pour $l=0$, $p=p_0$; pour $l=L$, $p=0$, si l'on fait abstraction de la pression atmosphérique à l'extrémité du tube comme sur la surface du liquide contenu dans le vase. On a donc

$$p=p_0\left(1-\frac{l}{L}\right);$$

en d'autres termes, les pressions décroissent linéairement depuis la pression à l'origine, p_0, due à la hauteur du liquide dans le vase, jusqu'à zéro à l'extrémité du tube. L'expérience vérifie exactement cette première déduction des calculs.

Par suite de cette valeur de p, la relation fondamentale devient

$$-\frac{p_0}{L}=\eta\left(\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dv}{dr}\right),$$

équation qui, par deux intégrations successives, donne d'abord

$$\beta-\frac{p_0}{2\eta L}r^2=r\frac{dv}{dr},$$

puis

$$v=\alpha+\beta\,\mathrm{Log}\,r-\frac{p_0}{4\eta L}r^2,$$

α et β étant les deux constantes d'intégration.

Pour $r=0$, on a la vitesse suivant l'axe, laquelle n'est pas infinie;

nc $\beta = 0$. Pour $r = R$, c'est-à-dire contre la paroi, $v = 0$ si le liquide mouille parfaitement : $0 = \alpha - \frac{p_0}{4\eta L} R^2$. On a donc

$$v = \frac{p_0}{4\eta L}(R^2 - r^2):$$

la vitesse aux différents points d'une même section droite varie comme les ordonnées d'une parabole, ainsi que l'avait indiqué M. Hagenbach. La formule montre déjà les lois de la proportionnalité directe à la charge et de la proportionnalité inverse à la longueur, établies par Poiseuille. La troisième loi n'apparaît pas immédiatement, parce que nous avons ici la vitesse d'une couche cylindrique, et que le débit Q se rapporte à la vitesse moyenne V

$$\begin{aligned} Q = \pi R^2 V &= \int_0^R 2\pi r dr . v \\ &= \frac{\pi p_0}{2\eta L} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr \\ &= \frac{\pi p_0}{8\eta L} R^4, \end{aligned}$$

ou

$$Q = \frac{\pi p_0}{128 \eta L} D^4.$$

La loi de Poiseuille se retrouve ainsi, et par là est vérifiée l'hypothèse dont nous sommes partis, à savoir que le frottement est proportionnel à la différence des vitesses des couches frottantes [1].

[1] En même temps se trouve vérifiée une fois de plus l'existence d'une gaine liquide, immobilisée contre les parois d'un tube parfaitement mouillé. Si, en effet, la vitesse contre la paroi n'avait pas été nulle, si la couche extérieure avait possédé une vitesse v, et par suite avait subi de la paroi un frottement

$$k = csv,$$

on aurait eu

$$\alpha = \frac{p_0}{4\eta L} R^2 \left(1 - \frac{2\eta p_0}{cR}\right),$$

et par conséquent

$$v = \frac{p_0}{4\eta L}(R^2 - r^2) + \frac{p_0}{2cl} R,$$

d'où

$$Q = \frac{\pi p_0}{128 \eta L}\left(D^4 + 8\frac{\eta}{c} D^3\right).$$

En comparant cette formule à celle qui résumait les expériences de Poiseuille, on a

$$K = \frac{\pi}{128\eta},$$

d'où

$$\eta = \frac{\pi}{128 K}.$$

Nous avions pour l'eau $K_0 = 1836^{mmc},724$, l'unité de temps étant la seconde et l'unité de longueur le millimètre, l'unité de pression étant par suite représentée par 1 millimètre de mercure. Si nous prenons pour unité de longueur le centimètre, et si nous évaluons la pression en dynes, en remarquant que la pression de 1 millimètre de mercure sur 1 centimètre carré représente $1^g,359$ ou $1,359 \times 981 = 1333$ dynes, nous aurons

$$K_0 = \frac{1836,724}{1333} = 1^{cc},3777,$$

d'où, en unités C. G. S.,

$$\eta_0 = 0,01782\ (^1).$$

A une température quelconque t, on a

$$\eta = \frac{0,01782}{1 + 0,0336793\,t + 0,000220936\,t^2}.$$

268. Méthode de Coulomb (²). — On peut encore déterminer le frottement intérieur d'un liquide par une autre méthode, due à Coulomb, et fondée sur la résistance qu'éprouve le mouvement d'un

(¹) Si, comme on l'a fait souvent dans ces études, on prend pour unité de force le gramme (poids) au lieu de la dyne, η est représenté par un nombre 981 fois plus petit

$$\eta = 0,00001816.$$

(²) COULOMB, *Mémoires de l'Institut national : sciences mathématiques et physiques*, III, 246 ; an IX (1802).

isque D, oscillant horizontalement dans le liquide sous l'influence e la torsion du fil F qui le supporte (¹).

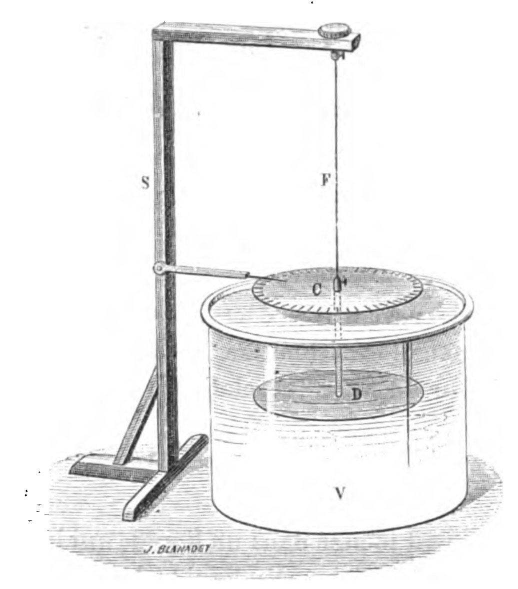


Fig. 417

Si le disque, suspendu à un fil parfaitement élastique, oscillait dans le vide, l'équation du mouvement serait (156)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{T}{Q}\theta=0, \qquad (1)$$

θ étant l'angle d'écart à l'époque t, Q le moment d'inertie du système, et T la constante de la torsion ; la durée d'une demi-oscillation serait alors

$$\tau=\pi\sqrt{\frac{Q}{T}}. \qquad (2)$$

Mais le fil, n'étant jamais parfaitement élastique, oppose au mou-

(¹) Déjà Newton et après lui divers géomètres avaient cherché à évaluer la résistance des fluides au moyen du décroissement des élongations successives d'un pendule oscillant dans un milieu résistant. Mais ce procédé, limité aux petites oscillations, présente de grandes difficultés expérimentales.

vement une résistance $2\varepsilon\frac{d\theta}{dt}$, de sorte que l'équation du mouvement devient (160)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\varepsilon\frac{d\theta}{dt}+\frac{T}{Q}\theta=0. \qquad (3)$$

Les oscillations restent isochrones, la durée étant

$$\tau=\pi\sqrt{\frac{Q}{T-Q\varepsilon^2}}; \qquad (4)$$

mais les amplitudes successives décroissent en progression *géométrique*, le décrément logarithmique Λ étant lié au coefficient de frottement intérieur du fil par la relation

$$\Lambda=\varepsilon\tau. \qquad (5)$$

Quand le disque est plongé dans un liquide qui le mouille parfaitement, le frottement intérieur du liquide donne lieu à une perturbation plus complexe. A chacune des faces du disque adhère une couche liquide qui frotte contre la couche contiguë. Or, si nous supposons le liquide partagé en couches parallèles au disque, un élément ds de la couche située à la distance x subit de la part de la couche immédiatement suivante un frottement $\eta\, ds\frac{dv}{dx}$, dv étant la différence des vitesses des deux couches distantes de dx. Si nous désignons par ψ la vitesse angulaire de l'élément, par r sa distance à l'axe de rotation, le moment, relativement à l'axe, du frottement supporté par l'élément annulaire $2\pi r dr$ aura pour expression $2\pi\eta r^3 dr\left(\frac{d\psi}{dx}\right)$. Le moment du frottement subi par le disque sur l'ensemble de ses deux faces sera par conséquent

$$\int_0^R 4\pi\eta r^3 dr\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=0}=\pi R^4\eta\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=0};$$

ce moment est proportionnel à la quatrième puissance du rayon, comme l'avait reconnu Coulomb.

L'équation du mouvement du disque est donc, abstraction faite la résistance provenant du fil,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{T}{Q}\theta+\frac{\pi R^4\eta}{Q}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=0}=0. \tag{6}$$

Pour calculer $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{x=0}$, revenons à l'élément liquide ds; la dif- érence des frottements que cet élément subit sur ses deux faces st $\eta\frac{d^2v}{dx^2}$; on a donc, en désignant par ρ la densité du liquide,

$$\rho\frac{dv}{dt}=\eta\frac{d^2v}{dx^2},$$

ou

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{\eta}{\rho}\frac{d^2\psi}{dx^2}. \tag{7}$$

Si nous nous bornons à des déplacements du disque restreints et lents, les seuls à considérer pour l'expérience, nous pourrons, avec Stokes [1], poser pour la vitesse angulaire du disque

$$\frac{d\theta}{dt}=c\sin nt, \tag{8}$$

et pour la vitesse angulaire de l'élément ds du liquide

$$\psi=X_1\sin nt+X_2\cos nt, \tag{9}$$

X_1 et X_2 étant des fonctions de x, que la substitution de cette expression (9) dans l'équation (7) montre devoir satisfaire aux conditions

$$nX_1=\frac{\eta}{\rho}\frac{d^2X_2}{dx^2}, \tag{10}$$

$$nX_2=-\frac{\eta}{\rho}\frac{d^2X_1}{dx^2}=-\frac{\eta^2}{n\rho^2}\frac{d^4X_2}{dx^4}. \tag{11}$$

(1) Stokes, *Cambridge Phil. Trans.*, IX, part II; 1851

De cette dernière relation on tire

$$X_2 = e^{-\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x}\left(A\sin\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x + B\cos\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x\right) + e^{\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x}\left(C\sin\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x + D\cos\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x\right),$$

A, B, C, D étant quatre constantes dont nous voyons immédiatemen que les deux dernières doivent être nulles, X_2 ne pouvant pas devenir infini pour $x = \infty$; on a donc simplement

$$X_2 = e^{-\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x}\left(A\sin\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x + B\cos\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x\right),$$

et par suite, d'après l'équation (10),

$$X_1 = -e^{-\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x}\left(A\cos\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x - B\sin\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x\right).$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (9), il vient

$$\psi = e^{-\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x}\left\{-A\sin\left(nt - \sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x\right) + B\cos\left(nt - \sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x\right)\right\};$$

mais pour $x = 0$, on doit avoir $\psi = \frac{d\theta}{dt}$; l'expression de ψ se réduit donc finalement à

$$\psi = ce^{-\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x}\sin\left(nt - \sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}x\right).$$

On en conclut, en valeur absolue,

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=0} = c\sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}(\sin nt + \cos nt),$$

1, d'après l'équation (8),

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x=0} = \sqrt{\frac{n\rho}{2\eta}}\left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{n}\frac{d^2\theta}{dt^2}\right).$$

L'équation (6) devient donc en conséquence

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\pi R^4\sqrt{\frac{n\eta\rho}{2}}}{Q+\pi R^4\sqrt{\frac{\eta\rho}{2n}}}\frac{d\theta}{dt} + \frac{T}{Q+\pi R^4\sqrt{\frac{\eta\rho}{2n}}}\theta = 0.$$

Le frottement intérieur du liquide a donc pour effet, non seulement de diminuer l'amplitude comme le faisait le frottement intérieur du fil, mais encore d'augmenter l'inertie du système. Si nous laissons de côté cet accroissement de l'inertie dans le coefficient de $\frac{d\theta}{dt}$, en d'autres termes, si nous négligeons les puissances supérieures de η, nous avons, d'après l'équation (5), en remarquant que $n=\frac{\pi}{\tau}$,

$$\Lambda = \frac{\pi R^4}{2Q}\sqrt{\frac{\pi}{2}\tau\eta\rho}.$$

Pour tenir compte de la résistance du fil, on opérera successivement dans l'air et dans l'eau, on mesurera les décréments logarithmiques Λ_0 et Λ correspondant aux deux cas, et comme le produit $\eta_0\rho_0$ relatif à l'air est très faible si on le compare au produit $\eta\rho$ se rapportant à l'eau, la formule

$$\Lambda - \Lambda_0 = \frac{\pi R^4}{2Q}\sqrt{\frac{\pi}{2}\tau\eta\rho}$$

donnera η.

Cette méthode, développée spécialement par O.-E. Meyer ([1]), lui a fait trouver pour l'eau à diverses températures des nombres sen-

([1]) O.-E. Meyer, *Crelle's Journal*, LIX, 229 ; et *Pogg. Ann.*, CXIII, 55, 193 et 383 ; 1861. Voir aussi Grotrian, *Pogg. Ann.*, CLVII et CLIX; 1876; et *Wied.*, *Ann.*, VIII; 1879.

siblement d'accord avec ceux de Poiseuille (un peu plus grands, dans le rapport de 1,16 à 1 environ).

269. Coefficients de frottement intérieur de quelques liquides. — Le tableau suivant renferme les coefficients de frottement intérieur η, déterminés par divers observateurs à différentes températures t, et exprimés en unités C. G. S.

Liquides.	t.	η.	Observateurs.
Eau	0°	0,017 82	Poiseuille.
»	10	0,013 10	
»	20	0,010 09	
»	30	0,008 05	
Mercure	17,2	0,016 02	Warburg.
Alcool méthylique	10	0,006 94	Rellstab (1).
» éthylique	10	0,015 26	
» propylique	10	0,019 93	
» butylique	10	0,037 97	
Glycérine	2,8	42,20	Schöttner (2).
»	8,1	25,18	
»	20,0	8,30	
»	26,5	4,94	
Poix	7	$22,06 \times 10^8$	Obermayer (3).
Storax	15	$13,44 \times 10^{10}$	

(1) RELLSTAB, *Inaugural Dissertation*. Bohn; 1868.

(2) SCHÖTTNER, *Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien*, LXXVII, 61; 1878. (Mesures obtenues par la chute d'un poids.)

(3) OBERMAYER, *Wien. Anz.*, 90, et *Beiblätter*, I, 336; 1877. Pour justifier le classement de substances telles que la poix ou le storax parmi les liquides, Obermayer place sur une gouttière un morceau de poix; au fond de la gouttière il met un bouchon de liège, et par dessus la poix un caillou. Au bout de quelques jours, la poix a coulé dans la gouttière contre laquelle elle s'est moulée exactement, le caillou est tombé au fond, et le bouchon est venu surnager à la surface : l'équilibre s'est établi suivant les lois ordinaires de l'hydrostatique.

LIVRE IV

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES GAZ

CHAPITRE PREMIER

ÉQUILIBRE DES GAZ

I. — BAROMÈTRE.

270. Pesanteur de l'air. — Aristote regardait l'air comme pesant; il avait même essayé de le peser. Mais, d'après sa fameuse théorie des éléments absolument lourds et absolument légers, l'air ne pouvant pas être lourd relativement à l'eau et par conséquent ne pouvant pas exercer de pression sur l'eau, il ne vit pas l'une des conséquences les plus importantes de la pesanteur de l'air. Des idées d'Aristote, on ne retint que ses objections à Démocrite et aux atomistes contre leur théorie du vide; et, tirant de là des conséquences qu'il n'avait pas exprimées, on enseignait partout dans les écoles du moyen âge qu'il n'y a pas de vide dans la nature et qu'il ne peut pas y en avoir, la nature sachant toujours, par quelque moyen, empêcher ce vide, dont elle a horreur parce qu'il amènerait sa destruction.

Galilée, dans ses *Dialogues des sciences nouvelles* (1re *journée*), établit la pesanteur de l'air en montrant l'accroissement de poids que reçoit un vase dans lequel de l'air est comprimé. Cette expérience fondamentale se répète dans les cours sous une forme en quelque sorte inverse, due à l'inventeur de la machine pneuma-

tique, et qui est d'une exécution plus facile. Dans un grand ballon en verre, dont le col porte une garniture métallique munie d'un robinet et pouvant se visser sur la platine de la machine pneumatique, on fait le vide aussi complètement que possible; on ferme le

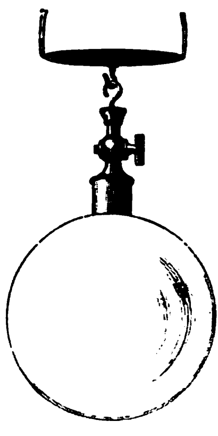


Fig. 418

robinet, on sépare le ballon de la machine, et on l'accroche sous l'un des plateaux d'une balance. De l'autre côté on met de la tare jusqu'à ce que l'équilibre soit établi. On ouvre alors le robinet du ballon : l'air entre en sifflant, et l'inclinaison du fléau montre que le ballon a augmenté de poids. Quant à la valeur exacte de cette augmentation (environ $1^{g},3$ par litre d'air rentré), elle ne peut s'obtenir qu'avec des précautions sur lesquelles nous reviendrons quand nous nous occuperons de mesurer les densités des gaz.

Dans le même ouvrage, Galilée, sans aller cependant jusqu'à une affirmation catégorique, laisse entendre que la nature pourrait bien ne pas avoir d'horreur pour le vide; et il appelle l'attention sur ce fait, qui lui a été signalé par le maître fontainier de Florence, « qu'il n'est pas possible, ni avec les pompes ni avec les autres machines élevant l'eau par attraction, de la faire monter un cheveu plus haut que 18 brasses (un peu plus de 10^{m}) ». Après avoir comparé la rupture de la colonne d'eau à celle d'une corde ou d'une verge se brisant par son propre poids, il ajoute : « Il en arriverait de même, à mon avis, pour d'autres liquides, comme le vif-argent, le vin, l'huile, etc. Ils se briseraient à une hauteur plus ou moins

rande que 18 brasses, en proportion inverse de leur pesanteur pécifique comparée à celle de l'eau, ces hauteurs étant toujours nesurées perpendiculairement. »

271. Expérience de Torricelli (¹). — Torricelli, réfléchissant ur ce passage de Galilée, comprit ce que son maître n'avait pas lit expressément, qu'au delà de 18 brasses, si l'on tirait encore le piston, il devait y avoir un espace vide entre la surface inférieure

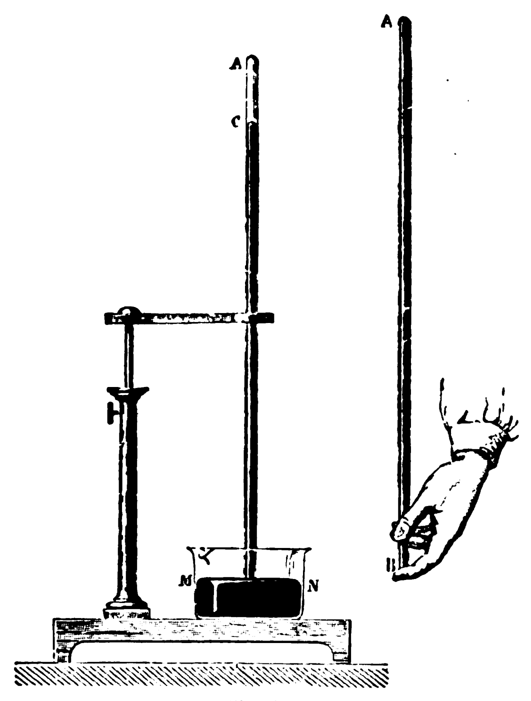


Fig. 419

du piston et la surface supérieure de l'eau ; et il pensa qu'en prenant, suivant l'indication de Galilée, du vif-argent au lieu d'eau, on pourrait produire ce vide dans un tube de verre plus commodément qu'avec de l'eau dans une pompe. En conséquence, Torricelli prit un tube de verre AB un peu long (80 centimètres), fermé à l'une de ses extrémités A et ouvert à l'autre B. Il le remplit de

(¹) Pour l'histoire de cette expérience, voir Thurot, *Journal de physique*, I, 171; 1872.

mercure et, le fermant avec le doigt, il le retourna sur une cuvette MN, pleine de mercure : le liquide se maintint dans le tube à environ 76 centimètres de hauteur au-dessus du niveau du mercure dans la cuvette. Au-dessus du mercure était un espace AC, vide de toute matière connue.

Par cette expérience, Torricelli montra donc la possibilité de faire le vide dans un espace déterminé. En outre, il eut la gloire de comprendre que la cause qui soutient le mercure dans le tube est le poids de l'air extérieur. « Nous vivons submergés au fond d'un océan d'air, et nous savons par des expériences indubitables que l'air est pesant. Sur la surface du liquide qui est dans le bassin pèse une quantité d'air qui a 50 milles de hauteur. Est-il étonnant que le vif-argent, qui n'a ni inclination ni répugnance pour le tube AB, y entre et s'y élève jusqu'à ce qu'il fasse équilibre au poids de l'air qui le pousse? » C'est ainsi que s'exprimait Torricelli dans sa lettre à Ricci, en date du 11 juin 1644 ; cette lettre est la première donnée chronologique que nous ayons sur l'expérience de Torricelli, sur cette expérience qu'il a « imaginée, dit-il encore, non pas pour faire simplement le vide, mais pour avoir un instrument qui pût indiquer les changements de l'air, tantôt plus lourd et plus épais, tantôt plus léger et plus subtil. »

272. Expériences de Pascal [1]. — En 1646, Pascal eut connaissance des expériences de Torricelli par le P. Mersenne, de l'ordre des Minimes, qui en tenait le détail de Ricci, et qui avait même eu l'occasion de se faire montrer par Torricelli à Florence les tubes qui lui avaient servi. Mais le P. Mersenne qui, comme Ricci, ne voyait sans doute dans cette expérience qu'une preuve de l'existence du vide, ne dit rien à Pascal de la pesanteur de l'air.

Répétition de l'expérience de Torricelli. — Pascal répéta aussitôt l'expérience de Torricelli et la varia en employant divers liquides [2]:

(1) PASCAL, *Expériences touchant le vide*, faites dans des tuyaux, seringues, soufflets et siphons de plusieurs longueurs et figures, avec diverses liqueurs, comme vif-argent, eau, vin, huile, air, etc.; avec un discours sur le même sujet où est montré qu'un vaisseau si grand qu'on pourra le faire peut être rendu vide de toutes les matières connues en la nature et qui tombent sous nos sens, et quelle force est nécessaire pour faire admettre ce vide. Paris; 1647.

(2) Voir encore THUROT, *Journal de physique*, I, 267; 1872.

es expériences, faites sur la place de la Vénerie à Rouen, « en pré-ence de plus de cinq cents personnes de toutes conditions », eurent un grand retentissement. Mais Pascal n'aperçut point la véritable cause du phénomène; il tient alors pour maximes : « que tous les corps ont de la répugnance à se séparer l'un de l'autre, et à admettre le vide apparent dans leur intervalle, c'est-à-dire que la nature abhorre ce vide apparent; — que cette horreur ou cette répugnance qu'ont tous les corps n'est pas plus grande pour admettre un grand vide apparent qu'un petit; — que la force de cette horreur est limitée, et pareille à celle avec laquelle de l'eau d'une certaine hauteur, qui est environ de 31 pieds, tend pour couler en bas (¹). »

Le P. Noël, jésuite, recteur du collège de Clermont, soutint contre Pascal que l'espace, vide en apparence, devait être rempli de quelque matière. Il composa même à ce sujet un traité intitulé « *Le plein du vide* », dont la dédicace au prince de Conti est un spécimen curieux du style de l'école à cette époque.

Expérience du Puy-de-Dôme. — Cependant Pascal est « averti d'une très belle pensée qu'eut Torricelli touchant la cause de tous les effets qu'on a jusqu'à présent attribués à l'horreur du vide (²). » Le P. Mersenne vient en effet de lui communiquer cette idée que la pesanteur de l'air est cause de la suspension du mercure dans le tube. En même temps, Pascal reçoit de Descartes une longue visite (³) sur l'influence de laquelle il est assez difficile de se prononcer : d'une part, en effet, silence absolu de Pascal sur toute intervention de Descartes ; d'autre part, réclamation de Descartes (⁴), qui dit

(¹) PASCAL, *Nouvelles expériences touchant le vide*. Paris ; 1648.

(²) PASCAL, Lettre à M. de Ribeyre, du 12 juillet 1651.

(³) JACQUELINE PASCAL, Lettre du 25 septembre 1647 (Cousin, *Jacqueline Pascal*, p. 93).

(⁴) Descartes, qui avait fondé sa physique sur des principes purement mécaniques, ne pouvait admettre l'horreur de la nature pour le vide. Aussi, à propos de l'observation que les pompes ne tirent point l'eau au-dessus de 18 brasses, écrivait-il au P. Mersenne, le 8 octobre 1638 : « (ce fait) ne se doit point rapporter au vide, mais ou à la matière des pompes, ou à celle de l'eau même qui s'écoule entre la pompe et le tuyau plutôt que de s'élever plus haut, ou même à la pesanteur de l'eau qui contre-balance celle de l'air. » Ainsi, dès cette époque Descartes touche la véritable explication, mais sans la saisir. Ce n'était même pas la première fois qu'elle se présentait à son esprit. M. Nourrisson a communiqué à l'Académie des sciences morales et politiques (5 mars 1881) une lettre de Descartes, datée de 1631, où il parle de la suspension du mercure dans un tuyau fermé, et l'attribue à la pression de l'air.

avoir « avisé » Pascal de répéter l'expérience de Torricelli au sommet d'une montagne (1), et l'avoir « assuré du succès, comme étant entièrement conforme (à ses principes), sans quoi (Pascal) n'eût eu garde d'y penser à cause qu'il était d'une opinion contraire (2). » Quoi qu'il en soit de la part qui peut revenir à Descartes dans l'expérience du Puy-de-Dôme, cette expérience est dès lors résolue dans l'esprit de Pascal, qui écrit, le 15 novembre 1647, à son beau-frère Périer, conseiller à la cour des aides d'Auvergne : « Je travaille maintenant à examiner la vérité de (cette proposition) ; savoir, que la nature abhorre le vide, et à chercher des expériences qui fassent voir si les effets que l'on attribue à l'horreur du vide, doivent être véritablement attribués à cette horreur du vide ou s'ils doivent l'être à la pesanteur et pression de l'air... J'en ai imaginé une qui pourra seule suffire pour nous donner la lumière que nous cherchons, si elle peut être exécutée avec justesse. C'est de faire l'expérience ordinaire du vide plusieurs fois en un même jour, dans un même tuyau, avec le même vif-argent, tantôt en bas et tantôt au sommet d'une montagne élevée pour le moins de cinq ou six cents toises, pour éprouver si la hauteur du vif-argent suspendu dans le tuyau se trouvera pareille ou différente dans ces deux situations. Et, s'il arrive que la hauteur du vif-argent soit moindre en haut qu'en bas de la montagne (comme j'ai beaucoup de raisons pour le croire, quoique tous ceux qui ont médité sur cette matière soient contraires à ce sentiment), il s'en suivra nécessairement que la pesanteur et pression de l'air est la seule cause de cette suspension du vif-argent, et non pas l'horreur du vide, puisqu'il est bien certain qu'il y a beaucoup plus d'air qui pèse sur le pied de la montagne que non pas sur son sommet; au lieu qu'on ne saurait dire que la nature abhorre le vide au pied de la montagne plus que sur son sommet. »

Périer fit l'expérience le 19 septembre 1648, en présence de « plusieurs personnes de condition de cette ville de Clermont. » On se rendit d'abord au jardin des Pères Minimes, où l'on répéta

(1) Descartes, Lettre à Carcavi, du 11 juin 1649.

(2) Descartes, Lettre à Carcavi, du 17 août 1649. — Voir aussi la lettre au P. Mersenne, en date du 13 décembre 1647, dans laquelle Descartes dit : « J'avais averti M. Pascal d'expérimenter si le vif-argent montait aussi haut lorsqu'on est au-dessus d'une montagne que lorsqu'on est tout au bas ; je ne sais s'il l'aura fait. »

expérience de Torricelli avec « deux tuyaux de verre de pareille rosseur et longs de quatre pieds chacun, scellés hermétiquement ar un bout et ouverts par l'autre; il se trouva que le vif-argent ui était resté à l'intérieur était à même niveau, et qu'il y en avait n chacun d'eux, au-dessus de la superficie de celui du vaisseau, 16 pouces 3 lignes 1/2 (712 millimètres). » Laissant à demeure un le ces tuyaux en expérience continuelle sous la garde du P. Chastin, on monta avec l'autre tuyau et une partie du même vif-argent en haut du Puy-de-Dôme, élevé au-dessus des Minimes d'environ 500 toises (975 mètres), où ayant fait les mêmes expériences de la même façon qu'on les avait faites aux Minimes, on vit qu'il ne restait plus dans le tuyau que la hauteur de 23 pouces 2 lignes (627 millimètres) de vif-argent : « ce qui, écrit Périer, nous ravit tous d'admiration et d'étonnement, et nous surprit de telle sorte que, pour notre satisfaction propre, (nous recommençâmes l'expérience) encore cinq autres fois très exactement en divers endroits du sommet de la montagne, et il s'est toujours trouvé à toutes ces expériences la même hauteur de vif-argent de 23 pouces 2 lignes, qui font les 3 pouces 1 ligne 1/2 (85 millimètres) de différence d'avec les 26 pouces 3 lignes 1/2 qui s'étaient trouvés aux Minimes; ce qui nous satisfit pleinement. » On redescendit aux Minimes; et, en chemin, on refit l'expérience au lieu dit *Lafon de l'arbre*, situé vers le milieu de la montagne, et là on observa que la hauteur du vif-argent resté dans le tuyau était de 25 pouces (677 millimètres), « ce qui n'augmenta pas peu (la) satisfaction » des expérimentateurs. Étant enfin revenus aux Minimes, ils constatèrent que, dans le tuyau qu'ils y avaient laissé en expérience continuelle, le vif-argent se tenait à la même hauteur de 26 pouces 3 lignes 1/2 « à laquelle hauteur le R. P. Chastin, qui y était demeuré pour l'observation, (leur) rapporta n'être arrivé aucun changement pendant toute la journée (1). »

Le lendemain, Périer répéta l'expérience au bas et sur le sommet de la plus haute des tours de Notre-Dame de Clermont, « élevée par-dessus son pied de 20 toises (39 mètres) », et il trouva une différence d'environ 2 lignes (4^{mm},5).

(1) Périer, Lettre à Pascal, du 22 septembre 1648.



Enfin Pascal, lorsqu'il eut reçu la lettre de Périer, voyant « que la différence de 20 toises d'élévation faisait une différence de 2 lignes à la hauteur du vif-argent, et que 6 à 7 toises en faisaient une d'environ demi-ligne, ce qu'il était facile d'éprouver à Paris, (fit) l'expérience ordinaire du vide au haut et au bas de la tour Saint-Jacques de la Boucherie, haute de 24 à 25 toises; (il observa) plus de 2 lignes de différence à la hauteur du vif-argent; et ensuite il la fit dans une maison particulière, haute de 90 marches, où (il trouva) très sensiblement demi-ligne de différence (1). »

Avec un bon baromètre, la hauteur d'une table suffit pour répéter l'expérience (pour 1 mètre d'élévation au-dessus du sol, le mercure baisse d'environ $\frac{1}{10}$ de millimètre).

Expérience du vide dans le vide. — Avant l'expérience du Puy-de-Dôme, Pascal en avait fait une autre, très probante aussi,

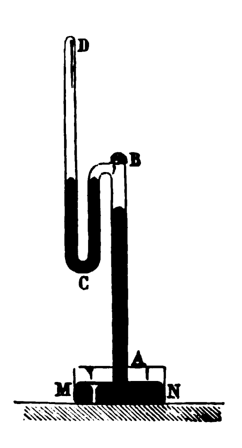


Fig. 420

« l'expérience du vide dans le vide (2) ». Un tube de Torricelli AB, fermé en haut par un morceau de vessie, porte soudé à sa partie supérieure un tube en siphon BCD, dont la petite branche CB s'ouvre dans la chambre B du tube de Torricelli, et dont la grande branche, s'élevant verticalement suivant CD, est fermée en D. L'ap-

(1) Pascal, *Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs*. Paris; 1648.
(2) Pascal, *Traité de la pesanteur de la masse de l'air*, écrit en 1653, mais publié seulement en 1663, après la mort de l'auteur.

ıreil étant renversé, on le remplit entièrement de mercure, et on retourne sur une cuvette MN, pleine du même liquide. Le mer-ıre abandonne alors entièrement le tuyau DCB, sauf la courbure, ı il se met de niveau dans les deux branches; au contraire, dans tube BA, il reste suspendu comme dans un tube de Torricelli ·dinaire. « Or, la raison de cette différence est que l'air pèse sur vif-argent qui est dans l'écuelle MN au bout du tuyau A, et ınsi il tient son vif-argent de dedans suspendu et en équilibre; ıais il ne pèse pas sur le vif-argent qui est au bout recourbé du ıyau d'en haut; car la vessie empêche qu'il n'y ait accès d'air; e sorte que le vif-argent du tuyau tombe librement, parce que ien ne le soutient et ne s'oppose à sa chute. » Si maintenant on :rève la vessie B, on voit aussitôt le mercure descendre dans le tube BA au niveau du liquide dans la cuvette, tandis que dans le siphon BCD le mercure monte tout d'un coup à la hauteur qu'il atteignait tout à l'heure dans le tube AB.

L'appareil de Pascal étant un peu fragile, on lui substitue au-

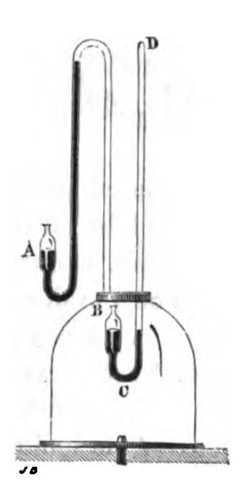


Fig. 421

jourd'hui dans les cours un instrument plus commode. Le vide étant fait au moyen de la machine pneumatique dans le récipient qui porte les deux baromètres, on constate que dans le baromètre AB le mercure s'élève à environ 76 centimètres, et que dans le

baromètre CD le mercure est tombé au même niveau dans les deux branches. Laisse-t-on rentrer l'air, les rôles se trouvent changés : les niveaux s'égalisent dans les deux branches du baromètre AB, tandis qu'en D le mercure monte à 76 centimètres.

Expérience de la vessie. — Dans son *Traité sur la pesanteur de l'air*, Pascal insiste encore sur une expérience que l'on fait aujourd'hui bien plus aisément. « Si l'on prend, dit-il, un ballon à

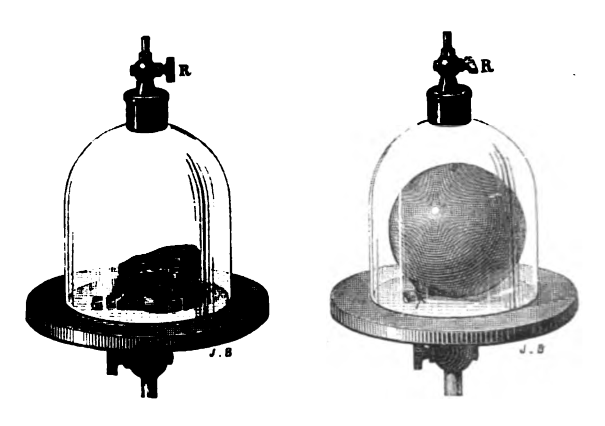


Fig. 422

demi plein d'air, flasque et mou, et qu'on le porte au bout d'un fil sur une montagne haute de 500 toises, il arrivera qu'à mesure qu'on montera, il s'enflera de lui-même, et quand il sera en haut il sera trop plein et gonflé comme si on y avait soufflé de l'air à nouveau ; et en descendant, il s'aplatira peu à peu par les mêmes degrés, de sorte qu'étant arrivé au bas il sera revenu à son premier état. » Cette expansion que l'air du ballon manifeste au sommet de la montagne, parce qu'il est « chargé de moins d'air en cet endroit-là qu'il n'était en bas », Boyle la montra quelques années plus tard, en plaçant une vessie à moitié gonflée sous le récipient de la machine pneumatique. D'après Boyle lui-même, c'est à Roberval qu'est due cette forme d'une expérience tant de fois reproduite depuis.

273. Application du principe de Pascal aux gaz :

éorie du baromètre. — La pesanteur de l'air établie, toutes conséquences du principe de Pascal touchant l'équilibre s fluides pesants sont immédiatement applicables à l'air. L'expérience de Torricelli se rattache ainsi très simplement aux is fondamentales de l'hydrostatique. Soient en effet deux éléments ;aux *ab* et *a'b'*, pris tous les deux au niveau de la surface libre du ıercure dans la cuvette, l'un *ab* à l'intérieur du tube, l'autre *a'b'*

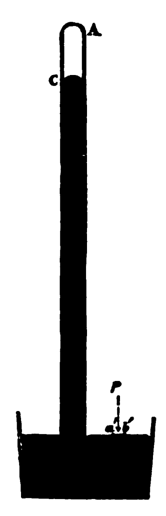


Fig. 423

à l'extérieur : le mercure étant en équilibre, ces deux éléments supportent des pressions égales. Or, l'élément *ab* est pressé par une colonne de mercure de base *ab* et de hauteur égale à la distance verticale des niveaux du mercure dans le tube et dans la cuvette (203); l'élément *a'b'* est pressé par une colonne d'air de base *a'b'* et s'élevant jusqu'aux confins de l'atmosphère. Donc le poids de la colonne de mercure soulevée dans le tube fait équilibre à la pression de l'atmosphère sur une surface égale à la base de la colonne mercurielle; et ainsi, comme dit Pascal, cette expérience « fait voir l'équilibre de l'air avec le vif-argent, qui sont, l'un la plus légère, et l'autre la plus pesante de toutes les liqueurs qui sont connues dans la nature [1]. »

(1) Pascal, *loc. cit.*

Par suite, le diamètre du tube, sa forme, sa position n'o aucune influence sur la distance verticale des deux niveaux. (

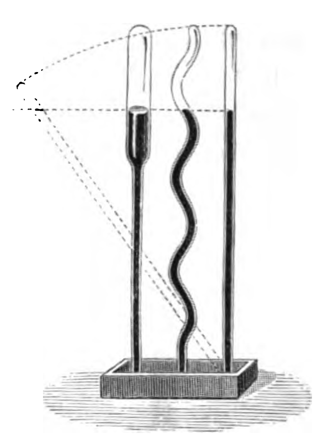


Fig. 424

pourra recourber le tube par en bas verticalement, horizontalement, ou même le couper au niveau du mercure dans la cuvett

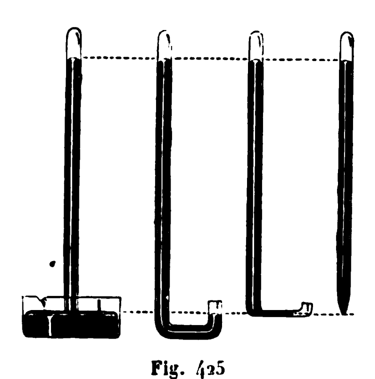


Fig. 425

(à la seule condition que dans cette région il soit assez étroit pour que l'air ne puisse pas diviser la colonne), le niveau du mercure dans le tube ne changera pas. Il ne changera pas davantage en quelque point d'une couche de niveau qu'il se trouve, à l'air libre ou dans l'intérieur d'une maison.

Il en résulte également que le tube de Torricelli permet d'évaluer à chaque instant le poids de l'air pressant sur la cuvette; de là le nom de *baromètre* (βάρος, poids) qui lui a été donné.

***Pression** exercée par l'atmosphère sur une surface donnée.* — Soit r exemple à évaluer la pression sur 1^{cq} de la surface MN, la hauur du mercure soulevé dans le baromètre à zéro étant 760^{mm} : tte pression est égale au poids d'une colonne de mercure de q de base et 76^{cm} de hauteur, c'est-à-dire de 76^{cc} de volume, ou à 5 $\times$ 13,59 = $1033^{gr},3$ ou $1^{kg},0333$. Sur 1^{mq} de surface, la pression erait de $10\,333^{kg}$. On peut ainsi aisément, dans tous les cas, calculer a pression en kilogrammes sur une surface donnée. Comme cette ression est proportionnelle à la hauteur de la colonne baronétrique, on prend souvent cette hauteur même pour mesure de la pression : c'est dans ce sens que l'on dit, par exemple, que la pression barométrique moyenne est de 760^{mm}.

Il est à remarquer que la pression représentée par un certain nombre de millimètres ou par un certain nombre de grammes n'a pas la même valeur aux différents points du globe, une colonne de mercure de même hauteur exerçant en divers lieux des pressions différentes par suite de la variation du poids spécifique absolu du mercure. On éviterait cet inconvénient en exprimant les pressions en unités absolues. A Paris, la pression de 760^{mm} correspond à $1033,3 \times 981 = 1,0136 \times 10^6$, c'est-à-dire à un peu plus de 1 mégadyne par 1^{cq}. Pour exercer exactement une pression d'une mégadyne, ou comme l'on dit aussi d' « une atmosphère C. G. S. », il faudrait à Paris une colonne de mercure de $74^{cm},978$.

Mais le plus souvent les pressions sont données en millimètres, d'où la nécessité d'une correction quand, ainsi que cela se présente en météorologie, il s'agit de comparer les pressions en différents lieux.

Réduction du baromètre à la latitude de 45° et au niveau de la mer. On réduit alors par le calcul les hauteurs barométriques relevées aux différentes stations à ce qu'elles auraient été sous la latitude de 45° et au niveau de la mer. Soit $H_{\lambda,h}$ la hauteur observée en une station située à la latitude λ et à l'altitude h, la hauteur $H_{45,0}$, que l'on aurait observée sous la même pression à la latitude 45° et à l'altitude o serait

$$H_{45,0} = H_{h,\lambda}\,(1 - 0,002\,59 \cos 2\lambda - 0,000\,000\,003\,14\, h),$$

les hauteurs $H_{43,0}$ et $H_{h,\lambda}$ étant en raison inverse des poids spécifi-

ques absolus du mercure, et par conséquent en raison inverse des valeurs de g aux deux stations (103).

Baromètre à gravité. — Puisque la longueur de la colonne mercurielle correspondant à une même pression change ainsi d'un lieu à un autre, il est possible d'évaluer les variations de la pesanteur à la surface du globe par les changements de la colonne faisant équilibre à la pression d'une même masse de gaz à température constante. Essayée jadis par M. Boussingault [1], cette méthode vient d'être reprise par M. Mascart [2], qui s'est attaché particulièrement à donner aux visées la précision nécessaire, tout en faisant un appareil transportable. Son baromètre à gravité est un baromètre à siphon (275), dont la courte branche est fermée et contient un gaz inerte, introduit sous la pression de 1^{m} de mercure environ. Sur le tube est collée une double lame de verre, dont la pièce extérieure est coupée en deux fragments suivant une section à 45°, l'un des bords de cette section étant couvert d'une couche d'or transparente, d'après le procédé de M. Govi; une échelle est fixée latéralement au tube dans une position telle que l'image virtuelle des divisions sur la face dorée se forme dans l'axe même du tube barométrique; un microscope horizontal permet de viser en même temps cette image et le niveau du mercure [3], de façon à déterminer celui-ci à $\frac{1}{100}$ de millimètre. On a soin d'ailleurs de plonger l'appareil dans un bain d'eau, dont on détermine exactement la température afin de pouvoir ensuite par le calcul ramener toutes les lectures à zéro (274) : il n'y aura plus dès lors d'autre cause de perturbation que la variation même de g, variation qu'il sera par conséquent facile de conclure des observations.

274. Baromètre à cuvette. — Le baromètre à cuvette n'est autre chose qu'un tube de Torricelli, construit avec les précautions nécessaires pour éviter complètement dans le tube toute trace d'air ou de vapeur d'eau.

Construction et vérification du baromètre. — A cet effet, on prend

(1) Boussingault, C. R., XCV, 30; 1882.
(2) Mascart, *Journal de physique* (2), II, 341; 1883.
(3) Voir p. 781 (note) les précautions à prendre pour l'éclairage du ménisque.

n tube de 85 centimètres environ de longueur; on le ferme à un out; à l'autre extrémité ón soude une boule, et on étire la soudure

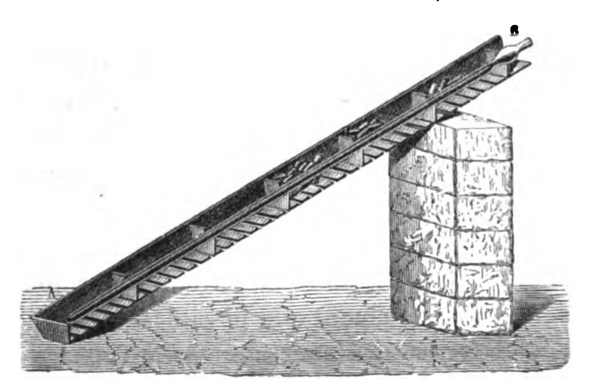


Fig. 426

de façon à pouvoir facilement détacher la boule quand on n'en aura plus besoin. On remplit le tube de mercure pur (1), on le place

(1) Le mercure sortant de la mine est d'ordinaire très pur, et peut s'employer immédiatement après agitation avec des cendres chaudes et filtration à travers une tige poreuse. On purifie le métal impur soit par distillation, soit par des lavages à l'acide azotique étendu (on chauffe à une température voisine de 60°,

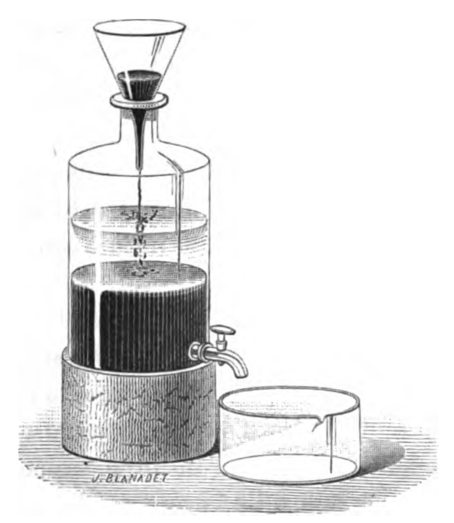


Fig. 427

on arrête le feu quand on voit apparaître des vapeurs rutilantes, on laisse refroidir, on agite de temps en temps, enfin on lave à grande eau), et on le conserve sous l'acide sulfurique concentré dans un flacon muni à sa partie inférieure d'un robinet en verre, et surmonté d'un entonnoir à bec très effilé.

sur une grille inclinée AB, et chauffant sur toute la longueur en même temps, on provoque l'ébullition vers le bas d'abord, puis un peu plus haut, et ainsi de suite jusqu'à la partie supérieure du tube : la boule reçoit le mercure projeté accidentellement par l'ébullition. On évite ainsi les soubresauts trop forts, ainsi que le mélange d'oxyde qui se produit forcément quand on scinde l'opération en plusieurs temps, remplissant d'abord un tiers du tube de mercure que l'on fait bouillir, puis procédant de même successivement pour les deux autres tiers. En opérant d'une seule fois, on n'a guère d'oxyde que dans la boule ; on laisse refroidir pour que cet oxyde se rassemble aussi complètement que possible à la surface libre du mercure, on enlève la boule avec le mercure qu'elle contient ; fermant alors avec le doigt l'extrémité effilée, on porte le tube sur la cuvette, préalablement remplie de mercure pur et sec, on le redresse, et le baromètre est construit.

On constatera l'état de la *chambre barométrique* (on appelle ainsi l'espace vide qui existe au-dessus du mercure) en inclinant un peu brusquement le tube : si elle est bien purgée d'air, le mercure viendra frapper l'extrémité du tube avec un bruit sec. S'il reste quelque trace d'air ou de vapeur, le choc étant amorti par ce matelas, le bruit ne se fera pas entendre. A ce moyen commode, mais un peu grossier, on substituera avantageusement le procédé suivant, indiqué par Arago : après avoir relevé exactement la hauteur de la colonne soulevée dans le tube, on verse dans la cuvette assez de mercure pour réduire sensiblement la chambre barométrique, et on mesure de nouveau la hauteur : elle doit être exactement la même qu'auparavant.

Avec quelque habileté qu'elle soit conduite, l'ébullition du mercure est une opération dangereuse, et elle souille le mercure d'une certaine quantité d'oxyde : le verre étant plus ou moins mouillé par ce mercure mêlé d'oxyde, le ménisque qui termine la colonne mercurielle à l'intérieur du tube, supposé parfaitement cylindrique dans la portion utile, présente des formes très différentes suivant que la colonne monte ou descend, ce qui est un inconvénient grave ; et si l'on vient à frapper sur le tube pour aider à l'équilibre (précaution toujours utile avant une lecture barométrique), on voit la forme du ménisque se modifier, et en

même temps la hauteur du mercure changer. Aussi aujourd'hui, pour tous les baromètres un peu larges, évite-t-on complètement de faire bouillir le mercure.

Voici, par exemple, comment on procède. Au tube barométrique AB on soude un petit ballon C portant deux petits tubes, l'un T terminé par une pointe effilée et fermée à la lampe, l'autre muni d'un robinet *r* et relié à l'une de ces machines pneumatiques à mercure qui permettent d'obtenir un vide en quelque sorte parfait (302). On fait le vide dans l'appareil, on y laisse rentrer de l'hydro-

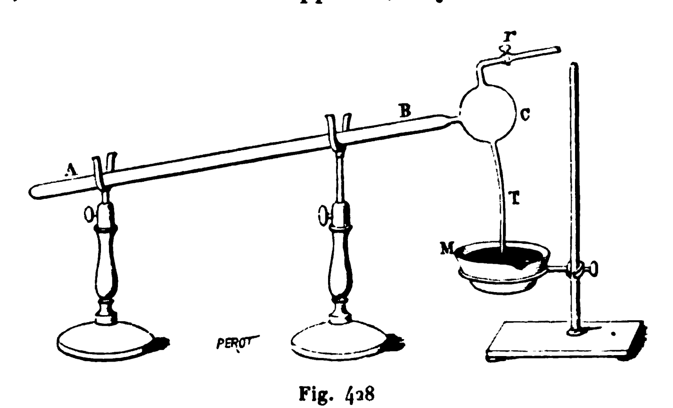


Fig. 428

gène sec, on y fait le vide de nouveau, et ainsi de suite une quinzaine de fois, en ayant soin aux dernières fois de chauffer fortement le tube avec des lampes à alcool. On obtient ainsi finalement un tube presque absolument vide; on ferme alors le robinet *r*, on place sous la pointe du tube T un vase M plein de mercure sec et chaud (à 120° environ), on brise cette pointe, et le mercure monte dans l'appareil. La pointe du tube T doit être assez fine pour que l'introduction du mercure demande plusieurs heures; et le tube AB, suffisamment large, doit en outre être assez faiblement incliné pour que le mercure qui descend dans le tube ne puisse y entraîner quelque bulle gazeuse. Le mercure remplit lentement le tube de A en B, chassant devant lui les dernières traces de gaz. Quand le remplissage est terminé, on sépare le ballon C, et il n'y a plus qu'à porter le tube sur sa cuvette.

Ce mode d'opérer donne des résultats excellents; la forme du ménisque est absolument fixe, et par conséquent la correction ca-

pillaire est toujours la même, soit que le mercure monte, soit qu'il descende.

Malgré tout, il en est de cette correction capillaire comme des autres ; mieux vaut la supprimer, si c'est possible. Tel a été le but que s'est proposé Regnault dans son baromètre normal.

Baromètre normal de Regnault. — C'est un baromètre à cuvette. dont le tube est assez large (3 centimètres de diamètre) pour éviter toute dépression capillaire ; ce tube AB, terminé inférieurement par une pointe recourbée de façon à empêcher une rentrée accidentelle d'air, repose sur un bain de mercure, contenu dans une cuvette en fonte MN. Sur le bord de la cuvette est fixé un écrou, dans lequel peut monter ou descendre une vis verticale en acier, terminée en pointe à ses deux extrémités *ab*. Enfin un thermomètre T est installé à côté du baromètre, de manière à indiquer aussi exactement que possible la température de la colonne mercurielle : à cet effet, on a donné pour réservoir au thermomètre une portion du même tube de verre dans lequel on a pris le tube barométrique, ou bien on a fait avec cette portion de tube une sorte d'éprouvette, que l'on a remplie de mercure où l'on a plongé un thermomètre ordinaire.

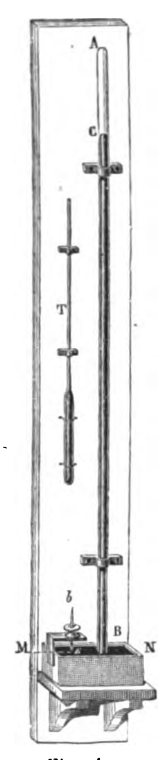


Fig. 429

L'observation de la hauteur barométrique se fait au moyen du cathétomètre. On commence par amener la pointe inférieure de la vis au niveau du mercure dans la cuvette ; et pour cela on se guide sur ce que, la surface du mercure coupant en son milieu la distance entre la pointe et son image, on voit aisément si la pointe ne touche pas ; tandis que si l'on dépasse l'affleurement, comme la pointe est un peu mousse et ne mouille pas, elle déprime le mercure autour d'elle, et se trouve environnée d'une auréole lumineuse provenant de la réflexion de la lumière sur la surface de la dépression. Le contact de la pointe inférieure de la vis avec la surface libre du mercure dans la cuvette étant rigoureusement établi, on relève au cathétomètre la distance de la pointe supérieure au

sommet du ménisque dans le tube [1]; à la quantité ainsi obtenue on ajoute la hauteur de la vis, que l'on mesure également au cathétomètre après l'avoir suffisamment soulevée (cette dernière mesure n'a évidemment pas besoin d'être répétée à chaque observation : un certain nombre de mesures à différentes températures suffisent pour déterminer une fois pour toutes la longueur de la vis à quelque température que ce soit); la somme de ces deux quantités donne la hauteur verticale du mercure dans le tube, sans que pour cela il soit nécessaire que le tube lui-même soit exactement vertical. En même temps on lit le thermomètre.

Réduction à zéro. — Il est en effet nécessaire, si l'on veut évaluer exactement la pression, de ramener par le calcul la hauteur observée à ce qu'elle aurait dû être si le mercure avait eu une température déterminée, toujours la même, zéro par exemple; sans quoi, la densité variant avec la température, les mesures ne se rapporteraient plus réellement à un même liquide. Il faut aussi corriger la lecture que l'on vient de faire de l'erreur que le changement de température a introduite dans les divisions de la règle du cathétomètre, lesquelles correspondent à la température de zéro.

Il y a donc une double correction à effectuer pour réduire la hauteur barométrique à zéro.

1° Cherchons d'abord la correction provenant de ce que la lecture a été faite sur une règle à la température t, cette règle étant exactement graduée pour la température zéro. 1 millimètre de la règle vaut exactement 1 millimètre à zéro; à t degré il vaut $1+kt$, k étant le coefficient de dilatation linéaire de la règle; si donc nous avons lu l millimètres, la longueur vraie h était

$$h = l(1+kt). \qquad (1)$$

[1] Cette opération est loin d'être aussi simple qu'elle le paraît, la visée du sommet d'un ménisque mercuriel étant en réalité une opération très difficile quand on n'a pas pour se guider un corps (pointe, ou grain de poussière) formant son image dans le mercure. Si l'on ne veut pas s'exposer à prendre pour le profil du ménisque l'une des lignes de séparation de lumière et d'ombre qui se forment à sa surface, il faut avoir soin de l'éclairer par de la lumière bien horizontale et de placer derrière lui un écran formé de deux parties, l'une blanche et l'autre noire, dont on amènera la ligne de séparation très peu au-dessus du ménisque. La visée peut alors se faire exactement.

pillaire est toujours la même, soit que le mercure [illegible] descende.

Malgré tout, il en est de cette correction c[illegible] autres ; mieux vaut la supprimer, si c'est po[illegible] que s'est proposé Regnault dans son barom[illegible]

Baromètre normal de Regnault. — C'e[illegible] dont le tube est assez large (3 centim[illegible] toute dépression capillaire ; ce tube A[illegible] une pointe recourbée de façon à em[illegible] d'air, repose sur u[illegible] une cuvette en fo[illegible] fixé un écrou, d[illegible] une vis verti[illegible] ses deux extr[illegible] installé à [illegible] diquer a[illegible] ture de [illegible] si le mercure eût donné [illegible] du m[illegible] tube [illegible] por[illegible]

$$\frac{kt}{1+\alpha t},$$

re[illegible] n[illegible] t négligeant les termes en α^2t^2, α^3t^3, etc.,

$$l_0 = l(1+kt)(1-\alpha t),$$

[illegible] d'approximation (c'est-à-dire en négligeant le

$$h_0 = l - l(\alpha - k)t \text{ (1)}. \qquad (3)$$

Fig. 4[illegible] [ré]duction à zéro s'opère par une seule correction

est un [illegible]

$$-l(\alpha-k)t,$$

autou[illegible] pro[illegible] proportionnelle à la fois à la hauteur observée l et à la tempéra- dé[illegible] ture à laquelle l'observation a été faite.

fa[illegible] c[illegible]

(1) α est très supérieur à k : la correction tenant à la diminution de densité du mercure est beaucoup plus grande que celle qui provient de la dilatation de l'échelle.

…, on a $k=0,000019$, $\alpha-k=0,000161$;
…re, $k=0,000008$, $\alpha-k=0,000172$.
…ée, donnant la correction toute
…différentes substances.
…ble de Delcros [1] pour
échelle de laiton. Si
…correction devrait
…lont les diffé-

…eur observée

	…TRES.											
							740	750	760	770	780	[illegible] Quantité dont il faudrait augmenter la correction si l'échelle était en verre.
				2	mm 0,12	mm 0,12	mm 0,12	mm 0,12	mm 0,12	mm 0,12	mm 0,13	0,01
				0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25	0,02
				0,35	0,35	0,35	0,36	0,36	0,37	0,37	0,38	0,02
			‚5	0,46	0,47	0,47	0,48	0,49	0,49	0,50	0,50	0,03
			0,57	0,58	0,58	0,59	0,60	0,61	0,62	0,62	0,63	0,04
		07	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,04
		0,78	0,79	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,05
		0,89	0,90	0,92	0,93	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1,01	0,06
	,99	1,01	1,02	1,04	1,05	1,06	1,08	1,09	1,11	1,12	1,13	0,06
	1,10	1,12	1,13	1,15	1,17	1,18	1,20	1,22	1,23	1,25	1,26	0,07
11	1,21	1,23	1,25	1,27	1,28	1,30	1,32	1,34	1,35	1,37	1,39	0,08
12	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40	1,42	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52	0,08
13	1,43	1,45	1,47	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62	1,64	0,09
14	1,54	1,56	1,59	1,61	1,63	1,66	1,68	1,70	1,72	1,75	1,77	0,10
15	1,65	1,68	1,70	1,73	1,75	1,77	1,80	1,82	1,85	1,87	1,89	0,11
16	1,76	1,79	1,81	1,84	1,87	1,89	1,92	1,94	1,97	2,00	2,02	0,11
17	1,87	1,90	1,93	1,96	1,98	2,01	2,04	2,07	2,09	2,12	2,15	0,12
18	1,98	2,01	2,04	2,07	2,10	2,13	2,16	2,19	2,22	2,25	2,28	0,13
19	2,09	2,12	2,15	2,19	2,22	2,25	2,28	2,31	2,34	2,37	2,40	0,13
20	2,20	2,24	2,27	2,30	2,33	2,37	2,40	2,43	2,46	2,49	2,52	0,14
21	2,31	2,35	2,38	2,42	2,45	2,48	2,52	2,55	2,59	2,62	2,65	0,15
22	2,42	2,46	2,49	2,53	2,57	2,60	2,64	2,67	2,71	2,74	2,77	0,16
23	2,53	2,57	2,61	2,65	2,68	2,72	2,76	2,79	2,83	2,87	2,90	0,16
24	2,64	2,68	2,72	2,76	2,80	2,84	2,88	2,92	2,95	2,99	3,03	0,17
25	2,75	2,79	2,84	2,88	2,92	2,96	3,00	3,04	3,08	3,12	3,16	0,18
26	2,86	2,91	2,95	2,99	3,03	3,07	3,12	3,16	3,20	3,24	3,28	0,18
27	2,97	3,02	3,06	3,11	3,15	3,19	3,24	3,28	3,32	3,37	3,41	0,19
28	3,08	3,13	3,18	3,22	3,27	3,31	3,36	3,40	3,45	3,49	3,54	0,20
29	3,19	3,24	3,29	3,34	3,38	3,43	3,48	3,52	3,57	3,62	3,66	0,20
30	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,69	3,74	3,78	0,21

[1] DELCROS, *Annuaire de Schumacher, pour* 1838.

2° Cette hauteur exacte h se rapporte à la température de t degrés. Si le mercure se fût trouvé à zéro, sa densité aurait été d_0, tandis qu'elle était d. Or les hauteurs h_0 et h de deux colonnes liquides de densité d_0 et d faisant équilibre à une même pression sont en raison inverse des densités (202)

$$\frac{h_0}{h} = \frac{d}{d_0};$$

mais

$$\frac{d}{d_0} = \frac{1}{1+\alpha t},$$

α étant le coefficient de dilatation absolue du mercure $\frac{1}{5550}$ $= 0,000180$; donc

$$h_0 = \frac{h}{1+\alpha t}. \tag{2}$$

Telle serait la hauteur h_0 que l'on aurait observée si le mercure eût été à zéro.

Des équations (1) et (2) on tire

$$h_0 = l\,\frac{1+kt}{1+\alpha t},$$

ou, en effectuant la division et négligeant les termes en $\alpha^2 t^2$, $\alpha^3 t^3$, etc.,

$$h_0 = l(1+kt)(1-\alpha t),$$

ou, au même degré d'approximation (c'est-à-dire en négligeant le terme en $\alpha k t^2$),

$$h_0 = l - l(\alpha - k)t \text{ (1)}. \tag{3}$$

Ainsi la réduction à zéro s'opère par une seule correction

$$-l(\alpha - k)t,$$

proportionnelle à la fois à la hauteur observée l et à la température t à laquelle l'observation a été faite.

(1) α est très supérieur à k : la correction tenant à la diminution de densité du mercure est beaucoup plus grande que celle qui provient de la dilatation de l'échelle.

Pour une échelle de laiton, on a $k = 0,000019$, $\alpha - k = 0,000161$; pour un baromètre gradué sur verre, $k = 0,000008$, $\alpha - k = 0,000172$.

Il existe des tables à double entrée, donnant la correction toute calculée pour des échelles tracées sur différentes substances.

Voici, par exemple, une partie de la table de Delcros [1] pour un baromètre dont la lecture se fait sur une échelle de laiton. Si la lecture se faisait sur une échelle de verre, la correction devrait être augmentée sensiblement de la quantité $0,007t$, dont les différentes valeurs sont inscrites dans la dernière colonne.

Réduction du baromètre à zéro.

Correction en millimètres, $l(\alpha - k)t$, à retrancher de la hauteur observée sur une échelle en laiton.

Température t.	HAUTEUR OBSERVÉE EN MILLIMÈTRES.											$\frac{0,007}{1,000}t$ Quantité dont il faudrait augmenter la correction si l'échelle était en verre.
	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	780	
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	
1°	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,13	0,01
2	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25	0,02
3	0,33	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,36	0,36	0,37	0,37	0,38	0.02
4	0,44	0,45	0,45	0,46	0,47	0,47	0,48	0,49	0,49	0,50	0,50	0,03
5	0,55	0,56	0,57	0,58	0,58	0,59	0,60	0,61	0,62	0,62	0,63	0,04
6	0,66	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,76	0,04
7	0,77	0,78	0,79	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,87	0,88	0,05
8	0,88	0,89	0,90	0,92	0,93	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1,01	0,06
9	0,99	1,01	1,02	1,04	1,05	1,06	1,08	1,09	1,11	1,12	1,13	0,06
10	1,10	1,12	1,13	1,15	1,17	1,18	1,20	1,22	1,23	1,25	1,26	0,07
11	1,21	1,23	1,25	1,27	1.28	1.30	1,32	1,34	1,35	1,37	1,39	0,08
12	1,32	1,34	1,36	1,38	1,40	1,42	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52	0,08
13	1,43	1,45	1,47	1,50	1,52	1,54	1,56	1,58	1,60	1,62	1,64	0,09
14	1,54	1,56	1,59	1,61	1,63	1,66	1,68	1,70	1,72	1,75	1,77	0,10
15	1,65	1,68	1,70	1,73	1,75	1,77	1,80	1,82	1,85	1,87	1,89	0,11
16	1,76	1,79	1,81	1,84	1,87	1,89	1,92	1,94	1,97	2,00	2,02	0,11
17	1,87	1,90	1,93	1,96	1,98	2,01	2,04	2,07	2,09	2,12	2,15	0,12
18	1,98	2,01	2,04	2,07	2,10	2,13	2,16	2,19	2,22	2,25	2,28	0,13
19	2,09	2,12	2,15	2,19	2,22	2,25	2,28	2,31	2,34	2,37	2,40	0,13
20	2,20	2,24	2,27	2,30	2,33	2,37	2,40	2,43	2,46	2,49	2,52	0,14
21	2,31	2,35	2,38	2,42	2,45	2,48	2,52	2,55	2,59	2,62	2,65	0,15
22	2,42	2,46	2,49	2,53	2,57	2,60	2,64	2,67	2,71	2.74	2,77	0,16
23	2,53	2,57	2,61	2,65	2,68	2,72	2,76	2,79	2,83	2,87	2,90	0,16
24	2,64	2,68	2,72	2,76	2,80	2,84	2,88	2,92	2,95	2,99	3,03	0,17
25	2,75	2,79	2,84	2,88	2,92	2,96	3,00	3,04	3,08	3,12	3,16	0,18
26	2,86	2,91	2.95	2,99	3,03	3,07	3,12	3,16	3,20	3,24	3,28	0,18
27	2.97	3,02	3,06	3,11	3,15	3,19	3,24	3,28	3,32	3,37	3,41	0,19
28	3,08	3,13	3,18	3,22	3,27	3,31	3,36	3,40	3,45	3,49	3,54	0,20
29	3,19	3,24	3,29	3,34	3,38	3,43	3,48	3,52	3,57	3,62	3,66	0,20
30	3,30	3,35	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,69	3,74	3,78	0,21

[1] DELCROS, *Annuaire de Schumacher*, pour 1838.

Formes diverses du baromètre à cuvette. — Dans les baromètres à cuvette ordinaires, la lecture se fait au moyen d'un curseur à **vernier**, qui glisse le long d'une règle divisée, fixée à côté du tube. Le *zéro* de la règle est au niveau moyen du mercure dans la cuvette ; et

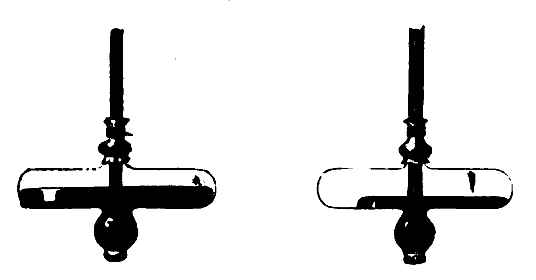


Fig. 430

pour atténuer les variations que subit forcément la hauteur du mercure dans la cuvette, on donne à celle-ci, dans la région où affleure le mercure, un très large diamètre, tandis qu'un appendice en forme de boule reçoit la pointe effilée du tube barométrique, qui se trouve ainsi toujours plongée dans le mercure, quelque position que reçoive accidentellement le baromètre. Afin d'obtenir un niveau fixe dans la cuvette malgré les variations de niveau dans le tube barométrique, on a quelquefois mis dans la cuvette seulement une large goutte aplatie qui s'élargissait ou se rétrécissait sans éprouver de changement sensible dans son épaisseur (**238**). Tous ces moyens sont nécessairement imparfaits.

Baromètre de Fortin. — Fortin a adopté une disposition beaucoup meilleure, au moyen de laquelle on peut toujours ramener le mercure dans la cuvette à un niveau constant, et qui permet en outre de transporter aisément le baromètre. La condition essentielle d'un appareil portatif étant la légèreté, Fortin s'imposa l'obligation de n'employer que peu de mercure ; il prit donc un tube étroit (7^{mm} environ de diamètre intérieur), et une cuvette également étroite (3^{cm} de diamètre environ). Les variations de niveau dans la cuvette et dans le tube sont alors comparables. Mais le fond de la cuvette est mobile et peut s'élever ou s'abaisser à l'aide d'une vis, de manière à amener toujours le niveau du mercure à un repère fixe, qui est le zéro de l'échelle. A cet effet, la cuvette est formée à sa partie supérieure d'un anneau de verre RR, puis d'un

double anneau en buis B'B', et enfin, à sa partie inférieure, d'un sac PP en peau de chamois. Ce sac, ficelé par en haut à la seconde pièce en buis, repose par son fond sur un petit champignon D, porté par une vis V qui prend son écrou dans la base inférieure

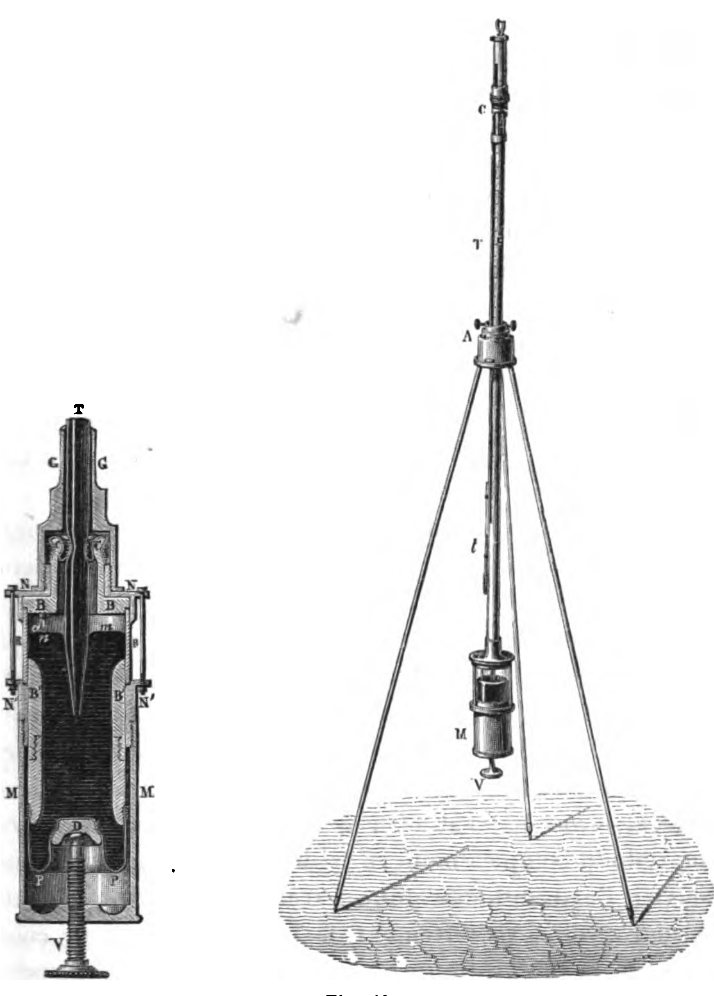


Fig. 431

d'une enveloppe en laiton MM, recouvrant toute la cuvette jusqu'au niveau de la partie transparente. En haut, la cuvette est fermée par un couvercle en buis BB, traversé en son milieu par le tube barométrique T, et portant de côté une pointe d'ivoire *a* dont l'extrémité

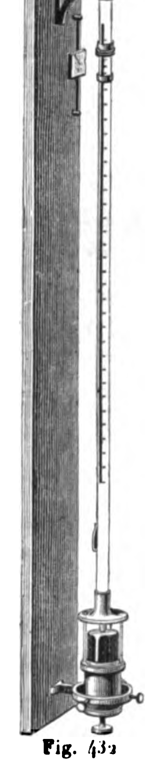
marque le niveau *nm* auquel on doit toujours amener le mercure dans la cuvette. Ce couvercle en bois est recouvert lui-même d'un couvercle en laiton, rattaché à l'enveloppe inférieure par trois vis NN′ qui maintiennent ainsi solidement unies toutes les parties de la cuvette.

Le tube, effilé à sa partie inférieure, présente au niveau du couvercle de la cuvette un étranglement sur lequel on lie solidement les bords d'un orifice pratiqué dans une peau de chamois, rabattue d'autre part et ficelée sur un rebord CC saillant autour de l'ouverture centrale du couvercle en buis. Cette peau de chamois laisse la pression atmosphérique s'exercer sur le mercure de la cuvette, mais elle empêche complètement ce liquide de passer. Autour du tube est une gaîne en laiton GG, reposant sur le couvercle de la cuvette : sur cette gaîne est marquée une échelle en millimètres, dont le zéro est à l'extrémité de la pointe d'ivoire; deux fenêtres, ménagées en regard l'une de l'autre dans la portion où se meut l'extrémité de la colonne mercurielle, et un curseur mobile permettent de relever la hauteur du mercure dans le tube.

Pour construire ce baromètre, on remplit le tube de mercure suivant la méthode ordinaire; puis, tenant le tube verticalement, l'extrémité ouverte en haut, on lie sur l'étranglement la peau de chamois qu'on attache d'autre part au rebord du couvercle de la cuvette renversée (la gaîne du tube étant ôtée). On a enlevé le fond de la cuvette en dévissant par le milieu sa garniture métallique et en dévissant de même la pièce de bois à laquelle est fixé le sac en peau de chamois. Il reste alors autour de l'extrémité du tube un cylindre, formé par l'anneau de verre et la première pièce en buis; on remplit complètement ce cylindre de mercure, de manière à recouvrir l'extrémité du tube barométrique. On remonte la cuvette; on serre la vis fortement de façon que tout l'air contenu dans le fond de la cuvette sorte à travers les pores du sac en peau de chamois. On peut alors retourner l'appareil dans sa position normale, visser la gaîne du tube; et le baromètre est construit. En abaissant la vis de la cuvette, on le mettra en état de fonctionner.

Avant de faire une observation il faut d'abord installer le baromètre verticalement. A cet effet, on peut employer une suspension

la Cardan [1], ou bien attacher simplement le baromètre à un rochet, en le lestant par en bas avec un poids. Dans in laboratoire on se servira avantageusement d'une lanchette solide, portant en haut un crochet et en as un anneau à travers lequel passe la cuvette : le baromètre s'étant de lui-même mis vertical, on le saisit lans cette position à l'aide de trois vis implantées dans 'anneau, et que l'on a soin de serrer de manière à fixer e baromètre sans le déranger. L'instrument est alors immobile, ce qui facilite beaucoup les observations.


Fig. 432

Le baromètre étant installé verticalement, on agit sur la vis de façon à amener le mercure de la cuvette au contact de la pointe d'ivoire, et l'on reconnaît qu'on y est arrivé exactement comme pour le baromètre normal.

Il ne reste plus alors qu'à lire la hauteur du mercure dans le tube. Pour cela on se sert du curseur, lequel présente deux ouvertures correspondant aux deux fenêtres de la gaîne métallique ; les bords supérieurs de ces deux ouvertures opposées sont situés dans un même plan horizontal qu'il faut amener à être tangent au sommet du ménisque. On fait donc monter ou descendre le curseur, soit à l'aide d'un pignon engrenant avec une crémaillère pratiquée sur l'un des côtés de l'une des fenêtres de la gaîne, soit plutôt au

[1] On appelle ainsi un mode de suspension à l'aide duquel un corps est mobile autour de deux axes rectangulaires, et reste libre par conséquent de prendre toutes les positions possibles dans l'espace. Or, un corps soumis uniquement à son poids tend toujours à se placer de manière que son centre de gravité soit le plus bas possible (76). Le baromètre de Fortin, ainsi suspendu vers le milieu de sa gaîne, tendra donc à se placer de telle sorte que son centre de gravité soit le plus bas possible, et l'axe de figure de l'appareil sera alors vertical. Dans le pied figuré ci-contre, la gaîne du baromètre T peut tourner autour des deux pointes opposées b, b', plantées dans un même anneau B, qui lui-même est mobile autour des pointes a, a', perpendiculaires aux premières et attachées au cercle fixe A reposant sur les trois pieds P. Le centre de gravité de l'appareil reste toujours sur l'intersection des deux plans menés verticalement l'un par aa', l'autre par bb'

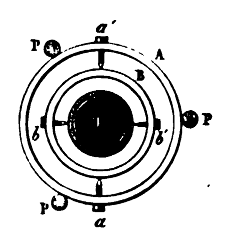


Fig. 433

moyen de la disposition suivante qui permet d'effectuer à volonté, ou rapidement de grands déplacements, ou lentement de petits déplacements. Le curseur se compose de deux pièces : un anneau *e*, glissant à frottement dur sur la gaîne, et au-dessous le curseur proprement dit *g*, qui ne la touche pas ; les deux pièces sont réunies par une bague *f*, tournant sur l'anneau supérieur et mordant par un pas de vis sur l'anneau inférieur. On comprend dès lors comment on pourra faire glisser rapidement le curseur entier pour le placer à peu près dans la position voulue, et comment, pour l'y amener exactement, il suffira de faire tourner lentement la bague qui réunit les deux pièces ; l'anneau supérieur restera alors fixe, tandis que la pièce inférieure s'élèvera ou s'abaissera graduellement. Elle sera bien en place quand un rayon visuel mené tangentiellement aux bords supérieurs des deux ouvertures opposées du curseur rasera en même temps le sommet du ménisque. Le curseur porte en regard de l'échelle de la gaîne un vernier au $\frac{1}{20}$, dont le trait 20 coïncide avec le plan des arêtes supérieures opposées. On lira donc sur l'échelle le nombre entier de millimètres N, situé immédiatement au-dessous du trait 20 du vernier, on cherchera quelle est la division n du vernier qui coïncide avec une division de l'échelle ; la longueur de la colonne barométrique sera $l = N + \frac{n}{20}$, à un vingtième de millimètre près (¹).

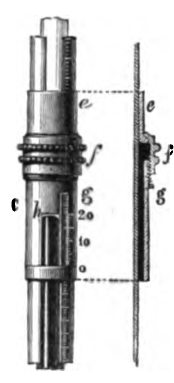


Fig. 434

En même temps on lit la température accusée par un thermomètre, dont le réservoir est profondément enfoncé dans la gaîne de manière à bien donner la température du baromètre. Cette température servira, comme plus haut, pour opérer la réduction à zéro.

Mais ici intervient, en outre, une première correction que Regnault avait évitée : c'est la correction nécessitée par la capillarité du tube.

Correction de la capillarité. — On peut faire cette correction au moyen de tables qui donnent la dépression capillaire pour un dia-

(¹) Il y a en effet la même distance entre la division N de l'échelle et le trait 20 du vernier qu'entre la division (N — 19) de l'échelle et le trait 0 du vernier.

iètre déterminé du tube et une flèche déterminée du ménisque. Il ıut alors posséder ces deux éléments.

1° Si le constructeur a joint à l'appareil un morceau du tube qui a ervi à fabriquer le baromètre, on connaîtra aisément le diamètre du ube. Si l'on n'a pas de morceau du tube, on pourra encore évaluer ıpproximativement le diamètre intérieur en mesurant d'abord le

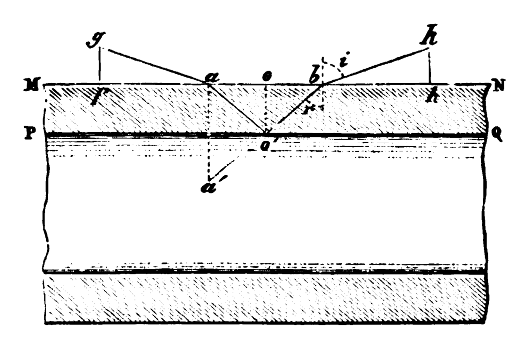


Fig. 435

diamètre extérieur, puis l'épaisseur. Pour cette dernière mesure, le baromètre étant couché horizontalement, on trace sur la surface du verre deux traits fins, peu éloignés, perpendiculaires à l'axe du tube. Soient a et b ces deux traits tracés sur la surface extérieure MN du tube; la surface intérieure PQ agit comme un miroir, et l'image du point a se forme en a'. Considérons le rayon de lumière qui va de o' en b : ce rayon sort du verre en se réfractant suivant une direction bk, que l'on détermine en cherchant sur le tube la place hk qu'on doit donner à un petit écran en carton pour que le trait b et l'image a' du trait a paraissent en ligne droite avec le bord supérieur de l'écran. On fait de même de l'autre côté avec le même écran, qu'il faut alors placer en gf. On mesure $ab=2a$, $fh=2b$, et $kh=gf=h$. Soient e l'épaisseur oo' du tube, i et r les angles d'incidence et de réfraction en b et en a ; on a, en désignant par n l'indice de réfraction supposé connu du verre du tube,

$$\sin i = n \sin r,$$
$$e = a \cot r,$$
$$h = (b - a) \cot i.$$

De ces trois équations à trois inconnues on tirera e. En retranchant $2e$ du diamètre extérieur ([1]), on aura le diamètre intérieur.

2° Pour mesurer la hauteur de la flèche, il suffit de relever avec le curseur la distance entre le sommet et la base du ménisque. Nous avons vu comment on vise le sommet. La base est facile à viser, car la ligne de raccordement se distingue très nettement, le ménisque n'ayant plus l'aspect brillant de la colonne : on a d'ailleurs pratiqué sur le bord du curseur une petite échancrure qui permet de bien mettre en prolongement le bord supérieur du curseur et la ligne de raccordement.

Ces deux éléments connus, la table suivante, calculée par Delcros ([2]) sur les formules de Schleiermacher, donne la dépression capillaire correspondante.

Table des dépressions capillaires, en millimètres.

Diamètre du tube en millimètres.	Flèche du ménisque en millimètres.															
	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
4	0,60	0,89	1,16	1,41	1,65*	1,86	2,05	2,21†	2,35	»	»	»	»	»	»	»
5	0,37	0,55	0,73	0,90	1,06	1,19	1,33	1,45	1,56	1,66	1,74	»	»	»	»	»
6	0,24	0,36	0,48	0,59	0,70	0,80	0,90*	0,99	1,07	1,14	1,21†	1,27	1,32	1,37	»	»
7	0,17	0,25	0,34	0,41	0,49	0,56	0,64	0,70	0,76	0,82	0,87	0,92	0,96	1,00	1,04	»
8	0,12	0,18	0,24	0,30	0,35	0,40	0,46	0,50	0,55*	0,59	0,64	0,67	0,71†	0,74	0,77	0,79
9	0,09	0,13	0,18	0,22	0,26	0,30	0,34	0,38	0,42	0,45	0,48	0,50	0,53	0,56	0,58	0,60
10	0,07	0,10	0,13	0,16	0,19	0,22	0,25	0,28	0,31	0,33*	0,35	0,38	0,40	0,42†	0,44	0,45
11	0,05	0,08	0,10	0,12	0,15	0,17	0,19	0,21	0,23	0,25	0,27	0,29	0,31	0,32	0,34	0,35
12	0,04	0,06	0,07	0,09	0,11	0,13	0,14	0,16	0,18	0,19*	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25†	0,26
13	0,03	0,05	0,06	0,07	0,09	0,10	0,12	0,13	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,20
14	0,02	0,03	0,04	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,11	0,12*	0,13	0,14	0,15	0,15†	0,16

* Dépressions d'après Bravais pour un angle de raccordement de 36°.
† Dépressions moyennes selon Danger.

Ces nombres toutefois sont peu certains ([3]); et la méthode compliquée que nous venons de rappeler ne donne, somme toute, qu'une correction très douteuse. Aussi l'a-t-on à peu près complètement abandonnée, et la remplace-t-on généralement aujourd'hui par la méthode suivante, qui est à la fois très simple et exacte.

([1]) Cette quantité $2e$ est ordinairement comprise entre $2^{mm},3$ et $2^{mm},5$.
([2]) Delcros, *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, XIV ; 1838.
([3]) Des expériences récentes, faites avec beaucoup de soin par Mlle Gulkowska

On observe régulièrement pendant une quinzaine de jours son baromètre de Fortin comparativement à un baromètre normal ; les observations réduites à zéro doivent présenter une différence constante, puisque, si le tube est parfaitement cylindrique dans la partie où se meut le sommet de la colonne et si le baromètre a été bien construit, la dépression capillaire est nécessairement constante. Supposons qu'il en soit ainsi. On note alors la quantité constante dont le baromètre de Fortin est au-dessous du baromètre normal ; et pour faire la correction capillaire il suffira désormais d'ajouter ce nombre à chaque observation du baromètre de Fortin. Cette méthode a en outre l'avantage d'englober dans la constante de l'instrument une autre correction qu'il faut encore déterminer à part quand on suit l'ancien procédé : la correction provenant de ce que le zéro de l'échelle ne coïncide pas d'ordinaire exactement avec l'extrémité de la pointe d'ivoire. La comparaison avec le baromètre normal donne en bloc les deux corrections (1).

Emploi. — Quand on veut transporter le baromètre de Fortin, on monte la vis de la cuvette jusqu'à ce que le mercure vienne toucher le haut du tube, on retourne le baromètre et on le met

sous la direction de M. Mendeleeff, ont donné des dépressions très différentes, comme on peut en juger d'après le tableau suivant, dressé par M. Kohlrausch :

DIAMÈTRE du tube en millimètres.	FLÈCHE DU MÉNISQUE EN MILLIMÈTRES.							
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
4	0,83	1,22	1,54	1,98	2,37			
5	0,47	0,65	0,86	1,19	1,45	1,80		
6	0,27	0,41	0,56	0,78	0,98	1,21	1,43	
7	0,18	0,28	0,40	0,53	0,67	0,82	0,97	1,13
8		0,20	0,29	0,38	0,46	0,56	0,65	0.77
9		0,15	0,21	0,28	0,33	0,40	0,46	0,52
10			0,15	0,20	0,25	0,29	0,33	0,37
11			0,10	0,14	0,18	0,21	0,24	0,27
12			0,07	0,10	0,13	0,15	0,18	0.19
13			0,04	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14

(1) Cette comparaison est faite pour tous les baromètres fournis par le Bureau central météorologique, qui donne la constante propre à chaque instrument. Il est clair que la constante doit être déterminée à nouveau après toute réparation entraînant un changement soit du tube, soit de la gaîne, soit de la pointe d'ivoire.

dans son étui [1]; on peut alors l'emporter sans aucun risque. Lorsqu'on sera arrivé à destination, on tirera le baromètre de son étui, on le redressera, on le fixera à son support, on abaissera la vis de la cuvette, et on pourra alors observer. Toutefois, comme la pression atmosphérique ne se transmet au mercure de la cuvette que par les pores de la peau de chamois, il est nécessaire d'attendre quelque temps pour que l'équilibre soit établi. Afin d'éviter ce léger inconvénient, Bunten a placé en haut de la cuvette une vis limée par le bas sur une partie de sa largeur, de sorte qu'il suffit de la soulever un peu pour que la pression atmosphérique s'exerce immédiatement dans la cuvette. On peut d'ailleurs, en serrant la tête de la vis contre une petite rondelle de cuir placée au-dessous, rendre la fermeture hermétique [2].

Le baromètre de Fortin, étant beaucoup moins coûteux et plus commode que celui de Regnault, est avantageusement employé dans les laboratoires toutes les fois que l'on n'a pas besoin d'une extrême précision. Avec un baromètre de Fortin bien construit et bien installé on peut aisément répondre de $\frac{1}{10}$ de millimètre. Le baromètre normal donne le $\frac{1}{50}$ ou même le $\frac{1}{100}$ de millimètre, suivant l'exactitude du cathétomètre dont on se sert. Mais les petites variations continuelles qu'éprouve la pression atmosphérique rendent en général illusoire une précision dépassant le $\frac{1}{10}$ de millimètre. Le baromètre de Fortin peut donc suffire dans la plupart des cas.



Fig. 436.

(1) L'étui contient ordinairement en outre un tube de rechange, et une vrille à crochet, ou un pied avec suspension à la Cardan.

(2) La figure ci-contre montre une forme du baromètre de Fortin, dont l'idée paraît due à Arago, et qui a été adoptée par différents constructeurs, Tonnelot, Alvergniat, etc. : la cuvette est reliée au tube par une vis en fer, de sorte qu'on peut l'élever ou l'abaisser pour établir l'affleurement du mercure avec l'extrémité d'une pointe fixe en émail. La vis ne joint pas très bien avec l'écrou à sa partie inférieure, ce qui permet à la pression atmosphérique de s'exercer dans la cuvette; mais dans le haut la vis est ajustée hermétiquement, et en remontant convenablement la cuvette on ferme complètement l'appareil.

275. Baromètre à siphon. — Le baromètre à siphon se rattache immédiatement au baromètre à cuvette. Si en effet, isolant dans la cuvette un canal *ab*, nous solidifions tout le reste MNN du mercure, nous ne changerons pas les conditions de l'équibre, et

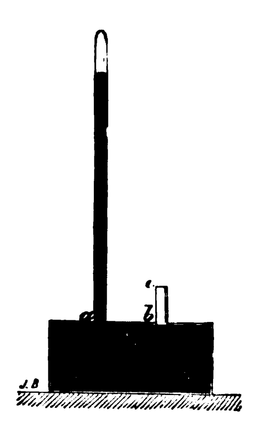


Fig. 437

en prolongeant le conduit *ab* par un tube extérieur *bc*, nous aurons un baromètre à siphon, où la différence de niveau du mercure dans les deux branches mesurera la pression atmosphérique.

Les précautions pour purger l'appareil d'air et d'humidité sont exactement les mêmes qu'avec le baromètre normal, le remplissage s'effectuant sur le tube non encore courbé.

Pascal s'est particulièrement servi de cette forme de siphon qu'il préférait comme moins coûteuse, moins embarrassante, et plus facilement transportable ; et dans ces derniers temps M. Wild en a fait un baromètre normal très précis.

Baromètre normal de M. Wild. — Cet appareil est caractériés par la disposition de son cathétomètre, formé d'une colonne cylindrique verticale, mobile autour de son axe, et portant deux lunettes horizontales à l'aide desquelles on vise les niveaux du mercure dans les deux branches du siphon, très larges dans les parties utiles. On fait alors tourner le cathétomètre autour de son axe, de manière à amener les deux lunettes, comme les deux pointes d'un compas, sur les divisions d'une règle verticale placée à côté du baromètre (112), à l'abri par conséquent des dérangements

auxquels les manœuvres et la seule présence de l'opérateur l'exposent quand elle est fixée au cathétomètre même.

Différentes formes usuelles de baromètres à siphon. — On a donné des formes variées au baromètre a siphon. Dans certains modèles, le siphon peut glisser verticalement sur la planchette qui le supporte : du côté de la petite branche est marqué sur la planchette un repère fixe, en regard duquel on amène le niveau du mercure dans cette branche; il suffit alors de lire la hauteur du mercure dans la grande branche sur une échelle dont le zéro correspond au repère. Dans d'autres appareils, et particulièrement dans les baromètres de Greiner jeune (de Berlin), le siphon est

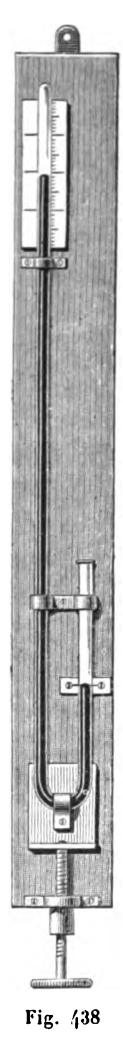


Fig. 438

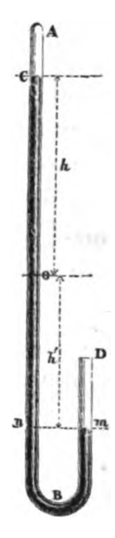


Fig. 439

fixe, mais l'échelle est mobile, et pour chaque lecture on en amène le zéro au niveau du mercure dans la petite branche. Le plus souvent l'échelle est fixe ainsi que le tube ; placée alors entre les deux branches, AB, BD, elle court dans les deux sens à partir d'un zéro situé vers le milieu du baromètre : la hauteur barome-

rique Cn est la somme des deux lectures h et h' aux deux branches. C'est la disposition que présente le baromètre de Gay-Lussac.

Baromètre de Gay-Lussac. — Gay-Lussac préférait le baromètre à siphon au baromètre à cuvette, parce qu'il pensait qu'avec deux branches de même diamètre les actions capillaires devaient se détruire exactement. Mais, comme nous l'avons déjà remarqué, la dépression capillaire du mercure dépend non seulement du diamètre du tube, mais aussi de la flèche du ménisque; or, dans la branche ouverte au contact de l'air, le mercure s'oxyde, et le ménisque est beaucoup moins convexe que dans la grande branche. Loin donc que toute correction capillaire soit supprimée, il en faut deux; et le baromètre à siphon est inférieur au baromètre à cuvette. Mais le baromètre de Gay-Lussac est aisément transportable, beaucoup plus léger et pas beaucoup plus fragile que le baromètre de Fortin, ce qui l'a fait souvent employer avant l'invention des baromètres anéroïdes.

Pour construire son baromètre, Gay-Lussac prenait deux portions

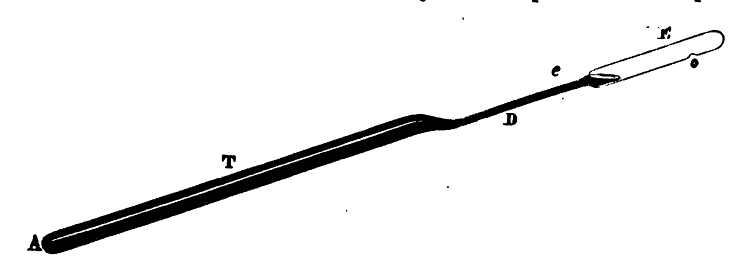


Fig. 440

A, E d'un même tube bien cylindrique T, et il les réunissait par un tube capillaire D, de manière à avoir un long tube à peu près rectiligne ADE, fermé en A et ouvert en E; il le remplissait de mercure comme d'habitude, puis, enlevant l'excédant de mercure jusqu'en e, il courbait à la lampe la portion libre du tube capillaire de façon à ramener la branche E dans le prolongement de la branche A; il redressait l'instrument, achevait de le remplir avec du mercure sec et chaud; enfin, il fermait la courte branche après y avoir pratiqué au moyen d'une aiguille chauffée au rouge un petit trou conique o; et il introduisait le tout dans une gaîne cylindrique en cuivre. Sur cette gaîne était tracée l'échelle, ayant son zéro vers le milieu du

tube; deux paires de fenêtres, munies chacune d'un curseur mobile, avaient été ménagées pour les lectures; et un thermomètre enchâssé dans la gaîne donnait la température de la colonne.

Quand on veut transporter le baromètre, il suffit de le retourner, de manière à remplir complètement toute la grande branche ainsi que le tube capillaire : l'excès de mercure tombe au fond de la petite branche. Ainsi renversé, le baromètre peut être transporté sans danger. Pour s'en servir, on le redresse : le mercure marche dans le tube capillaire à l'opposé du sens suivant lequel l'air tend à rentrer; le tube capillaire étant très étroit, la colonne liquide ne se divise pas; et l'air ne peut pas s'introduire dans la grande branche [1].

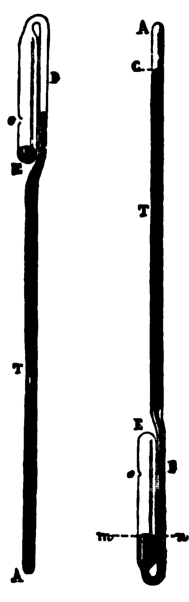


Fig. 441

[1] Avant Gay-Lussac, on avait construit des baromètres à siphon portatifs, dans lesquels les deux branches étaient réunies par une monture en fer munie d'un robinet. En inclinant l'appareil de façon à remplir complètement la grande branche et en fermant le robinet, on avait un appareil transportable. Mais la graisse du robinet salissait le mercure. C'est pour éviter ce robinet que Gay-Lussac imagina de réunir les deux branches par un tube capillaire.

Fig. 442

Depuis, Bunten a perfectionné l'appareil en coupant le tube capillaire vers la courbure et en réunissant les deux bouts par un tube plus large : toute rentrée d'air dans la chambre barométrique, toute interruption de la colonne est alors rendue impossible. Si en effet une bulle un peu grosse s'engage dans le tube étroit, comme elle monte précisément au moment où le mercure descend, elle passera à côté de la pointe P du tube capillaire et viendra se loger dans le cul-de-sac qui entoure cette pointe ; si la bulle est petite, elle glissera le long des parois et arrivera encore dans le même cul-de-sac. Mais l'instrument est un peu fragile.



Fig. 443

La figure 444 montre la disposition adoptée par Greiner pour obtenir plus de solidité. Le tube capillaire est supprimé ; mais les deux branches ne communiquent que par une ouverture étroite *o*, environnée d'une ampoule comme dans le baromètre de Bunten. Cette ampoule peut être fermée à sa partie supérieure par un bouchon *b*. Le volume de mercure contenu dans l'appareil est tel que, quand la longue branche est entièrement remplie, il atteint juste l'étranglement *e* où vient se loger le bouchon. Un tube de verre plein et surmonté d'un bouton métallique sert à appuyer le bouchon de manière à immobiliser et à enfermer complètement le mercure.

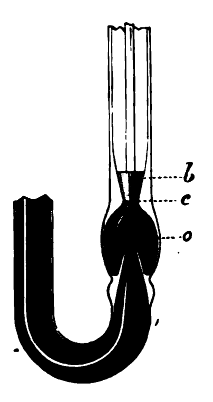


Fig. 444

Quelque ingénieuses que soient ces diverses combinaisons, elles ne donnent pas au baromètre à siphon étroit la précision qui lui manque; et en fait de baromètre portatif, le baromètre de Fortin doit être seul employé quand on veut des mesures exactes. Si au contraire on recherche avant tout la commodité, c'est aux baromètres métalliques qu'il faut la demander.

Baromètres d'appartement (¹). — Comme baromètres d'apparte-

(¹) Voir dans un article de MAGELLAN, au *Journal de physique de l'abbé Rozier*, XIX, 341 ; 1782, la description de divers modèles de baromètres « appropriés aux objets de la vie civile » : *baromètre à mercure et eau* de Descartes, *baromètre*

ment, on a souvent fait usage de baromètres à siphon dont la petite branche est élargie à la hauteur de la surface libre du mercure, de façon que cette surface soit sensiblement invariable.

Une forme qui a eu beaucoup de vogue, et dont il existe encore des modèles très artistement ornés, est celle qu'imagina Hooke [1], et que tout le monde connaît sous le nom de *baromètre*

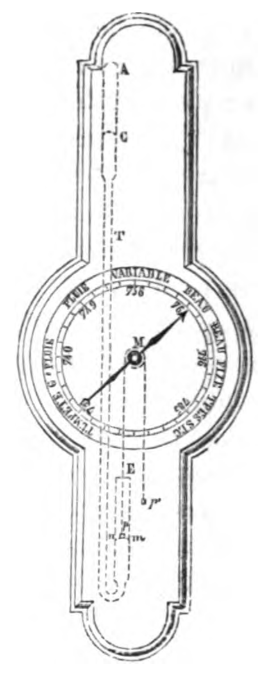


Fig. 445

à cadran. Un baromètre à siphon ATE, dont les deux branches ont même diamètre, porte à la surface libre *mn* du mercure dans la courte branche E un flotteur *p*, formé d'un bout de tube de verre lesté avec du mercure. Au flotteur est attaché un cordon qui s'enroule sur l'une des gorges d'une petite poulie double M; dans l'autre gorge s'enroule en sens inverse un cordon que tire un con-

diagonal de Moreland, *baromètre stéréométrique* de Landriani, *baromètre sectoral* de Magellan; auxquels on peut joindre le *baromètre à branches multiples* de Fahrenheit.

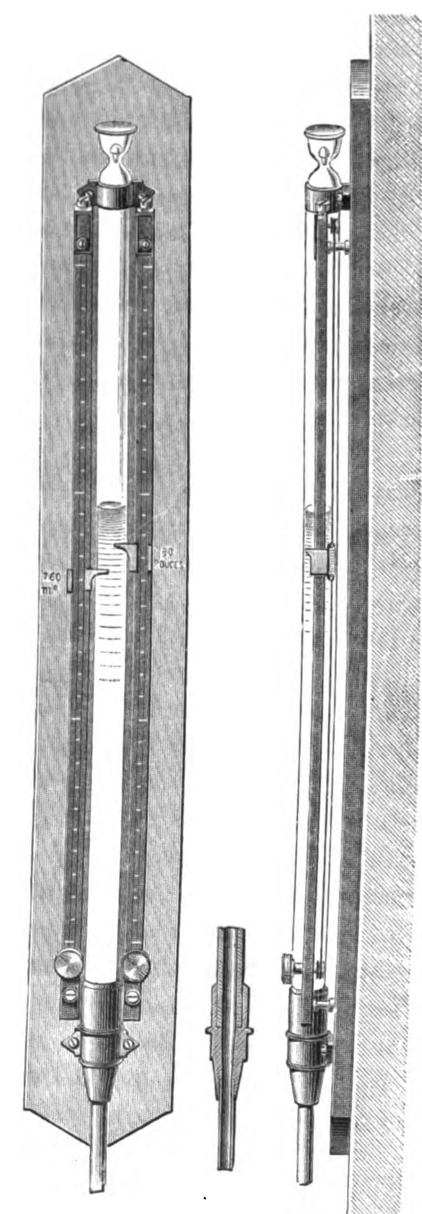
[1] Hooke, *Micrographie*. London; 1665.

re-poids p', formé également d'un petit tube de verre contenant un eu de mercure. Le flotteur suit les mouvements du mercure dans a courte branche et, par l'intermédiaire du cordon, agit sur la poulie dont l'axe porte une aiguille mobile sur un cadran. Si le diamètre de la poulie est assez faible et l'aiguille suffisamment longue, un léger déplacement du flotteur se traduira par un déplacement considérable de l'extrémité de l'aiguille. L'appareil est donc sensible [1]. Quant à la précision, il ne faut pas lui en demander. On a beau donner de légers coups sur l'instrument pour vaincre les frottements et faciliter l'établissement d'un équilibre auquel ils n'aient pas trop de part, on n'obtient jamais que des indications un peu grossières, suffisantes, il est vrai, pour les pronostics courants auxquels ce baromètre est destiné.

276. Baromètres à glycérine, à air. — Si l'on pouvait remplacer dans le baromètre le mercure par un liquide moins dense, les variations de la colonne barométrique, prenant plus d'ampleur, seraient plus aisément observables. Depuis les expériences de Pascal à Rouen (272), on a tenté maintes fois d'employer quelque liquide léger, l'eau par exemple. Mais, outre les accidents que peut causer la congélation du liquide dans les temps froids, l'accroissement rapide de la tension de la vapeur quand la température s'élève rend l'appareil tout à fait inexact. Une seule substance jusqu'à ce jour a paru donner des résultats satisfaisants : c'est la glycérine ; ce liquide, dont la densité est 1,26, résiste aux plus grands froids et n'a pas de tension de vapeur sensible aux températures ordinaires. La figure 446 représente un baromètre à glycérine, récemment construit pour l'observatoire de Kew par M. Jordan. La cuvette est un large vase cylindrique en cuivre étamé, surmonté d'un entonnoir rempli de coton pour retenir les poussières ; un peu de pétrole sépare la glycérine de l'air et la met à l'abri de l'humidité qu'au contact direct elle absorberait rapidement.

[1] Pour augmenter encore cette sensibilité, on avait imaginé les *baromètres à rouages*, dans lesquels le mouvement du flotteur était transmis à l'aiguille par une crémaillère et un système de rouages habilement combinés. On cite un baromètre que possédait Louis XVI, et dont l'aiguille marchait de plusieurs lignes par l'agitation de l'air que produisait l'ouverture d'une porte.

Le tube barométrique est constitué simplement par un tuyau à gaz que termine un gros tube de verre : on a d'abord fait le vide dans le tube au moyen d'une machine pneumatique à mercure reliée à sa partie supérieure, on l'a scellé ensuite hermétiquement. Le niveau supérieur de la glycérine s'observe sur une double échelle : échelle en pouces et dixièmes de pouce, à droite ; échelle en longueurs équivalentes de mercure, à gauche. La hauteur normale du liquide est $8^m,22$: la sensibilité est plus de 10 fois celle du baromètre à mercure ; l'expérience montrera si l'exactitude est *suffisante*.



Les baromètres à air, tels que le sympiézomètre et le baromètre de MM. Hans et Hermary, étant des *thermomètres* en même temps

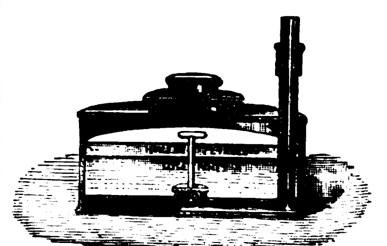


Fig. 446

que des baromètres, trouveront mieux leur place plus loin.

277. Baromètres métalliques. — Dans les baromètres métalliques les variations de la pression atmosphérique sont accusées par les changements qu'elles apportent à la forme d'un vase métallique mince, complètement fermé et vide d'air à l'intérieur. Ces baromètres peuvent se rapporter à deux types distincts.

Baromètre anéroïde de Vidi. — Dans le premier type, imaginé par Vidi en 1844, et nommé par lui *anéroïde* (ἀ privatif, ἀήρ air), la

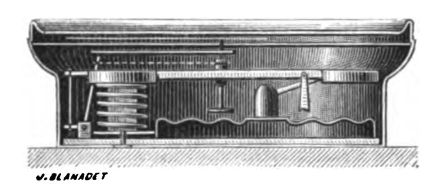


Fig. 447

pièce essentielle est une boîte métallique plate, vide d'air, et dont le couvercle, très mince, est plissé par des cannelures concentriques lui donnant une grande flexibilité. Si la pression extérieure augmente, ce couvercle s'abaisse; si elle diminue, il remonte par suite de l'élasticité du métal, aidée de l'action d'un ressort antagoniste. Un système de leviers amplifie ces mouvements et les transmet à une aiguille mobile sur un cadran divisé.

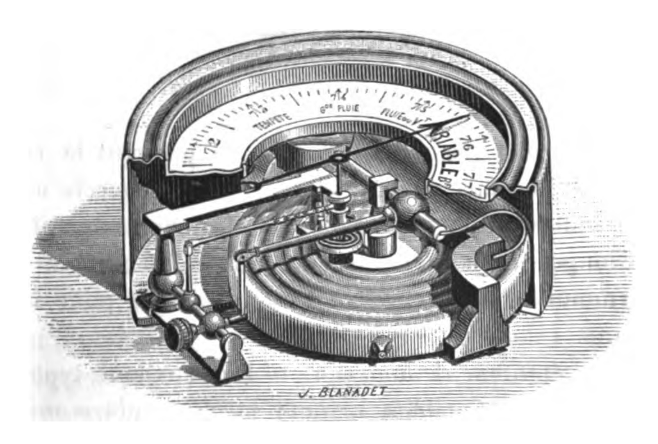


Fig. 448

La figure 448 montre la disposition adoptée par Bréguet : dans ces baromètres holostériques (ὅλος, tout, στερεός, solide), la

boîte porte sur la face supérieure un pivot central, soutenu par un large ressort coudé qui s'appuie sur deux supports fixes. Des leviers et une chaîne transmettent le mouvement amplifié à l'axe de l'aiguille : un petit ressort spiral maintient la chaîne constamment tendue, et assure ainsi à l'aiguille une position exacte. Une vis placée sous la boîte permet de faire basculer la ligne d'attache du ressort principal de façon à régler l'instrument : on peut donc amener l'aiguille à une position déterminée sur le cadran, au milieu, par exemple, pour la pression moyenne du lieu où l'on se trouve. L'appareil se gradue ensuite par comparaison avec un baromètre à mercure.

Goldschmitt construit ce baromètre sous une forme très simple et très solide : l'index α, porté par la tige directement fixée au couvercle, se déplace devant une échelle tracée sur le côté de la boîte et qui donne les 100 millimètres. Pour mesurer la pression, on

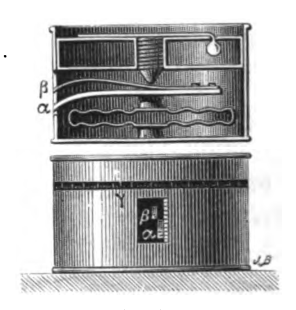


Fig. 449

tourne le couvercle jusqu'à ce que la vis pressant le ressort ait amené l'index β en face de α : la division du couvercle en regard du repère γ indique alors les millimètres et fractions de millimètres. Une petite loupe (non représentée sur la figure) facilite les lectures, et un thermomètre fait connaître la température pour la réduction à zéro.

Baromètre métallique de Bourdon. — Le deuxième type est dû à Bourdon. En 1849, Bourdon inventa le manomètre métallique. Vidi ayant montré que les plus faibles variations de la pression atmosphérique pouvaient être rendues sensibles par les déformations d'un vase métallique entièrement vide d'air, Bourdon n'eut qu'à vider d'air et à fermer son tube manométrique pour en faire

ı baromètre. Son appareil se compose donc d'un tube métallique vide d'air, fermé à ses deux extrémités et recourbé en anneau. :t anneau tend à se resserrer quand la pression extérieure augente, et s'ouvre au contraire lorsqu'elle diminue. Ce résultat, ıe l'on vérifie aisément en plaçant un tel anneau sous le récipient : la machine pneumatique, se conçoit aisément si l'on remarque ıe la portion de la surface de l'anneau tournée vers le dehors est lus grande que la portion tournée vers le centre : la pression extéieure croissant, l'anneau doit donc se fermer ; la pression devenant lus faible, l'élasticité du métal fait rouvrir l'anneau. Pour augmener ces effets, on donne au tube une section elliptique très allongée, e grand axe de l'ellipse étant perpendiculaire au plan de l'anneau.



Fig. 450

Le tube est soutenu en son milieu par un crochet fixe ; ses extrémités a et b sont reliées par deux petites bielles aux deux extrémités d'un même levier e auquel elles tendent ainsi à imprimer un mouvement de rotation, dirigé dans un sens ou dans l'autre suivant qu'elles s'éloignent ou se rapprochent. Ce mouvement de rotation se transmet amplifié à l'axe o, sur lequel est adaptée l'aiguille cd : à cet effet, un secteur denté gh, ayant son centre sur l'axe du levier, engrène avec un pignon monté sur l'axe o : le mouvement angulaire de l'aiguille est à celui du levier comme le rayon du secteur est au rayon du pignon.

Qualités et défauts des baromètres métalliques. — Les baromètres métalliques, très sensibles et très commodes sous tant de rapports, n'offrent malheureusement qu'une exactitude douteuse. L'élasticité du métal se modifie, et l'instrument, supposé parfaitement réglé au début, ne l'est plus au bout de quelque temps. Ce défaut apparaît surtout dans les instruments employés aux courses en montagne ou aux ascensions aérostatiques, et exposés ainsi à des variations rapides et considérables de la pression : il est rare qu'après une ascension un baromètre métallique revienne absolument à son état primitif. On rencontre cependant quelquefois des baromètres métalliques réellement bons. La seule manière d'apprécier la valeur d'un appareil de ce genre, c'est de l'essayer comparativement à un baromètre à mercure dans un récipient où l'on fait graduellement varier la pression entre les limites pour lesquelles l'instrument est construit. Cette comparaison doit être renouvelée de temps à autre.

Si l'on a un baromètre métallique avec lequel on puisse répondre d'une fraction de millimètre, on ne devra pas omettre de réduire les observations à la température pour laquelle l'appareil est exact. Cette réduction se fera par une étude préalable du baromètre, porté successivement à différentes températures dans une étuve convenablement disposée : on établira ainsi une formule empirique au moyen de laquelle on pourra désormais opérer la réduction (laquelle atteint souvent plusieurs millimètres pour des variations de température comme celle que l'on éprouve entre le pied et le sommet d'une montagne un peu haute).

Quant aux petits baromètres de montagne, en les tenant dans le gousset on les mettra suffisamment à l'abri pour n'avoir point à se préoccuper de la correction de température, au degré d'approximation de ces instruments.

278. Baromètre statique. — Nous citerons encore quelques formes intéressantes du baromètre.

Le baromètre statique, imaginé en 1670 par Samuel Moreland (1), repose sur le principe suivant :

(1) Moreland, *Steelyard-barometer* (baromètre-peson) décrit par Rees, Hutton, Gehler, etc.

Effort nécessaire pour soutenir un vase retourné sur un liquide. — Si un vase plein de liquide est retourné sur une



Fig. 451

cuve remplie du même liquide, l'effort nécessaire pour maintenir le vase est égal au poids du vase augmenté du poids du liquide soulevé.

Remarquons d'abord que dans un tel vase, qu'il y ait ou non un vide à la partie supérieure, la pression sur un élément *m*, situé à la hauteur *h* au-dessus du niveau *ab* du liquide dans la cuve, est $s(H-h)d$, *s* étant la surface de l'élément *m*, H la

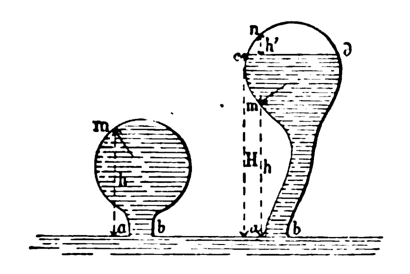


Fig. 452

hauteur du liquide proposé qui fait équilibre à la pression atmosphérique, *d* la densité du liquide. On sait en effet (200) que la différence des pressions sur deux éléments égaux pris l'un en *ab*, l'autre en *m*, à la hauteur *h* au-dessus de *ab*, est égale à *shd* ;

or en ab s'exerce la pression atmosphérique, de sorte que la pression sur un élément s de ab est sHd; donc la pression sur l'élément m est $sHd - shd = s(H-h)d$.

Cela posé, considérons les forces qui agissent sur le vase. A l'extérieur agit la pression atmosphérique : si la paroi se complétait en ab, de manière à fermer entièrement le vase, la somme des pressions exercées par l'atmosphère sur les divers éléments de la surface extérieure du vase serait nulle (abstraction faite de la perte de poids dans l'air); donc la somme des pressions supportées par toute la paroi, moins la surface ab, est égale et de signe contraire à la pression que supporterait cette surface ab. Ainsi, la pression atmosphérique sur la surface extérieure du vase se résume en une force verticale, dirigée de haut en bas, et égale à la pression de l'atmosphère sur l'orifice ab. A l'intérieur, chaque élément subit une pression $s(H-h)d$. La somme de toutes ces pressions est $\Sigma s(H-h)d = \Sigma sHd - \Sigma shd$, dont la première partie se traduit de même par une force unique, égale et contraire à celle qui résulte des efforts extérieurs; il reste donc seulement les forces $-\Sigma shd$, dirigées de haut en bas; et toute la question se réduit à déterminer cette somme Σshd, que nous désignerons par S.

Si le vase est complètement plein de liquide, nous savons (203) que S représente précisément le poids du liquide qui remplirait le vase depuis le fond jusqu'au niveau ab, à partir duquel est comptée la hauteur h.

S'il y a un vide à la partie supérieure du vase, chaque élément n de cette partie supérieure, subissant à l'intérieur la pression $s(H-H)d$, apporte à la somme S un terme $sHd = s(h_1 - h')d$, h_1 désignant la distance de l'élément n au niveau ab, et h' la distance du même élément au niveau cd; de sorte que la somme totale S peut être regardée comme la différence de deux quantités, l'une $S_1 = \Sigma sh_1 d$, représentant encore le poids du liquide qui remplirait le vase entier depuis le niveau ab jusqu'au sommet, et l'autre $s_1 = \Sigma sh'd$, exprimant le poids du liquide qui remplirait l'espace vide cnd [1].

[1] On ramènerait immédiatement ce cas au précédent, en imaginant en cd un double fond, soudé invariablement aux parois du vase, ce qui ne modifie évidemment en rien l'équilibre et donne, comme précédemment, une paroi intérieure partout en contact avec le liquide.

Ainsi, dans tous les cas, la somme S est égale au poids du liquide soulevé; en d'autres termes, l'effort nécessaire pour soutenir le vase est exactement le même que si le vase était fermé en *ab*.

On pourrait aussi raisonner synthétiquement comme il suit: supprimons le liquide extérieur, et laissons la pression atmosphérique s'exercer librement en *ab* : rien ne sera changé à l'état du système; mais alors le vase avec le liquide qu'il contient est entièrement libre dans l'air, et il faut évidemment pour le soutenir un effort égal au poids du contenant et du contenu.

Il n'est pas inutile de remarquer que cet isolement que nous venons de concevoir est parfaitement réalisable: tout le monde sait qu'avec quelque adresse on peut retourner un verre plein d'eau sans le renverser. Pour réussir cette expérience on s'aide ordinairement d'une feuille de papier que l'on applique sur

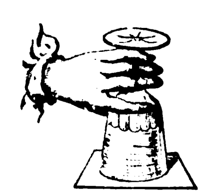


Fig. 453

la surface libre du liquide, et qui empêche l'air de s'introduire dans l'eau en la divisant; mais avec certaines précautions (en faisant préalablement bouillir l'eau dans le vase et en évitant les secousses) on arrivera à supprimer tout obturateur. On peut donc tenir dans l'air un vase retourné et cependant plein de liquide, et il est manifeste qu'alors on porte et le vase et le liquide.

Théorie du baromètre statique. — D'après ce qui précède, si au fléau d'une balance nous suspendons le tube d'un baromètre à cuvette, l'effort exercé à chaque instant par ce tube dépendra de la hauteur de la colonne de mercure soulevée, et il sera possible de suivre à la balance les moindres variations de la pression atmosphérique.

Soit donc un tube barométrique T, accroché en A au fléau d'une balance, et plongeant dans la cuvette C. La force F avec laquelle le couteau A est tiré vers le bas représente :

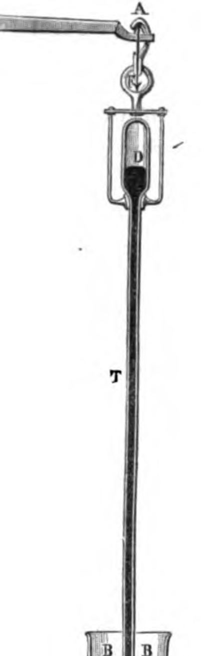


Fig. 454

1° le poids T du tube et de l'étrier qui sert à le suspendre;

2° plus le poids M du mercure contenu dans le tube jusqu'au niveau BB du liquide dans la cuvette, la portion de la colonne mercurielle située au-dessous de ce niveau BB pouvant être regardée comme appartenant à la cuvette;

3° moins le poids *a* de l'air déplacé par le système;

4° moins le poids *m* du mercure déplacé par la portion immergée de la paroi du tube.

Nous distinguerons deux cas, suivant que l'on voudra estimer les variations de la pression par des pesées ou par les différentes inclinaisons du fléau.

Dans le premier cas, le fléau est chaque fois ramené à l'horizontalité, et par suite le tube peut être considéré comme fixe.

On peut alors d'ordinaire négliger la variation que subit *m*, outre celle qu'éprouve *a*, quand la pression atmosphérique change; en conséquence F se réduit à

$$F = M + C^{te},$$

c'est-à-dire que, à ce degré d'approximation, l'effort exercé en A varie comme le poids du mercure soulevé dans le tube.

Or ce poids varie lui-même comme la pression atmosphérique. Supposons en effet que la pression croisse de h, et soient x la quantité dont le mercure s'élève dans le tube au-dessus de D, et y la quantité dont le mercure baisse dans la cuvette au-dessous de BB.

Soient encore S la surface annulaire de la cuvette, c'est-à-dire la section intérieure de la cuvette moins la section extérieure du

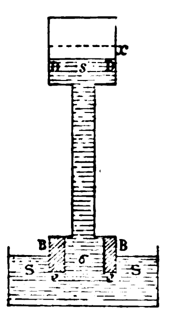


Fig. 455

tube, s la section intérieure du tube en D, et σ sa section intérieure au niveau BB. On a les deux équations

$$x+y=h,$$

et

$$sx=Sy;$$

d'où

$$x=h.\frac{S}{S+s},$$

et

$$y=h.\frac{s}{S+s}.$$

L'accroissement de poids du tube $(sx+\sigma y)d$ est donc

$$\Delta M=shd\frac{S+\sigma}{S+s},$$

quantité proportionnelle à h.

Dans ce cas, par conséquent, l'effort exercé sur le couteau A varie proportionnellement à h.

La même proportionnalité subsiste encore lorsqu'on tient compte de la variation de la poussée m. Pour introduire cet élement, il suffit en effet d'ajouter à ΔM la quantité eyd dont a diminué la

poussée par suite de l'abaissement y du mercure dans la cuvette, e désignant la surface annulaire de la base du tube ; de sorte que l'accroissement réel de la force F est

$$\Delta F = shd \frac{S+\sigma+e}{S+s},$$

quantité également proportionnelle à h.

En l'écrivant

$$\Delta F = hd \frac{S+\sigma+e}{\frac{S}{s}+1},$$

on voit que, toutes choses égales d'ailleurs, la sensibilité est d'autant plus grande que la section s de la chambre barométrique est plus considérable : il y a donc avantage à élargir le tube dans cette région.

La section s étant choisie et, d'après ce qui précède, un peu grande, on tâchera que la fraction

$$\frac{S+\sigma+e}{S+s}$$

ne soit pas trop inférieure à 1, limite que l'on atteindra soit en faisant $S=\infty$, soit (ce qui est beaucoup plus pratique) en prenant

$$\sigma+e=s$$

avec une valeur quelconque de S.

Si l'on parvient à rendre $\frac{S+\sigma+e}{S+s}$ exactement égal à 1, ΔF se réduit à

$$shd :$$

il est alors proportionnel à s.

Aux conditions précédentes ajoutons que le tube T doit au contraire être étroit dans toute sa partie moyenne pour donner à la balance moins de charge, et par conséquent plus de sensibilité. On attribue donc au tube une forme telle que l'indique la figure 455,

en ayant soin que les portions utiles (intérieur de DD, intérieur et extérieur de BB) soient bien cylindriques.

Considérons maintenant le deuxième cas : le fléau s'inclinant librement, le tube s'élève ou s'abaisse en même temps que le crochet auquel il est attaché. L'expression de F devient un peu plus compliquée, d'autant plus que la variation de m ne saurait alors en aucune manière être négligée.

Nous négligerons seulement les changements de a. La pression venant à augmenter de h, désignons toujours par x la hauteur dont le mercure s'élève dans la chambre barométrique au-dessus

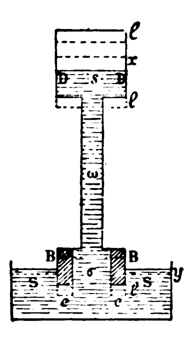


Fig. 456

de son niveau initial D, et par y la quantité dont le mercure baisse dans la cuvette au-dessous du niveau initial BB ; appelons l la quantité dont le tube descend au-dessous de sa position première : nous avons

$$x+y=h,$$

et

$$xs+l(s-\omega)=y\mathrm{S}+l(\sigma-\omega)+le,$$

ω étant le diamètre du tube entre les régions s et σ.

D'où

$$x=h\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}+s}-l\frac{s-\sigma-e}{\mathrm{S}+s},$$

et

$$y=h\frac{s}{\mathrm{S}+s}+l\frac{s-\sigma-e}{\mathrm{S}+s}.$$

L'accroissement de F est égal à l'accroissement du poids du mercure dans le tube au-dessus de la surface libre dans la cuvette

$$xsd + l(s-\omega)d + y\sigma d - l(\sigma-\omega)d,$$

diminué de l'accroissement de la poussée sur la partie plongée du tube

$$-(l-y)ed.$$

On a donc

$$\Delta F = xsd + y(\sigma+e)d + l(s-\sigma-e)d,$$

ou, en mettant pour x et y les valeurs trouvées plus haut,

$$\Delta F = hsd\frac{S+\sigma+e}{S+s} + l(s-\sigma-e)d\left(1-\frac{s-\sigma-e}{S+s}\right),$$

expression qui croît encore en même temps que S, et dont le maximum correspond à $S=\infty$. Ce maximum est

$$\Delta_1 F = hsd + l(s-\sigma-e)d.$$

Pour simplifier la discussion, considérons seulement le cas de $S=\infty$.

$\Delta_1 F$ n'est pas proportionnel à h. Afin d'avoir une inclinaison du fléau proportionnelle, dans certaines limites, à h, on peut recourir à deux moyens :

1° On peut, à l'exemple de Moreland, disposer le fléau de la balance de telle sorte que le couteau médian passe exactement par le centre de gravité du fléau. L'équilibre n'est alors possible qu'avec des forces égales agissant aux deux extrémités du fléau. Or le contrepoids faisant équilibre au tube barométrique est constant, il faut donc que $\Delta_1 F = 0$; en d'autres termes, pour faire face à l'accroissement de pression h, le tube devra descendre de la hauteur

$$l = h\frac{s}{\sigma+e-s},$$

quantité proportionnelle à h.

Ce déplacement l est en outre proportionnel à s : on est donc amené, comme précédemment, à élargir la partie supérieure du tube. L'élargissement de la partie supérieure conduit à élargir également la partie inférieure du tube, si l'on veut que l'appareil soit stable. Supposons en effet que, le tube étant maintenu en équilibre par un contrepoids convenable, nous rapprochions le tube de la cuvette, les deux niveaux s'élèveront de ε le long du tube, la force F diminuera de $(\sigma+e-s)\varepsilon d$. Si donc on a $\sigma+e>s$, le contrepoids deviendra trop fort, et, soulevant le tube, rétablira l'équilibre troublé : l'équilibre sera stable. Si l'on a au contraire $\sigma+e<s$, l'équilibre sera instable, à moins que l'on ne fasse usage de contrepoids variables (¹).

Enfin l est en raison inverse de $\sigma+e-s$, ce qui permet d'obtenir telle sensibilité que l'on veut en prenant $\sigma+e$ faiblement supérieur à s. Avec un tube cylindrique ordinaire d'un calibre de 8 millimètres et d'un diamètre de 10 millimètres (épaisseur du verre $=1$ millimètre), le coefficient d'amplification $\frac{s}{e+\sigma-s}$ serait $\frac{16}{9}$: la sensibilité serait à peu près le double de celle d'un baromètre ordinaire.

2° Si l'on soutient le fléau, comme d'habitude, par un axe situé au-dessus de son centre de gravité, le poids du fléau suffit, sous une inclinaison convenable, à équilibrer une surcharge $\Delta_1 F$ en A. Dans une balance bien construite, la tangente de cette inclinaison est proportionnelle à la surcharge (96). Si donc le fléau était d'abord horizontal, quand ensuite la pression se sera accrue de h, il sera incliné d'un angle α tel que

$$\operatorname{tg}\alpha=k.\Delta_1 F,$$

k étant une constante qui dépend de la balance.

Si l'on veut que $\operatorname{tg}\alpha$, et par suite α soit, jusqu'à une certaine limite, proportionnel à h, il faudra donc rendre $\Delta_1 F$ lui-même

(¹) Radau, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XIII, 29 ; 1868. M. Radau montre en outre que pour assurer la stabilité dans le sens horizontal il faut diminuer la poussée et abaisser le centre de gravité.

proportionnel à h, ce à quoi on parviendra en prenant

$$\sigma + e = s.$$

On aura alors simplement

$$\operatorname{tg} \alpha = k.hsd,$$

et cela quelle que soit la valeur de S.

Barographe du P. Secchi. — Sous sa forme oscillante, le baromètre statique se prête aisément à l'enregistrement continu de la pression. Il suffit en effet de transformer les déplacements angulaires du fléau en mouvements rectilignes d'un crayon, sous la pointe duquel une feuille de papier se déroule d'un mouvement uniforme. Les déplacements de la feuille de papier étant proportionnels aux temps, et les déplacements du crayon proportionnels aux variations de la pression, ces deux déplacements s'effectuant d'ailleurs dans deux directions rectangulaires, on obtient une courbe qui montre immédiatement la marche du phénomène, et sur laquelle ensuite il est aisé de relever la pression à l'heure que l'on veut. Tel était le principe du barographe du P. Secchi, très remarqué à l'Exposition de 1867, à Paris ([1]).

279. Baromètres enregistreurs. — On peut aussi transformer en enregistreurs le baromètre à cuvette et le baromètre à siphon.

Baromètre normal à enregistrement photographique. — Supposons d'abord qu'il s'agisse du baromètre normal à large cuvette. On peut enregistrer photographiquement les hauteurs de la colonne de mercure : le baromètre étant installé dans une pièce obscure, on fait tomber sur la chambre barométrique la lumière d'un bec de gaz ou d'une lampe à pétrole, concentrée par une lentille cylin-

([1]) Le crayon inscripteur était implanté au milieu d'une bielle, articulée d'un bout à l'extrémité d'une longue aiguille perpendiculaire au fléau, de l'autre bout à l'extrémité d'une tige de même longueur que l'aiguille et mobile autour d'un point fixe, comme dans un parallélogramme de Watt. L'influence de la température dépend des dimensions de l'appareil : dans le modèle exposé à Paris, la correction thermométrique était, d'après M. Radau, de $0^{mm},114$ pour 1 degré.



trique ; un objectif photographique prend l'image du sommet de la colonne et l'envoie sur un papier sensible, se déroulant régulièrement sous l'action d'un mouvement d'horlogerie. Deux plages se manifestent alors sur la feuille de papier : une plage noire, cor-

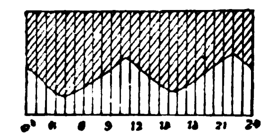


Fig. 457

respondant aux points qu'a frappés la lumière; une plage blanche, marquant les points qui ont été préservés par l'interposition de la colonne mercurielle. La ligne qui sépare ces deux plages représente donc exactement la série des positions successives du sommet de la colonne barométrique.

Baromètre Müller. — M. Müller [1] a disposé récemment un baromètre à cuvette enregistreur, dont le caractère original consiste en ce que le niveau dans le tube barométrique reste constant. La cuvette est mobile, et on en règle les déplacements de manière à maintenir le sommet de la colonne barométrique entre deux fils de platine distants de $\frac{1}{20}$ de millimètre. Ces fils traversent la paroi du tube et communiquent électriquement avec deux relais qui fonctionnent respectivement, suivant que le mercure touche l'un ou l'autre fil. Si c'est le fil inférieur, le relais correspondant met en mouvement un petit moteur qui soulève la cuvette. Si c'est le fil supérieur, l'autre relais entre en fonction, et la cuvette descend. Elle se trouve ainsi toujours mise en place à moins de $\frac{1}{20}$ de millimètre; il ne reste plus qu'à enregistrer ses déplacements, et pour cela un style et un cylindre enregistreur suffiront comme à l'ordinaire. Il est clair d'ailleurs que relais et appareil enregistreur peuvent être installés à une distance quelconque du baromètre, ce qui sera précieux en certains cas. L'électricité a pris ainsi depuis quelques années un rôle important dans l'enregistrement des phénomènes

(1) Muller, *Wied. Ann.* IV, 286 ; 1878; et *Journal de physique*, VII, 387.

météorologiques ; l'Exposition internationale d'électricité à Paris, en 1881, offrait une série remarquable d'appareils et en particulier de baromètres à enregistrement électrique, dont le détail ne saurait trouver place ici.

Barométrographe Krecke. — Le baromètre à siphon se prête plus aisément à l'enregistrement.

A l'observatoire d'Utrecht, M. Krecke a disposé un barométrographe à pointage, qui se compose essentiellement d'un baromètre à siphon, dont la petite branche contient un flotteur équilibré par un contrepoids. Ce contrepoids, fixé à l'autre extrémité d'un cordon passant sur une poulie très légère, porte un style. A des époques équidistantes, toutes les 30 minutes par exemple, un marteau, mis en mouvement par un système d'horlogerie, frappe un coup sur le contrepoids : le style vient toucher un cylindre enregistreur, et un point est marqué. La série des points ainsi obtenus dessine une courbe donnant la marche du baromètre. Mais les accidents qui peuvent survenir entre deux points consécutifs (par exemple l'augmentation brusque de la pression atmosphérique qui accompagne certains coups de tonnerre) échappent entièrement.

Cet inconvénient est évité dans le baromètre de M. Rédier.

Baromètre Rédier. — Le baromètre enregistreur de M. Rédier (¹) présente ce caractère que le tracé est opéré non par l'instrument de mesure, mais par un mécanisme robuste, obéissant servilement à l'instrument sans lui opposer de résistance notable.

La pièce essentielle du mécanisme est l'arbre AA d'un train différentiel, actionné par les barillets M, N, de deux forts ressorts d'horlogerie qui tendent à se dérouler en sens inverse (²). Cet arbre porte fixé perpendiculairement à sa direction un essieu autour duquel tourne librement une roue satellite conique S (³), placée entre deux disques R, R', tournant eux-mêmes librement autour de l'axe principal. Chaque disque est muni d'une double denture : une

(¹) Rédier, brevet du 19 septembre 1872. Voir le rapport de M. Goulier à la Société d'encouragement; 1878.

(²) Ce train différentiel a d'abord été appliqué à faire mouvoir la lourde aiguille des baromètres monumentaux de la Bourse et de la pointe Saint-Eustache sous la conduite de l'aiguille d'un anéroïde. Il est employé par M. Rédier dans tous ses enregistreurs.

(³) La roue satellite a été imaginée par Huyghens.

nture conique engrenant avec la roue satellite, et une denture roite par laquelle il engrène avec une couronne dentée entourant base de l'un des barillets et faisant orps avec lui. Par suite de ces dispositions, uand l'un des barillets N reste immo-ile, l'autre M, en tournant, communique a rotation au disque R′ avec lequel il ngrène, et celui-ci entraîne dans son mouvement la roue satellite qui roule sur la denture conique du disque R fixe. Si le second barillet N tourne seul, c'est ce disque R qui fait tourner la roue satellite, mais cette fois en sens inverse. Enfin, si les deux barillets tournent en même temps avec des vitesses différentes, la roue satellite prend une vitesse égale à la différence des vitesses que lui communiquerait séparément chacun des deux barillets. Or l'essieu de la roue satellite la suit dans son mouvement, et, comme il est fixé perpendiculairement à l'arbre du train différentiel, il agit sur cet arbre à la façon du bras d'un manège, pour le faire tourner soit à droite, soit à gauche, avec une vitesse proportionnelle à l'excès de la vitesse de l'un des barillets sur celle de l'autre.

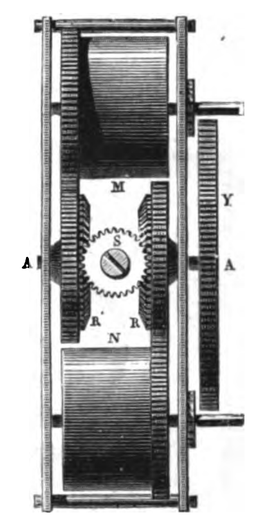


Fig. 458

Des deux ressorts moteurs, l'un M commande un système de rouages terminé par un échappement de montre E, et se déroule d'une façon continue ; l'autre N agit sur un système aboutissant à un volant V, réglé de telle sorte que la vitesse de déroulement du ressort N soit au moins double de celle de M : de cette manière, quand le volant marche, l'arbre du train reçoit une rotation de sens contraire à celle que produit le premier ressort agissant seul. Pour faire tourner l'arbre dans un sens ou dans l'autre, il suffira donc qu'un levier rattaché directement au baromètre lâche le volant ou l'arrête par un effort qui sera minime, car le moment de cet effort est à celui de la force qu'il faut dépenser pour remonter le ressort dans le rapport inverse des vitesses de rotation du volant et du barillet, et, par un système convenable de pignons et de roues dentées, on

peut donner au volant une vitesse énormément supérieure à celle du barillet.

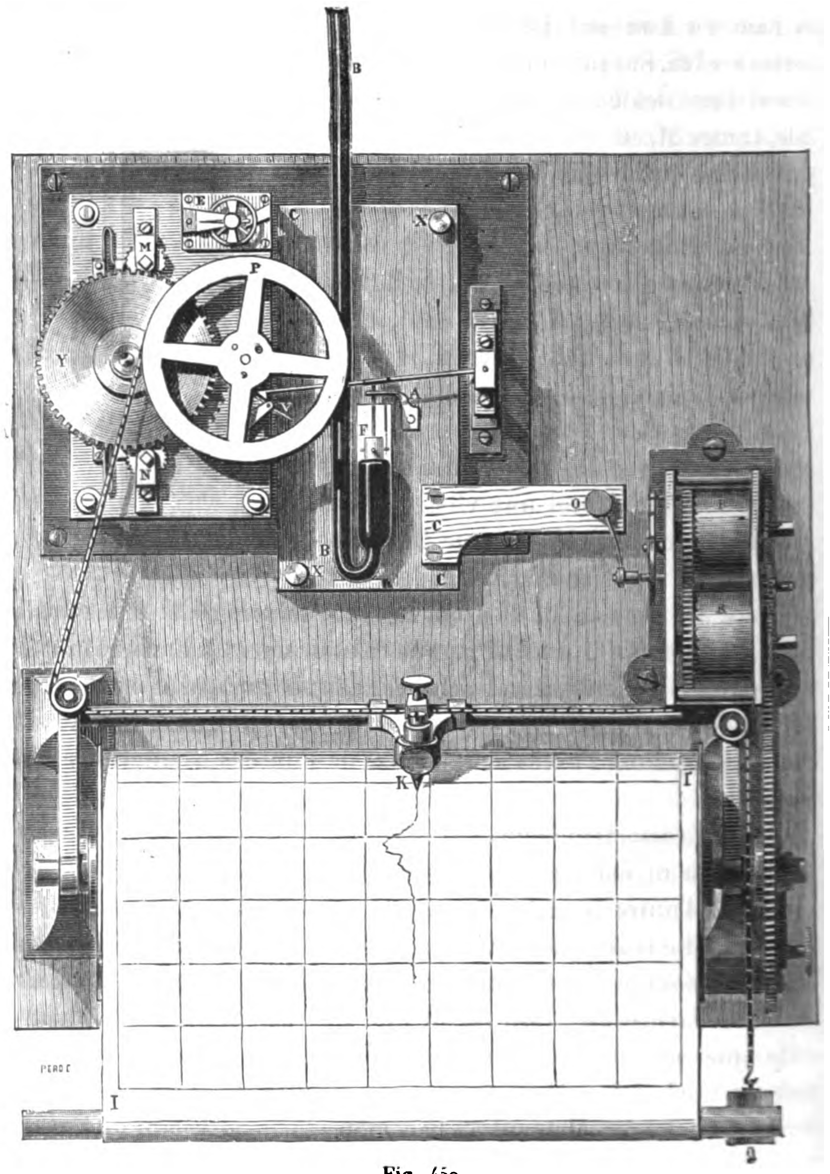


Fig. 459

Le baromètre employé est un baromètre à siphon BB, monté sur une planchette CC qui se fixe, au moyen de deux boutons

..llère que l'arbre du train met en mou-
la roue Y. Un flotteur d'ivoire F,
..ite branche, presse contre une
..née par un crochet qui, en
..le volant est arrêté, le
..bre du train dans un
..elle tout le baro-
..'arbre tourne
..uite, ces
..alle dans
..tact avec le
baromètre tout
..nière que le niveau
..ns l'espace; en même
celle d'une poulie P, sur
..ndu par le poids Q, entraîne
..euille de papier H se déroulant
..rlogerie RR′ (1). On obtient ainsi une
.. suite des oscillations perpétuelles de
..ents extrêmement fines et serrées, équiva-
.. un trait unique. Quand l'appareil est conve-
..ruit, ses indications sont sensiblement indépen-
température (2).

..re *Richard*. — Nous indiquerons enfin le baromètre
..ue enregistreur de MM. Richard. Cet instrument se compose
.. série de coquilles vides et armées intérieurement d'un res-
..cambré, qui sont vissées les unes sur les autres, de façon à
..ter leurs déformations qu'un système de leviers transmet à une
..gue aiguille terminée par une plume. La plume appuie sur un

(1) Ce mouvement d'horlogerie actionne aussi un petit marteau O qui frappe périodiquement sur la planchette C, afin de faire prendre aux ménisques du mercure leur forme normale.

(2) Il suffit pour cela que le volume total du mercure contenu dans le siphon soit égal à celui d'une colonne cylindrique ayant une hauteur égale aux $\frac{10}{9}$ de la pression barométrique moyenne, et une section égale à celle de la chambre barométrique (Goulier, *loc. cit.*).

peut donner au volant une vitesse énormément supérieure à celle du barillet.

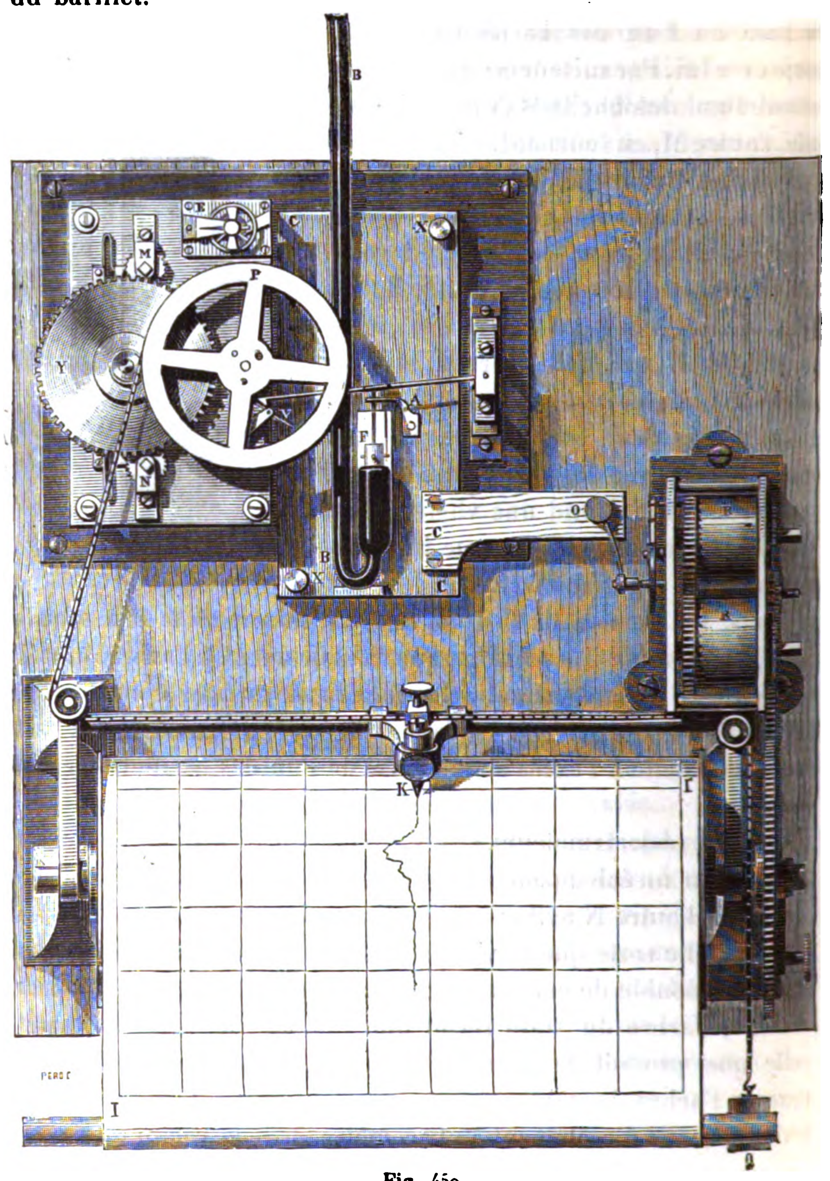


Fig. 459

Le baromètre employé est un baromètre à siphon BB, monté sur une planchette CC qui se fixe, au moyen de deux boutons

molletés XX, à une crémaillère que l'arbre du train met en mouvement par l'intermédiaire de la roue Y. Un flotteur d'ivoire F, reposant sur le mercure de la petite branche, presse contre une aiguille d'acier, très légère, A, terminée par un crochet qui, en s'abaissant, arrête le volant V. Quand le volant est arrêté, le mouvement M marche seul et entraîne l'arbre du train dans un sens tel qu'il fait monter la crémaillère et avec elle tout le baromètre. Le crochet ainsi soulevé dégage le volant, l'arbre tourne en sens inverse, la planchette descend; et ainsi de suite, ces mouvements alternatifs tendant sans cesse à ramener l'aiguille dans la position pour laquelle son crochet se trouve en contact avec le volant. Si la pression atmosphérique change, le baromètre tout entier est déplacé par l'arbre du train, de manière que le niveau du mercure sous le flotteur reste fixe dans l'espace; en même temps la rotation de l'arbre commande celle d'une poulie P, sur laquelle s'enroule un cordon qui, tendu par le poids Q, entraîne le crayon K à la surface d'une feuille de papier II se déroulant sous l'action d'un rouage d'horlogerie RR′ [1]. On obtient ainsi une courbe continue qui, par suite des oscillations perpétuelles de l'arbre, est formée de dents extrêmement fines et serrées, équivalant pratiquement à un trait unique. Quand l'appareil est convenablement construit, ses indications sont sensiblement indépendantes de la température [2].

Baromètre Richard. — Nous indiquerons enfin le baromètre anéroïde enregistreur de MM. Richard. Cet instrument se compose d'une série de coquilles vides et armées intérieurement d'un ressort cambré, qui sont vissées les unes sur les autres, de façon à ajouter leurs déformations qu'un système de leviers transmet à une longue aiguille terminée par une plume. La plume appuie sur un

(1) Ce mouvement d'horlogerie actionne aussi un petit marteau O qui frappe périodiquement sur la planchette C, afin de faire prendre aux ménisques du mercure leur forme normale.

(2) Il suffit pour cela que le volume total du mercure contenu dans le siphon soit égal à celui d'une colonne cylindrique ayant une hauteur égale aux $\frac{10}{9}$ de la pression barométrique moyenne, et une section égale à celle de la chambre barométrique (Goulier, *loc. cit.*).

cylindre enregistreur tournant sous l'action d'un mouvement d'horlogerie logé à l'intérieur même du cylindre. Ce petit appareil, destiné spécialement aux observations météorologiques courantes, est suffisamment exact pour pouvoir être utilement employé dans

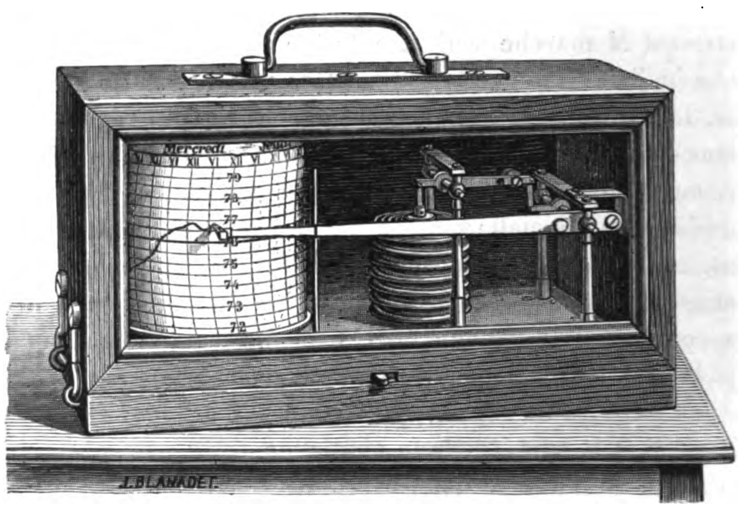


Fig. 460

un laboratoire de physique, à l'effet par exemple de constater que, pendant toute la durée d'une expérience, où l'on a noté à diverses reprises la hauteur d'un baromètre de précision, aucun accident brusque de pression n'est survenu.

280. Variations du baromètre. — La hauteur du baromètre varie avec le lieu et l'instant considérés.

Si d'abord on rapproche les pressions relatives à un même lieu, mais à des époques différentes, on constate que dans nos contrées la colonne barométrique oscille sans cesse, suivant l'état de l'atmosphère. Ces variations irrégulières, d'autant plus marquées que l'on s'éloigne davantage de l'équateur, atteignent sous nos latitudes une amplitude de 55^{mm} à 60^{mm}. Dans les régions tropicales les perturbations accidentelles disparaissent à peu près complètement; on voit alors des variations diurnes se produire avec une telle régularité qu'elles pourraient presque servir à indiquer les heures: depuis 10 heures du matin le baromètre baisse jusque vers

4 heures du soir, moment où il présente la hauteur minimum, puis il remonte et atteint son maximum vers 10 heures du soir; ensuite il baisse de nouveau, et l'on observe vers 4 heures du matin un second minimum à partir duquel il se relève jusqu'à environ 10 heures du matin, époque de son second maximum, les variations de nuit étant moins accusées que celles de jour. L'amplitude de l'oscillation extrême atteint environ $2^{mm},5$ sous les tropiques; elle diminue rapidement lorsqu'on s'éloigne de l'équateur : dans nos contrées elle est à peine de $0^{mm},7$. La variation diurne est alors complètement masquée par les variations accidentelles; mais il suffit de prendre sur les observations d'un mois les moyennes horaires pour la voir se dessiner nettement; il faut au contraire plusieurs années d'observations pour en déterminer les lois (¹). La figure 461, dont les éléments sont empruntés au *Traité de météorologie* de Kœmtz, montre les courbes de la variation barométrique diurne sur le Grand Océan à la latitude 0, à Cumana (lat. 10°), à Padoue (lat. 45°) et à Saint-Pétersbourg (lat. 60°). A cette dernière latitude, la variation diurne est déjà presque nulle.

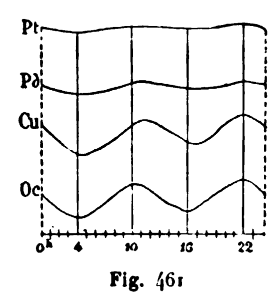


Fig. 461

Nous ne chercherons pas pour le moment à expliquer ces variations diurnes. Nous laisserons également de côté, pour y revenir en temps opportun, l'étude des variations irrégulières du baromètre en un lieu donné, ainsi que celle de la distribution des pressions et de leur déplacement à la surface du globe. Nous remarquerons seulement que par des observations suffisamment prolongées on

(¹) Non seulement l'amplitude de l'oscillation change d'une localité à une autre ; mais les heures *tropiques* (heures des maxima et des minima) ne sont pas les mêmes dans tous les pays sous une même latitude ; elles varient aussi en un même lieu suivant les saisons : en hiver on constate un troisième maximum vers 2 heures du matin.

peut toujours déterminer la pression moyenne en un lieu donné.

On trouve ainsi que la pression moyenne au niveau des mers est d'environ 760^{mm} à nos latitudes. Sous l'équateur elle n'est que 758^{mm} ; à partir du 10e degré de latitude, elle augmente jusque vers le 35e, où elle atteint son maximum : elle s'élève alors à 765^{mm} ou 766^{mm}; au delà, elle diminue ([1]), et au Spitzberg elle n'est plus qu'environ 756^{mm}.

On observe également que, en un lieu donné, la pression moyenne dépend de l'altitude suivant une loi que l'on a pu établir théoriquement, et qui permet de mesurer une hauteur par la simple observation du baromètre aux deux stations extrêmes.

281. Mesure des hauteurs par les observations barométriques. — L'atmosphère étant supposée en équilibre dans toute la colonne comprise entre les deux stations dont on veut déterminer la différence de niveau, menons dans cette colonne deux plans horizontaux infiniment voisins à la hauteur z et à la

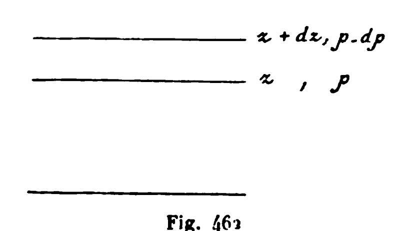


Fig. 462

hauteur $z+dz$ au-dessus de la base de la colonne; et désignons par p et $p-dp$ les pressions respectives aux niveaux z et $z+dz$. La différence de pression $-dp$ est égale au poids d'une colonne d'air de base égale à l'unité, de hauteur dz, et de poids spécifique ϖ; on a donc

$$-dp=\varpi dz.$$

Le poids spécifique ϖ varie d'une couche à l'autre avec toutes les circonstances (pression, température, état hygrométrique, intensité de la pesanteur) qui influent sur le poids. De toutes les causes de variation nous ne considérerons que la pression, les autres

([1]) A Paris, la hauteur réduite au niveau de la mer à 0° est $761^{mm},6$, la pression moyenne à l'Observatoire (altitude 65^m) étant $755^{mm},7$.

quantités étant supposées constantes; en d'autres termes, à l'état réel de la colonne d'air, sauf en ce qui concerne la pression, nous substituerons un état moyen que nous supposerons régner partout.

Si donc on appelle Π le poids spécifique de l'air à la station inférieure où la pression est P, on aura, d'après la loi de Mariotte,

$$\frac{\varpi}{p}=\frac{\Pi}{P}=a,$$

a étant une constante pour la couche considérée. D'où l'équation fondamentale

$$-dp=apdz,$$

dont l'intégrale peut s'écrire soit sous la forme (1)

$$p=Pe^{-az}$$

qui montre, comme Halley l'a indiqué le premier (2), que les hauteurs variant en progression arithmétique, les pressions décroissent en progression géométrique; soit sous la forme (3), également due

(1) L'équation fondamentale peut en effet s'écrire

$$\frac{dp}{dz}=-ap,$$

et en intégrant on a

$$p=Ae^{-az},$$

A étant une constante arbitraire que nous déterminerons par la condition que pour $z=0$, $p=P$, ce qui donne $A=P$.

(2) HALLEY, *Phil. Trans.*, 1685. Mais c'est à Mariotte que revient l'honneur d'avoir le premier entrepris de déterminer le décroissement de la pression avec la hauteur et d'avoir posé les bases du calcul effectué neuf ans plus tard par Halley (MARIOTTE, *Essai sur la nature de l'air*. Paris, 1676).

(3) Écrivons l'équation fondamentale

$$\frac{dp}{p}=-a\,dz,$$

et intégrons, il vient

$$\text{Log}\,p=-az+C^{te},$$

Log désignant un logarithme népérien; et, si nous déterminons comme précédemment la constante,

$$\text{Log}\,p=-az+\text{Log}\,P.$$

à Halley,

$$Z = \frac{1}{a} \operatorname{Log} \frac{P}{p},$$

qui résout immédiatement la question.

En passant aux logarithmes vulgaires, dont la base est $M = 0{,}434\,295$, on a

$$Z = \frac{1}{0{,}434\,295} \cdot \frac{1}{a} \log \frac{P}{p}.$$

Formule complète. — D'après notre hypothèse, a est dans toute la colonne le rapport constant du poids spécifique de l'air à la pression qu'il supporte ; ce sera donc, si l'on veut, le poids de l'air sous la pression $0^m{,}760$ divisé par cette pression. Or, $1^{gr}{,}29743$ étant le poids du litre d'air sec à la température zéro et à la pression $0^m{,}760$, sous le parallèle de 45° et au niveau de la mer, le poids de 1 litre d'air sec à la température t degrés, sous la pression p, à la latitude L et à la hauteur c au-dessus du niveau de la mer, $R = 6\,366\,198^m$ étant le rayon terrestre, est

$$1^{gr}{,}297\,43 \frac{p}{(1 + 0{,}00366\,t)\,0{,}760} (1 - 0{,}0026 \cos 2L)\left(1 - \frac{2c}{R}\right).$$

Ici $p = 0^m{,}760$.

Pour t, nous prendrons, faute de mieux, la moyenne $\frac{t + t'}{2}$ des températures de l'air aux deux stations extrêmes. En outre, afin de tenir compte, approximativement au moins, de ce que l'air n'est pas sec, mais contient toujours une certaine quantité de vapeur d'eau [1],

[1] Si l'on connaît les tensions F et f de la vapeur d'eau aux deux stations, on pourra représenter à la fois l'effet de la température et celui de l'humidité par le facteur $\frac{1}{1 + 0{,}00366 \frac{t + t'}{2}} \left\{ 1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{F}{H} + \frac{f}{h} \right) \right\}$, H et h étant les hauteurs barométriques brutes aux deux stations ; mais le plus souvent il faudra se contenter de l'approximation plus grossière du texte, approximation que d'ailleurs l'expérience a montrée généralement suffisante.

on remplacera 0,00366 par 0,00400; le premier facteur deviendra ainsi $\frac{1}{1+\frac{2(t+t')}{1000}}$.

Pour c, nous mettrons $s+\frac{Z}{2}$, s étant l'altitude de la station inférieure, et Z la différence de niveau des deux stations; et le dernier facteur s'écrira $1-\frac{2s+Z}{6\,366\,198}$.

Ainsi le poids moyen, en tonnes, de 1 mètre cube d'air de la colonne, ramené à la pression $0^m,760$, est

$$0,001\,29743\,\frac{1}{1+2\,\frac{t+t'}{1000}}(1-0,0026\cos 2L)\left(1-\frac{2s+Z}{6\,366\,198}\right);$$

et $0,760\times 13,596$ étant, en tonnes, la pression sur 1^{mq}, on a

$$\frac{1}{a}=\frac{0,760\times 13,596}{0,001\,29743}\left(1+2\,\frac{t+t'}{1000}\right)(1+0,0026\cos 2L)\left(1+\frac{2s+Z}{6\,366\,198}\right).$$

En effectuant les divisions $\frac{1}{1-0,0026\cos 2L}$ et $\frac{1}{1-\frac{2s+Z}{6\,366\,198}}$, on s'est arrêté au terme du premier ordre, et l'on a négligé le carré et les puissances supérieures des quantités toujours très petites $0,0026\cos 2L$ et $\frac{2s+Z}{6\,366\,198}$.

P et p sont les pressions exactes aux deux stations. Or ces pressions ne sont pas données immédiatement par les lectures barométriques brutes H et h. Certaines corrections sont nécessaires.

Il faut d'abord réduire ces lectures à une même température. Pour cela on fera la réduction comme nous l'avons indiqué plus haut (274); ou, plus simplement, on ramènera la hauteur h du baromètre supérieur, observée à la température T', à la valeur h_1 qu'elle aurait eue à la température T du baromètre de la station

inférieure. Supposons l'échelle barométrique en laiton, la différence des dilatations du mercure et du laiton pour 1 degré est $0,000\,161 = \frac{1}{6200}$; on a donc

$$h_1 = h\left(1 + \frac{T-T'}{6200}\right).$$

En outre, par suite de la diminution de la pesanteur suivant la verticale, il faut multiplier cette hauteur h_1 par $\left(1 - \frac{2Z}{R}\right)$ pour la rendre comparable à la hauteur observée à la station inférieure; on a ainsi

$$h_2 = h\left(1 + \frac{T-T'}{6200}\right)\left(1 - \frac{2Z}{R}\right).$$

Les hauteurs h_2 et H sont alors proportionnelles aux pressions p et P, et l'on peut écrire

$$\log\frac{P}{p} = \log\left\{\frac{H}{h}\left(1 - \frac{T-T'}{6200}\right)\left(1 + \frac{2Z}{R}\right)\right\},$$

en effectuant les divisions au même degré d'approximation que précédemment.

On a donc

$$\log\frac{P}{p} = \log\frac{H}{h} + \log\left(1 - \frac{T-T'}{6200}\right) + \log\left(1 + \frac{2Z}{R}\right).$$

Développons les deux derniers logarithmes, et bornons-nous dans chaque développement au premier terme, nous aurons

$$\log\frac{P}{p} = \log\frac{H}{h} - \frac{0,434\,295}{6200}(T-T') + 0,434\,295\frac{2Z}{6\,366\,198},$$

$$= \log\frac{H}{h} - 0,000\,070\,045(T-T') + 0,868\,59\frac{Z}{6\,366\,198}.$$

Substituant, on a

$$\frac{0{,}760 \times 13{,}596}{0{,}434\,295 \times 0{,}001\,297\,43}\left(1+2\frac{t+t'}{1000}\right)(1+0{,}0026\cos 2L)\left(1+\frac{2s+Z}{6\,366\,198}\right)$$
$$\left\{\log\frac{H}{h} - 0{,}000\,070\,045(T-T') + 0{,}868\,59\frac{Z}{6\,366\,198}\right\}.$$

Telle est la formule de Laplace.

Elle renferme une constante, $\frac{0{,}760 \times 13{,}596}{0{,}434\,295 \times 0{,}001\,297\,43} = 18\,400^{m}$, absolument déterminée. Mais au lieu de s'adresser exclusivement à la théorie, il est préférable d'admettre la forme de l'expression de Z, et de déterminer empiriquement la constante par la mesure des pressions en deux lieux dont on connaisse la différence de hauteur, ou plutôt par un ensemble d'observations faites à des altitudes connues. Comme résultat d'une série de mesures dans les Pyrénées, Ramond avait trouvé $18\,393^{m}$; depuis, M. Oltmanns a obtenu $18\,336^{m}$, valeur qu'a adoptée le Bureau des longitudes. On a alors

$$Z = 18\,336^{m}\left(1+2\frac{t+t'}{1000}\right)(1+0{,}0026\cos 2L)\left(1+\frac{2s+Z}{6\,366\,198}\right)$$
$$\left\{\log\frac{H}{h} - 0{,}000\,070\,045(T-T') + 0{,}868\,59\frac{Z}{6\,366\,198}\right\},$$

ou, en effectuant ($18\,336 \times 0{,}000\,070\,045 = 1^{m},2843$,
et $18\,336 \times 0{,}868\,59 = 15\,926$)
et en négligeant des quantités petites du deuxième ordre,

$$Z = 18\,336^{m}\log\frac{H}{h}\left(1+2\frac{t+t'}{1000}\right)(1+0{,}0026\cos 2L)\left(1+\frac{2s+Z}{6\,366\,198}\right)$$
$$-1^{m},2843(T-T') + 15\,926\frac{Z}{6\,366\,198},$$

ou encore, en remplaçant dans le dernier terme Z par sa valeur

approchée $18336^m \log \frac{H}{h}\left(1+2\frac{t+t'}{1000}\right)(1+0026\cos 2L)$ et en réunissant les termes en $\frac{1}{R}$,

$$Z = 18336^m \log \frac{H}{h}\left(1+2\frac{t+t'}{1000}\right)(1+0{,}0026\cos 2L)\left(1+\frac{2s+Z+15926}{6366198}\right) - 1^m{,}2843(T-T'),$$

ou, enfin, si l'on porte au premier terme la correction en $T-T'$ (ce qui n'introduit que des quantités petites du deuxième ordre), et si l'on sépare la correction relative à la variation de g entre les deux stations, du terme relatif à la hauteur s de la station inférieure au-dessus de la mer ([1]),

$$Z = \left(18336^m \log \frac{H}{h} - 1^m{,}2843(T-T')\right) \times \begin{cases} \left(1+2\frac{t+t'}{1000}\right) \\ \left(1+0{,}0026\cos 2L+\frac{Z+15926}{6366198}\right) \\ \left(1+\frac{s}{3183099}\right) \end{cases}$$

ce qui est la formule complète, telle que la donne l'*Annuaire du Bureau des longitudes*.

Le même annuaire publie chaque année des tables, dressées par M. Mathieu, qui fournissent tout calculés le terme principal $18336^m \log \frac{H}{h}$ et les diverses corrections. De la table I (contenant les valeurs de $18336^m \log H$ ou h, diminuées de la constante $44428^m{,}1$) j'extrais les valeurs suivantes de $Z_1 = 18336 \log \frac{760}{h} = (18336 \log 760 - C^{te}) - (18336 \log h - C^{te})$:

([1]) Cette hauteur est généralement inconnue, mais ordinairement on peut prendre avec une approximation suffisante $s = 18336^m \log \frac{760}{H}$.

h	Z_1	h	Z_1
mm	m	mm	m
800	— 508,4	500	3334,3
790	— 308,3	490	3495,2
780	— 206,8	480	3659,4
770	— 104,1	470	3827,0
760	0	460	3998,3
750	105,5	450	4173,3
740	212,4	440	4352,3
730	320,8	430	4535,4
720	430,6	420	4722,7
710	542,0	410	4914,6
700	654,9	400	5111,3
690	769,5	390	5312,9
680	885,8	380	5519,7
670	1003,7	370	5732,1
660	1123,5	360	5950,3
650	1245,0	350	6174,6
640	1368,5	340	6405,4
630	1494,0	330	6643,2
620	1621,3	320	6888,2
610	1750,8	310	7141,0
600	1882,5	300	7402,1
590	2016,3	290	7672,1
580	2152,4	280	7951,5
570	2290,9	270	8241,1
560	2431,9	260	8541,7
550	2575,3	250	8854,0
540	2721,5	240	9179,0
530	2870,3	230	9518,0
520	3022,0	220	9871,8
510	3176,6	210	10242

Ces nombres Z_1, même dans le cas de $T = T' = t = t' = 0$, $L = 45°$ et $s = 0$, doivent être augmentés de $Z_1 \frac{Z + 15926}{6366198}$ pour donner la hauteur exacte de la station supérieure. On calculera la correction $Z_1 \frac{Z + 15926}{6366198}$ d'une manière très suffisamment exacte en mettant pour Z sa valeur approchée $Z_1 = 18336^{m} \log \frac{H}{h}$; on trouve ainsi

Hauteur approchée Z_1	$Z_1 \frac{Z_1 + 15926}{6366198}$	Hauteur approchée Z_1	$Z_1 \frac{Z_1 + 15926}{6366198}$
m	m	m	m
100	0,2	3500	10,7
300	0,8	4000	12,5
500	1,3	4500	14,4
1000	2,7	5000	16,4
1500	4,1	5500	18,5
2000	5,6	6000	20,7
2500	7,2	6500	22,9
3000	8,9	7000	25,2

Mais, en général, on aura auparavant à faire une double correction plus importante, représentée par les deux termes

$$-1^m,2843(T-T') \text{ (table II de l'}\textit{Annuaire}\text{), et } \left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right).$$

On devra ensuite faire les deux petites corrections

$$(1+0,0026\cos 2L) \text{ (table III) (1), et } \left(1+\frac{s}{3183099}\right) \text{ (table IV).}$$

Lorsqu'on opère par un temps calme (2), la mesure d'une hauteur au moyen du baromètre comporte autant de précision que la détermination de la même hauteur par les procédés géodésiques. Il faut remarquer en effet que la mesure de l'angle que fait avec l'horizon une droite menée d'un point de la plaine au sommet d'une montagne est, par suite de la réfraction, entachée précisément de la même incertitude que la mesure barométrique. Pour être exacte, la correction de réfraction nécessiterait, comme la formule barométrique, une connaissance parfaite de la constitution de l'atmosphère entre les deux stations. En réalité, les deux problèmes n'en font qu'un et, théoriquement, les deux méthodes sont équivalentes.

Il est d'ailleurs des cas nombreux où le baromètre peut seul être employé. Ce sera toujours le compagnon obligé du voyageur en

(1) La table III de l'*Annuaire* donne en une seule fois cette correction et celle qu'entraîne la variation de g entre les deux stations

$$A\left\{0,0026\cos 2L+\frac{A+15926}{6366198}\right\},$$

A désignant la hauteur approchée

$$A=\left(18336^m\log\frac{H}{h}-1^m,2843(T-T')\right)\left(1+2\frac{t+t'}{1000}\right).$$

(2) Un vent violent peut altérer considérablement les mesures. Ainsi, M. Montigny a trouvé pour l'altitude de la galerie supérieure de la cathédrale d'Anvers des nombres différant de 8 à 10^m du nombre vrai (140^m) quand le vent soufflait violemment de l'est (on trouvait alors des nombres trop faibles) ou de l'ouest (on avait des nombres trop forts). Par les vents nord ou sud, les différences étaient presque nulles (MONTIGNY, *Bulletin de l'Académie de Bruxelles* (2) XI, 315 et XXIII, 125; 1861-67). M. Renou a constaté de même que le vent et la température de l'air ont une influence notable sur la différence des hauteurs barométriques au parc de Saint-Maur (altitude 46^m,38) et à l'Observatoire de Paris (altitude 67^m,38) (RENOU, C. R., LXXXVI, 358 et 503; 1878).

montagnes et l'instrument sans rival pour un nivellement rapide dans un pays accidenté (en ce cas un bon baromètre métallique est singulièrement commode).

Formules abrégées. — Souvent alors on n'a affaire qu'à des différences de hauteur de quelques centaines et parfois quelques dizaines de mètres. Dans ce cas, il serait aussi gênant qu'inutile de recourir à la formule complète que nous avons donnée plus haut. On se servira de la formule de Halley

$$Z = 18400^{m}(\log H_0 - \log h_0),$$

H_0 et h_0 étant les hauteurs barométriques aux deux stations, réduites à zéro. On pourra évaluer ainsi les valeurs de Z inférieures à 700 ou 800 mètres, pourvu seulement que la température de l'air ne soit pas trop différente de zéro; sinon, il faudrait tenir compte de la température comme d'habitude et prendre

$$Z = 18400^{m}(\log H_0 - \log h_0)\left(1 + 2\frac{t+t'}{1000}\right).$$

On peut même, pour ces faibles hauteurs, employer une formule débarrassée de logarithmes. Posons, en effet,

$$H + h = k,$$

et

$$H - h = \varepsilon;$$

ε étant par hypothèse une quantité petite par rapport à h, nous aurons

$$\begin{aligned}\log H - \log h &= \log\frac{k+\varepsilon}{2} - \log\frac{k-\varepsilon}{2}\\ &= \log\frac{k}{2} + \log\left(1+\frac{\varepsilon}{k}\right) - \log\frac{k}{2} - \log\left(1-\frac{\varepsilon}{k}\right),\end{aligned}$$

ou, en développant $\log\left(1+\frac{\varepsilon}{k}\right)$ ainsi que $\log\left(1-\frac{\varepsilon}{k}\right)$, et en nous bornant au premier terme du développement,

$$\begin{aligned}\log H - \log h &= M\frac{2\varepsilon}{k}\\ &= 2M\frac{H-h}{H+h}.\end{aligned}$$

La formule de Halley devient donc

$$Z = 2M\,18400^{m}\frac{H-h}{H+h},$$

ou

$$Z = 16000^{m}\frac{H-h}{H+h},$$

et, si l'on introduit le terme relatif à la température de l'air,

$$Z = 16000^{m}\frac{H-h}{H+h}\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right).$$

C'est la formule de Babinet ([1]).

II. — PRINCIPE D'ARCHIMÈDE.

282. Extension du principe d'Archimède aux gaz. — *Poussée exercée par les gaz.* — Le principe d'Archimède convient aux gaz comme aux liquides ([2]). Pour le montrer on se sert du *baroscope* ([3]) : une petite balance sensible porte d'un côté une

([1]) On obtient immédiatement cette formule en supposant que dans toute la colonne entre les deux stations l'air a même densité, égale à sa densité sous la pression moyenne $\frac{H+h}{2}$. Alors, en effet, on a, suivant la notation qui nous a servi plus haut,

$$H-h = a\frac{H+h}{2}Z,$$

d'où

$$Z = \frac{2}{a}\frac{H-h}{H+h},$$

et, comme à zéro sous le parallèle de 45° et au niveau de la mer $\frac{1}{a} = 18400M$, on a bien ainsi la formule de Babinet.

([2]) Toutefois l'application rigoureuse en est plus délicate par suite des variations de la densité aux divers points d'une même masse gazeuse ; ainsi le poids apparent d'une perche couchée sur le sol ou dressée verticalement n'est pas exactement le même, le poids de l'air déplacé n'étant pas le même dans les deux cas.

([3]) Otto de Guericke, qui imagina cet appareil, le destinait à indiquer par les changements d'inclinaison du fléau les variations de la pression atmosphérique, de là son nom; malheureusement l'équilibre est affecté aussi par les changements de température (Otto von Guericke, *Lettre au P. Schott*; 1661).

rosse boule creuse, de l'autre une petite boule pleine, attachée à un crou mobile le long de l'extrémité finement filetée du fléau; en lonnant à cet écrou une position convenable, on amène les deux oules à se faire exactement équilibre dans l'air. Plaçant alors l'appareil sous la cloche de la machine pneumatique, on fait le vide : e fléau bascule du côté de la grosse boule. L'effort exercé en ce sens par la pesanteur est donc réellement plus grand, et l'équilibre

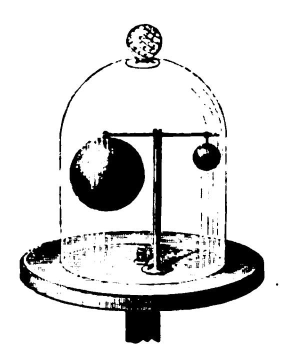


Fig. 463

n'existait dans l'air que parce que la boule la plus volumineuse subissait de la part du fluide environnant une poussée plus forte.

Influence de l'air sur les pesées. — Cette expérience montre en même temps la nécessité de faire subir à toutes les pesées effectuées dans l'air, des corrections, dont le détail trouvera sa place après l'étude de la densité de l'air.

Aérostats. — Les aérostats sont une application immédiate du principe d'Archimède.

De tous temps, l'homme a rêvé de s'élever dans les airs [1]. Depuis Dédale et Icare, que la fable nous montre s'envolant de l'île de Crête, au moyen d'ailes collées à leurs épaules avec de la cire, plus d'un malheureux paya de sa vie la tentative de s'aventurer à son tour dans l'espace, soutenu par des ailes. Telle était pourtant la confiance de ces audacieux, que le savant bénédictin Olivier de Malmesbury, après s'être rompu les jambes dans une chute terrible, ne regrettait que d'avoir omis de se mettre une queue! Quand la

[1] Voir FIGUIER, *Exposition et Histoire des principales découvertes scientifiques modernes*. III. Paris, Masson; 1855.

pesanteur de l'air fut établie, à côté de ces désirs irréfléchis se fit jour l'idée plus raisonnable de se tenir en équilibre dans l'atmosphère par l'emploi de corps moins lourds que l'air lui-même. En 1670, le P. Lana ([1]) publiait le projet d'une barque volante, enlevée dans les airs par quatre sphères creuses en cuivre mince, à l'intérieur desquelles on aurait fait le vide. Un siècle plus tard, le P. Gallien ([2]) s'amusait à décrire un immense navire aérien soutenu par l'air raréfié. Il paraîtrait même qu'en 1736, à Lisbonne, un certain Gusman aurait réussi à s'élever de quelques mètres au moyen d'une sorte de machine aérostatique ([3]).

De tous ces projets, de toutes ces tentatives, rien ne subsistait quand les frères Montgolfier firent leur belle découverte. Voici, d'après Joseph Montgolfier lui-même, comment l'idée lui en vint ([4]). « Il se trouvait alors à Avignon. C'était en 1782, à l'époque où les armées alliées faisaient le siège de Gibraltar. Seul, au coin d'une cheminée d'auberge, rêvant selon sa coutume, il songeait au moyen d'atteindre au corps de cette place, inaccessible par *terre* et par mer. Ne pourrait-on pas y arriver à travers les airs? La fumée s'élève dans la cheminée, pourquoi n'emmagasinerait-on pas cette fumée de manière à en composer une force disponible? » Il combine aussitôt son projet, construit un vaste parallélipipède de taffetas, le leste par en bas, le remplit de fumée, et le *voit* monter vers le plafond au grand étonnement de son hôtesse. De retour près de son frère Étienne, que de semblables pensées avaient déjà préoccupé plus d'une fois, il se met à l'œuvre avec lui ; et, quelques mois plus tard, le 5 juin 1783, les deux frères présentaient aux États particuliers du Vivarais, réunis à Annonay, un vaste sac en toile d'emballage, doublé de papier, et cousu sur un réseau de ficelles s'attachant en bas à un châssis qui maintenait l'ouverture libre et en même temps lestait l'appareil. Au-dessous de ce sac, pesant environ 500 livres, ils allumèrent de la paille mouillée, mêlée de laine hachée, et bientôt

([1]) P. Lana, *Prodromo all'arte maestra*. Brescia; 1670.
([2]) P. Gallien, *Traité sur l'art de naviguer dans les airs*. Avignon; 1755.
([3]) Voir Blerzy, *Revue des Deux-Mondes;* 1863, p. 269.
([4]) Voir Dupuy de Lôme, *Discours prononcé au centenaire des frères Montgolfier*, à Annonay, le 13 août 1883.

le vit s'enfler rapidement et s'arrondir en un beau globe de
uze mètres de diamètre, que vingt bras vigoureux avaient grand
ine à retenir. Puis, à un signal donné, ce globe s'élança rapide-
ent dans les airs à plus de mille mètres, il y plana pendant dix
inutes, après quoi il redescendit lentement jusqu'à terre.

Le retentissement de cette expérience fut immense. Le profes-
ur Charles voulut la répéter au plus vite à Paris. Pour remplir
n appareil, il décida immédiatement d'employer l'hydrogène, que
avendish avait découvert depuis peu d'années. Malgré les diffi-
ultés sans nombre d'une entreprise si nouvelle, en quelques
emaines, avec le concours des frères Robert, habiles construc-
eurs d'instruments de physique, il fabriqua un ballon de taffetas
gommé, de 4 mètres de diamètre, et il parvint à le remplir du gaz
légagé par l'action de l'acide sulfurique sur le fer. Le 27 août 1783,
devant trois cent mille personnes, le premier ballon à hydrogène
s'éleva du Champ-de-Mars, se soutint trois quarts d'heure dans les
airs, et alla tomber auprès d'Écouen, à cinq lieues de Paris.

Le 21 octobre de la même année, Pilastre du Rozier et le marquis d'Arlandes font en montgolfière le premier voyage aérien. Un mois plus tard, Charles entreprend à son tour une ascension pour laquelle il crée, en quelque sorte tout d'une pièce, l'art de l'aérostation.

C'est ainsi qu'il établit :

1° L'appendice inférieur, laissé ouvert pendant l'ascension pour éviter toute rupture par excès de pression du gaz trop dilaté.

2° La soupape supérieure, au moyen de laquelle, en donnant issue au gaz intérieur, on détermine la descente lente et graduelle de l'aérostat.

3° Le lest, qui permet de régler l'ascension et de modérer la vitesse de chute, ou de se relever à propos.

4° Le filet, enveloppant le ballon sans y être fixé, se prêtant à ses contractions ou dilatations, et répartissant également sur toute la surface la charge de la nacelle où s'embarquent les voyageurs.

5° Enfin le baromètre, qui indique à chaque instant la hauteur à laquelle on se trouve dans l'atmosphère [1].

[1] A la même époque, le physicien Lenormand inventa, à Montpellier, le parachute, qui n'a d'ailleurs jamais servi qu'à donner le spectacle émouvant d'un homme se précipitant d'une grande hauteur dans l'espace.

C'est avec un aérostat ainsi organisé et rempli seulement en partie (1), que Charles et Robert partirent du jardin des Tuileries,



Fig. 464

le 1er décembre 1783, et après deux heures d'une heureuse traversée, atterrirent dans la prairie de Nesles, à neuf lieues de Paris. Robert quitta la nacelle; mais Charles, voulant faire quelques expériences, s'élança de nouveau seul dans les airs, et en moins de dix minutes, il monta à plus de trois mille mètres. Là, il se livra à de rapides observations de physique, et au bout d'une demi-heure il

(1) Charles avait tenu, non sans raison, à cette précaution omise par les frères Robert pour le ballon perdu du 27 août; malgré l'opposition de Charles, ils avaient

redescendait doucement à une lieue de son second point de départ.

La route des airs était ouverte désormais. Les ascensions se sont succédé nombreuses, mais bien peu, jusqu'à ce jour, ont réellement servi la science. Nous noterons seulement les plus remarquables :

18 juillet 1803,	Robertson et Lhoöst	7170^{m}
20 août 1804,	Biot et Gay-Lussac	4000
16 septembre 1804,	Gay-Lussac	7016
27 juillet 1850,	Barral et Bixio	7039
5 septembre 1862,	Glaisher	8838 (1)
15 avril 1875,	Tissandier, Sivel et Crocé	8600 (2)

Ainsi l'homme a su s'élever dans les airs aussi haut que les plus hautes montagnes. Malheureusement, il n'a pas, jusqu'à présent, réussi à s'y diriger. Des essais pleins de promesses ont cependant été faits dans ces dernières années. En 1855, Giffard se risqua à monter un aérostat ovoïde, muni d'une hélice, que faisait tourner une petite machine à vapeur de trois chevaux; mais l'absence d'un moyen propre à tenir le ballon toujours plein et parfaitement gonflé rendit cette expérience dangereuse. Le 2 février 1872, M. Dupuy de Lôme effectua une ascension avec un

voulu gonfler entièrement l'aérostat au départ; aussi l'expansion du gaz amena-t-elle sa rupture au haut de sa course.

On peut remarquer d'ailleurs que, tant qu'un ballon n'est pas complètement gonflé, sa *force ascensionnelle* reste sensiblement constante. En effet, la force ascensionnelle est mesurée par l'excès de la poussée de l'air sur le poids total du ballon. La poussée se compose de deux parties, dont l'une relative aux pièces solides de l'appareil est variable, mais négligeable en face de la deuxième, celle qui s'exerce sur le gaz remplissant l'aérostat. Cette dernière est donc seule à considérer. Or, tant que le gaz intérieur peut se dilater librement de façon à rester en équilibre de pression avec l'air extérieur, il prend le volume correspondant à cette pression, d'après la loi de Mariotte. Le volume de l'air déplacé varie donc en sens inverse de la pression et, par suite, le poids de cet air reste invariable comme celui du gaz intérieur. En d'autres termes, la poussée est constante. Si d'autre part, malgré la diffusion, le poids total de l'aérostat n'a pas changé, la force ascensionnelle sera elle-même constante. Conséquemment, le ballon tendra à prendre un mouvement uniformément accéléré; la force ascensionnelle au départ doit donc être très faible : quelques kilogrammes suffisent.

(1) A cette hauteur M. Glaisher s'évanouit; et le ballon, qui avait alors une vitesse ascensionnelle d'au moins cinq mètres par seconde, monta encore sans doute de plusieurs centaines de mètres.

(2) D'après les tubes barométriques Janssen, seuls témoins de la hauteur qu'atteignit une nacelle où étaient deux morts et un homme évanoui.

au gouvernail : l'aérostat se comporta parfaitement, prenant sous la poussée de son hélice, mue par huit manœuvres, une vitesse propre de huit kilomètres et demi à l'heure. Tout récemment enfin,

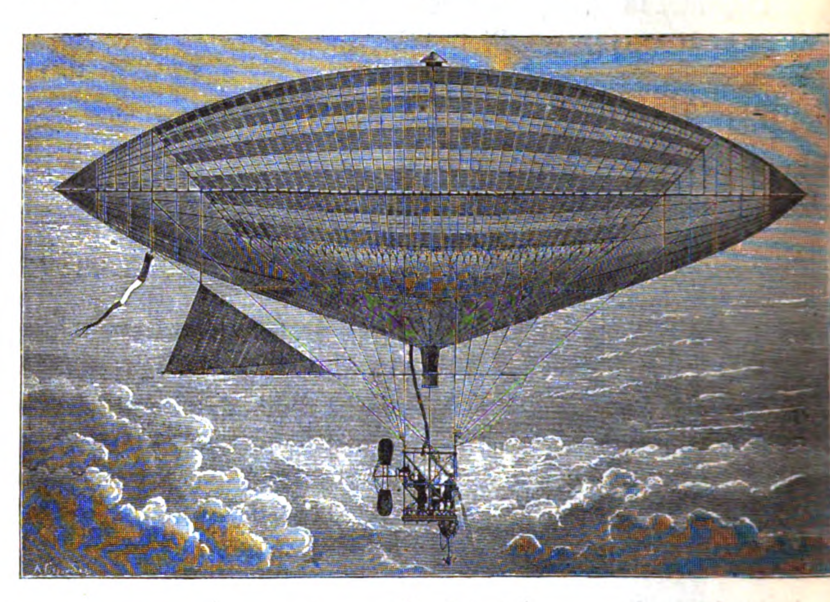


Fig. 465

MM. Tissandier ont fait une expérience intéressante avec u aérostat très bien construit, pourvu d'une hélice actionnée par u moteur électrique qu'animait une batterie de vingt-quatre élément au bichromate de potasse (¹).

(¹) Voir *La Nature*; 2e semestre 1883.



CHAPITRE II

ÉLASTICITÉ

I. — LOI DE MARIOTTE

283. Loi de Mariotte. — La loi qui régit la compressibilité des gaz à température constante a été trouvée presque simultanément par Boyle (¹) en Angleterre et par Mariotte (²) en France; toutefois, si Boyle a publié le premier ses expériences, il ne sut pas en tirer l'énoncé clair que donna le physicien français. C'est donc avec quelque raison que le nom de *loi de Mariotte* a passé dans l'usage. Cette loi, très simple et d'une importance capitale en physique, est la suivante :

Les volumes qu'une même masse gazeuse présente, à température constante, sont inversement proportionnels aux pressions que le gaz supporte.

Ou, en d'autres termes :

Le produit du volume v d'une masse gazeuse, par la pression p qu'elle supporte, est constant à une même température,

$$pv = C^{te}.$$

On peut encore énoncer la loi sous cette forme souvent utile :

La densité d'un gaz à température constante est proportionnelle à la pression.

(¹) Boyle, *Nova experimenta physico-mechanica de vi aeris elastica.* London; 1662.
(²) Mariotte, *Essai sur la nature de l'air.* Paris, 1676.

Cette loi a été établie exactement de la même manière par Mariotte et par Boyle. Un tube de verre AB, recourbé sous la forme d'un U à branches inégales, la petite branche A étant fermée et la grande branche B ouverte, constitue l'appareil qui servit à démontrer la loi pour les pressions supérieures à la pression atmosphérique. Ce tube, que l'on appelle encore au-

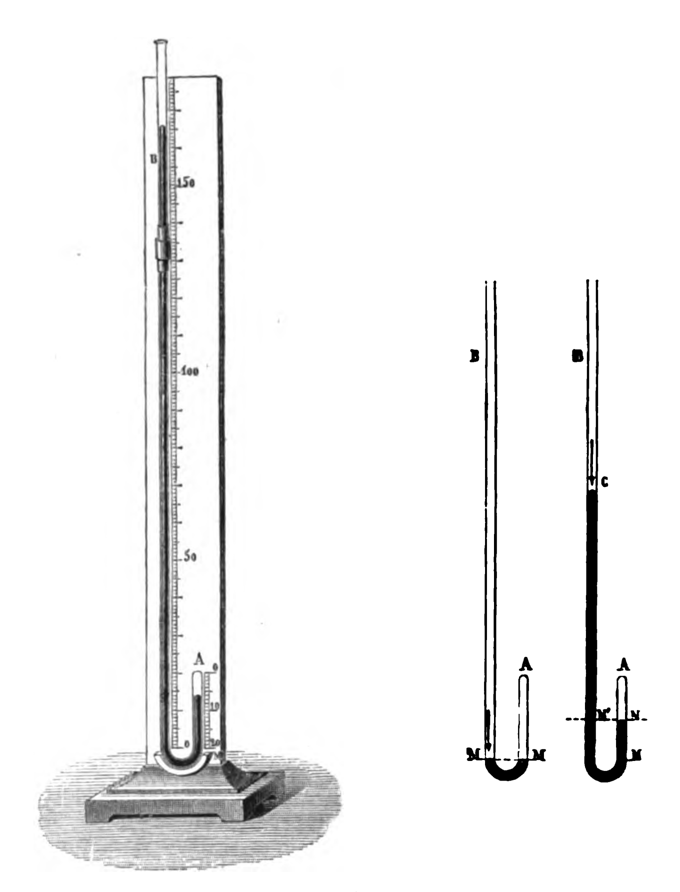


Fig. 466

jourd'hui *tube de Mariotte*, est fixé sur une planchette verticale, et muni du côté de la branche fermée de deux graduations, l'une en parties d'égale capacité, l'autre en parties d'égale longueur : ces deux graduations ont leur origine commune à peu de distance de la courbure du tube, et sur la même horizon-

ale que le zéro d'une division en parties d'égale longueur, courant le long de la grande branche ouverte. Pour opérer, on commence par enfermer dans la petite branche un volume donné d'air sous la pression atmosphérique : à cet effet, on verse un peu de mercure dans le tube par l'ouverture de la grande branche et, en inclinant la planchette autour de l'arête postérieure de sa base, on fait communiquer l'air des deux branches. Quand on ramène la planchette dans la verticale, le mercure se met au même niveau dans les deux branches, et il est aisé de faire que ce niveau MM coïncide avec le zéro commun des deux échelles. On a ainsi en A un volume connu d'air sous la pression atmosphérique. On verse du mercure en B jusqu'à réduire le volume du gaz à moitié AN; et l'on constate que la différence CN′ des niveaux du mercure dans les deux branches est égale à la hauteur actuelle de la colonne barométrique; la pression du gaz est donc deux atmosphères, conformément à la loi. On réduit ensuite le volume du gaz au tiers, et pour cela il faut établir la différence des niveaux du mercure dans les deux branches égale à deux fois la hauteur actuelle du baromètre : par suite, la pression du gaz est de trois atmosphères. La loi se trouve ainsi démontrée pour les pressions supérieures à la pression atmosphérique.

Pour les pressions moindres que la pression atmosphérique, on emploie le baromètre à cuvette profonde. On remplit le tube A en partie seulement de mercure, on le bouche avec le pouce en y emprisonnant un certain volume d'air, et on le retourne sur une cuvette profonde M. On saisit le tube avec une pince en bois, et on l'enfonce d'abord de manière à établir l'égalité de niveau à l'intérieur et à l'extérieur : l'air intérieur est alors à la pression atmosphérique et occupe un certain volume AM que l'on marque. On soulève le tube de façon à doubler le volume du gaz AN, et l'on constate que le mercure s'élève dans le tube à une hauteur MN égale à la moitié de la hauteur barométrique actuelle. Or, la pression du gaz intérieur est égale à la pression atmosphérique, diminuée de la colonne de mercure soulevée dans le tube. Cette pression est donc d'une demi-atmosphère, ce qui vérifie la loi. Si on tire le tube de manière à tripler le volume du gaz, le mercure monte

aux deux tiers de la hauteur de la colonne barométrique; et en général si on rend le volume n fois plus grand, la hauteur du

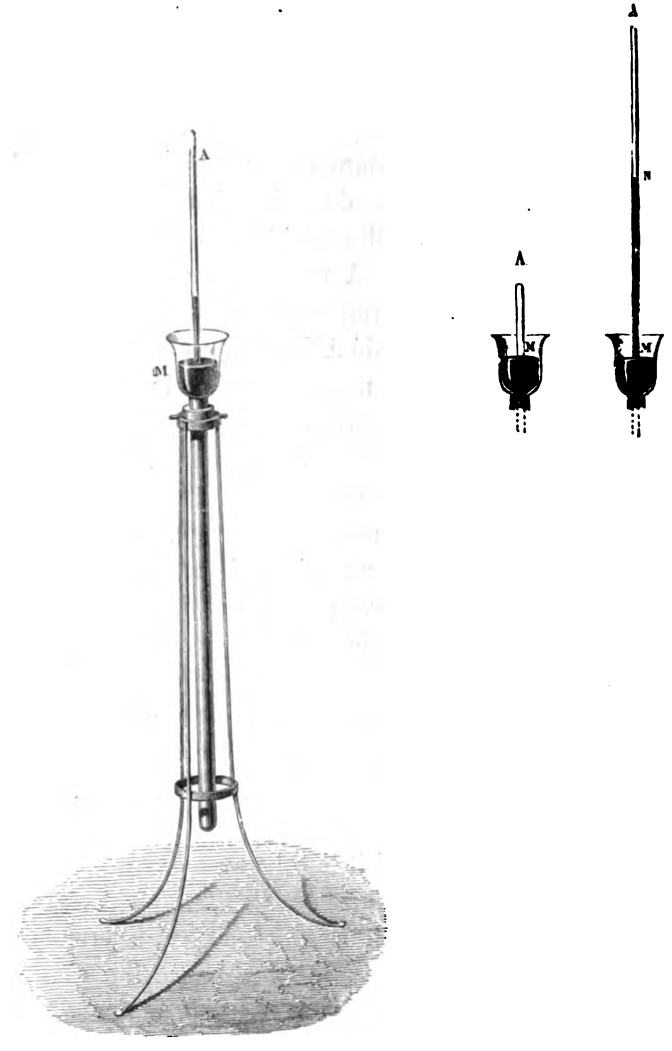


Fig. 467

mercure dans le tube sera les $\frac{n-1}{n}$ de la hauteur du baromètre.

Ces expériences, faites seulement sur l'air atmosphérique et dans des limites restreintes, ne comportent pas grande précision.

284. Expériences postérieures à celles de Boyle et de Mariotte. — Depuis Boyle et Mariotte, maints physiciens ont cherché à s'assurer de l'exactitude de la loi pour l'air aux pressions élevées et de son application aux autres fluides élastiques. Musschenbroek (1), Sulzer (2), Robison (3) abordèrent la question sans succès.

Expériences d'Œrstedt et Swendsen. — Œrstedt et Swendsen (4) firent des expériences plus précises, et réussirent à mesurer les pressions de l'air jusqu'à 8 atmosphères, par la longueur de la colonne de mercure à laquelle elles pouvaient faire équilibre : les volumes se trouvèrent assez exactement en raison inverse des pressions correspondantes. Ils étendirent même leurs observations jusqu'à 60 atmosphères, en déterminant les pressions par les poids nécessaires pour maintenir fermée une soupape adaptée sur le réservoir où l'on comprimait le gaz : ce réservoir était la crosse d'un fusil à vent ; en la pesant chaque fois, on avait le poids de l'air introduit et par suite sa densité. Ces dernières mesures ne doivent évidemment être considérées que comme approximatives : néanmoins on en peut conclure que jusqu'à 60 atmosphères l'air ne s'écarte pas sensiblement de la loi de Mariotte. Au contraire, pour les gaz que Faraday (5) venait de liquéfier (ammoniaque, acide sulfureux, etc.), Œrstedt et Swendsen trouvèrent, même à des pressions peu élevées, une compressibilité beaucoup plus grande que celle que réclame la loi.

Expériences de Despretz (6). — Despretz fit faire un pas considérable à la question, en montrant que les différents gaz ont chacun une compressibilité spéciale. Son appareil, très simple et très démonstratif, se composait de deux éprouvettes A et B reposant sur le mercure, et contenant l'une de l'air atmosphérique, l'autre le gaz qu'on voulait lui comparer ; le tout était enfermé dans un

(1) P. Van Musschenbroek, *Cours de physique*, traduit par Sigaud de Lafond, III, 142. Paris ; 1759.

(2) Sulzer, *Histoire de l'Académie de Berlin*, p. 116 ; 1753.

(3) Robison, *System of mechanical philosophy*, III, 637. Edinburgh ; 1822.

(4) Œrstedt et Swendsen, *Edinburgh's Journal of science*, IV, 424 ; 1826.

(5) Faraday, *Phil. Trans.* ; et *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXII, 323, et XXIV, 396 et 403 ; 1823.

(6) Despretz, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XXXIV, 335 et 443 ; 1827 ; et C. R., XIV, 239, et XXI, 216 ; 1842-45.

cylindre plein d'eau, semblable à celui qui contient le piézomètre d'Œrstedt (194). En comprimant l'eau on produit une même pression dans tout l'appareil, et comme le niveau du mercure, au commencement de l'expérience, a été établi le même dans les deux éprouvettes qui sont d'ailleurs exactement semblables ([1]), le mercure devrait s'élever à une égale hauteur des deux côtés si les gaz étaient également compressibles; or c'est ce qui n'arrive pas. Si l'on excepte l'hydrogène, tous les gaz essayés (acide sulfureux, cyanogène, ammoniaque, acide sulfhydrique, acide carbonique) se comprimèrent plus rapidement que l'air. Il était donc ainsi établi que les différents gaz se compriment inégalement sous une même pression. Dès lors la loi de Mariotte perdait le caractère de généralité qu'on lui avait attribué jusque-là; il devenait même probable que l'air s'écartait aussi de la loi simple dont s'affranchissaient plus ou moins tous les autres gaz.

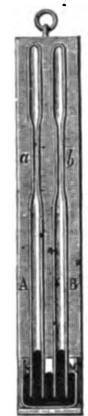


Fig. 468

285. Expériences de Dulong ([2]). — Toutefois la loi parut bientôt définitivement établie pour l'air par les célèbres recherches de la Commission que l'Académie des sciences chargea, en 1823, de déterminer la relation qui existe entre les forces élastiques de la vapeur d'eau et les températures. La nécessité d'avoir un manomètre à air comprimé exact fit étudier la compressibilité de l'air jusqu'à 27 atmosphères.

L'appareil de Dulong n'était autre chose qu'un grand tube de Mariotte, dont la longue branche avait 26 mètres de hauteur. Il était installé dans une tour carrée, reste de l'ancienne église de Sainte-Geneviève, enclavée dans les bâtiments du collège Henri IV. Au milieu de la tour s'élevait un arbre, bien dressé sur sa face antérieure, et servant d'appui à la longue branche. Cette branche était formée de 13 tubes de cristal, longs chacun de 2 mètres,

([1]) Les parties capillaires *a* et *b* ont pour but d'augmenter la sensibilité de l'appareil, la plus petite différence de volume devenant manifeste quand le mercure atteint cette région.

([2]) Dulong, *Exposé des recherches faites sur l'ordre de l'Académie par la Commission formée de MM. de Prony, Arago, Girard et Dulong*, dans les *Mémoires de l'Académie des sciences*, X, et les *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XLIII, 74; 1830.

ayant 5 millimètres de diamètre intérieur et autant d'épaisseur, et réunis deux à deux par des viroles de fer : la virole supérieure s'appuyait sur un cuir recouvrant la virole inférieure; un écrou roulant serrait les deux pièces et maintenait en même temps une languette horizontale, destinée à servir de repère dans la mesure des hauteurs. Afin de décharger les tubes inférieurs du poids de tout le reste de la colonne, on avait fixé à l'arbre, en regard de chaque joint, deux poulies sur lesquelles passaient des cordons attachés par un bout à la virole inférieure du joint et portant

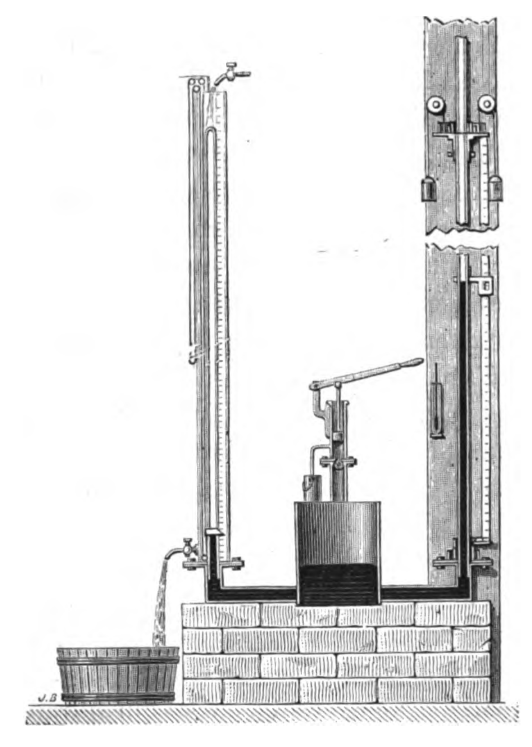


Fig. 469

d'autre part un petit seau chargé de grenaille, de manière à faire exactement équilibre au poids de la virole et du tube qu'elle portait. Chaque tube de 2 mètres étant ainsi isolément équilibré, les tubes inférieurs n'étaient pas plus comprimés que les tubes supérieurs, et la colonne entière, que le plus faible effort suffisait à soulever, pouvait se dilater ou se contracter suivant la tempé-

rature, sans éprouver la moindre flexion. Le tube à gaz, de même diamètre et de même épaisseur que ceux de la colonne, mais réduit à $1^m,70$ de longueur, avait préalablement été gradué avec beaucoup de soin dans la position même qu'il devait occuper pendant l'expérience ; mais on n'avait pas osé tracer de traits sur sa surface de peur de compromettre sa solidité : on avait donc dressé une table des longueurs, correspondant à un même volume de mercure dans toute l'étendue du tube, de sorte qu'une lecture de hauteur devait ensuite suffire à la mesure du volume. Ces lectures de hauteur se faisaient sur une règle de laiton divisée en millimètres, placée à côté du tube, et portant un voyant muni d'un vernier. Le voyant, semblable à celui d'un baromètre de Fortin, se manœuvrait au moyen d'un cordon sans fin et d'un système de poulies permettant de le faire monter ou descendre aisément malgré le manchon de verre qui enveloppait le tube et la règle. Dans ce manchon circulait un courant d'eau continu, assurant, ce qui est essentiel, la constance de la température du gaz à toute phase de l'expérience. Les deux branches du tube de Mariotte étaient réunies par un canal horizontal en fonte, sur lequel chaque branche était fixée à l'aide d'une virole en fer, où elle était mastiquée, la virole ayant une forme telle que la base du tube de verre était soustraite à toute pression. Au milieu du canal horizontal était un grand réservoir plein de mercure, et surmonté d'une petite pompe au moyen de laquelle on pouvait, en refoulant de l'eau sur le mercure, pousser le liquide métallique dans les deux branches, et produire ainsi aisément telle pression que l'on voulait.

Le tube à gaz étant encore ouvert à sa partie supérieure en une pointe effilée, on y fit passer pendant longtemps, à l'aide d'une machine pneumatique, un courant d'air sec qui entrait par la pointe et sortait par le mercure, on ferma à la lampe, et l'on procéda aux premières mesures. Le volume fut donné par l'observation du point de la règle auquel correspondait le sommet de la colonne, et la pression (peu différente d'une atmosphère) s'obtint par la lecture de la hauteur actuelle du baromètre et la mesure au cathétomètre de la différence de niveau des deux colonnes de mercure dans les deux branches. Ayant ainsi le volume et la pression initiales à une température donnée, on fit agir la pompe et l'on réduisit à volonté

volume de l'air enfermé dans le tube à gaz, le mercure s'élevant haque fois dans la grande branche jusqu'à la hauteur nécessaire à équilibre de pression. Pour connaître cette hauteur, on avait nesuré d'avance la distance verticale invariable de deux repères onsécutifs à l'aide d'une règle divisée, munie d'une languette à ernier. Ayant ainsi relevé toutes les distances comprises entre les lifférentes viroles, on n'avait plus à chaque observation qu'à mesurer la distance du sommet de la colonne mercurielle au repère situé immédiatement au-dessous, ce qui se faisait avec la même règle, qui portait à cet effet un voyant à vernier. Enfin, on avait distribué six thermomètres le long de la grande branche, de manière à pouvoir réduire à zéro la hauteur de la colonne de mercure mesurant dans chaque cas la pression; et, afin que les indications de ces thermomètres fussent plus approchées, leurs réservoirs plongeaient dans des tubes de mêmes dimensions que ceux des deux branches, et remplis de mercure.

On fit 3 séries comprenant 39 expériences, toutes effectuées sur la même masse d'air. Voici les résultats de la troisième série (les résultats des deux premières sont absolument analogues) :

Air à 13°.

PRESSION		VOLUME		Δ
en mètres de mercure.	en atmosphères.	observé.	calculé.	
0,760	1	501,30	»	»
3,612	4,75	105,25	105,47	0,22
3,757	4,94	101,22	101,41	0,19
3,812	5	99,69	99,95	0,24
4,625	6	82,29	82,38	0,09
5,001	6,58	76,10	76,20	0,10
5,737	7,6	66,22	66,42	0,20
8,596	11,3	44,31	44,33	0,02
9,992	13	37,85	38,13	0,28
12,620	16,5	30,12	30,19	0,07
13,245	17	28,66	28,77	0,11
14,667	19	25,89	25,98	0,09
16,535	21,7	22,97	23,04	0,07
16,584	21,7	22,88	22,97	0,09
18,439	24	20,55	20,67	0,12
20,237	26,5	18,83	18,87	0,04
20,499	27	18,53	18,59	0,06

De ces expériences on conclut que la loi de Mariotte était exacte pour l'air jusqu'à 27 atmosphères. Cette conclusion n'était pas absolument logique ; car s'il est vrai que les différences entre le calcul et l'observation sont toujours très faibles, et que « l'on ne remarque pas que ces différences augmentent avec les pressions, comme cela devrait avoir lieu si elles tenaient à une déviation réelle de la loi de Mariotte », il est à noter : 1° que ces différences sont toutes de même signe, indiquant une compressibilité de l'air un peu plus grande que ne le veut la loi ; 2° que ce ne sont pas les différences absolues, mais les rapports des différences aux volumes correspondants qu'il faudrait considérer ; 3° enfin, que de la méthode même, suivie dans ces expériences, résulte une sensibilité décroissante : si, en effet, la pression devenant 20 atmosphères par exemple, le volume se trouve réduit sensiblement au $\frac{1}{20}$ de sa valeur initiale, comme les mesures se font toujours avec la même approximation absolue, l'erreur relative sera vingt fois plus forte. Les résultats deviennent de moins en moins certains alors qu'ils auraient besoin d'être le plus précis.

Sans doute les expérimentateurs n'eussent point été aussi affirmatifs dans leur conclusion s'ils avaient pu opérer avec d'autres gaz que l'air ; mais l'administration ne leur permit pas de conserver la jouissance de la tour où ils s'étaient installés, et ils durent renoncer à expérimenter sur les gaz qu'ils voulaient soumettre à leur appareil.

286. Expériences de Pouillet. — Pouillet (¹) essaya de combler cette lacune en reprenant les expériences de Despretz sur les compressibilités relatives des différents gaz, et il imagina pour cette étude un appareil simple et commode, dont les dispositions essentielles ont été bien des fois reproduites depuis. Deux longs tubes, exactement calibrés, étaient fixés par leur extrémité inférieure sur une boîte de fonte pleine de mercure et reliée par un tube de fer à un réservoir de fonte, partiellement rempli de mercure : au-dessus de ce mercure était de l'huile, dans laquelle pouvait s'enfoncer un piston plongeur, terminé en haut par une vis mobile

(¹) Pouillet, *Éléments de physique*, 4ᵉ édition, I, 327 ; 1837.

dans un écrou solidement rattaché au réservoir. Au moyen de cette disposition, il était facile d'exercer des pressions de plus de 100 atmosphères, pressions qu'avec des tubes de 3 millimètres d'épaisseur et de 2 à 3 millimètres de diamètre intérieur on peut employer sans crainte aucune. Pour faire une expérience, les tubes étant effilés et ouverts à leur partie supérieure, on amène le mercure jusqu'à la pointe, puis, ayant relié le tube à un appareil contenant de l'air ou du gaz à expérimenter, parfaitement desséchés, on abaisse le mercure dans les tubes et on les remplit ainsi de gaz secs; on ferme au chalumeau, et l'on pourra plusieurs fois vider et remplir à nouveau le tube contenant le gaz qu'il s'agit de comparer à l'air, sans altérer sensiblement le volume de ce tube.

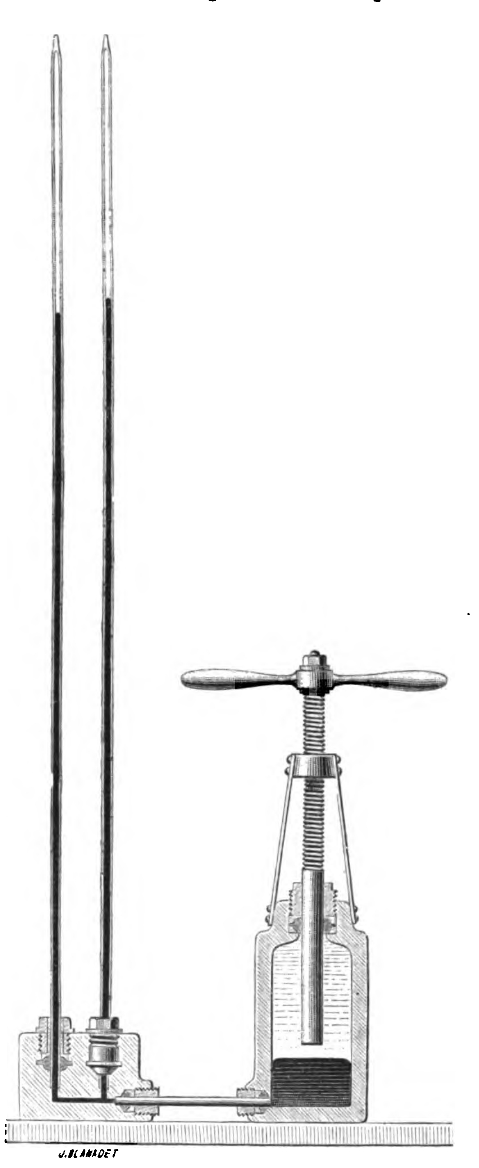


Fig. 470

Pouillet conclut de ses recherches que jusqu'à 100 atmosphères les gaz alors réputés permanents (oxygène, azote, hydrogène, bioxyde d'azote et oxyde de carbone) suivaient la même loi de compression que l'air atmosphérique, tandis que l'acide sulfureux, l'ammoniaque, l'acide carbonique et le protoxyde d'azote manifestaient une compressibilité plus grande que celle de l'air,

dès que leur volume était réduit au $\frac{1}{3}$ ou au $\frac{1}{4}$. Ce dernier résultat est très net. Quant à la première conclusion, savoir l'identité de compressibilité des gaz permanents, elle ne peut pas être regardée comme rigoureusement démontrée, l'appareil présentant, ainsi que celui de Dulong, une sensibilité rapidement décroissante quand la pression devient un peu considérable.

287. Expériences de Regnault (¹). — Regnault évite cette difficulté en disposant les expériences d'après le principe suivant :

Principe. — Le tube à gaz est pourvu à sa partie supérieure d'un robinet, par l'intermédiaire duquel on peut le remplir de gaz à telle pression initiale que l'on veut. Ce tube constituant toujours la *petite* branche d'un long tube de Mariotte, on le remplit d'abord d'air sec sous la pression d'une atmosphère jusqu'à un repère tracé à sa partie inférieure, on ferme le robinet, puis, faisant monter le mercure dans la grande branche, on comprime l'air de façon à lui faire occuper un volume moitié, indiqué par un deuxième repère marqué sur le tube à gaz : on lit la pression correspondante, laquelle diffère peu de 2 atmosphères. On introduit maintenant dans le tube de l'air sous la pression de 2 atmosphères jusqu'au repère inférieur; on ajoute dans la grande branche du manomètre assez de mercure pour réduire le volume du gaz à moitié : on lit la pression, qui serait 4 atmosphères si la loi était exacte. On remplit à nouveau le tube d'air sous la pression initiale de 4 atmosphères et on refoule cet air dans un volume moitié, on trouve une pression voisine de 8 atmosphères; et ainsi de suite. Prenant toujours, sous une pression initiale quelconque, un volume d'air égal au volume entier du tube, on cherche la force élastique qu'acquiert le gaz lorsqu'on réduit son volume à moitié. Les volumes sur lesquels on opère restant les mêmes dans tous les couples d'expériences, la sensibilité de l'appareil est indépendante de la pression.

Appareil. — Dans l'appareil de Regnault, le tube à gaz était un tube en cristal, de 3 mètres de longueur, 10 millimètres de diamètre intérieur et 5 millimètres d'épaisseur, divisé en milli-

(¹) Regnault, *Mémoires de l'Académie des sciences*, XXI et XXVI ; 1847 et 1862.

tres sur toute son étendue (¹), et portant à sa partie supérieure e tubulure en acier, munie d'un robinet parfaitement exécuté. ı tube de plomb, soudé à l'extrémité de cette tubulure, reliait le ɔe à gaz avec un vaste réservoir à air comprimé : ce réservoir R, ımergé dans l'eau de façon à assurer au gaz qu'il renfermait une mpérature constante, communiquait avec un système de pompes de mpression C, à l'aide desquelles on établissait la pression voulue. e tube à gaz avait été préalablement jaugé avec le plus grand ɔin : à cet effet, on l'avait mastiqué dans l'une des tubulures d'un de es robinets en fer à trois voies, que Regnault a si souvent employés ›our ses petits manomètres (292); dans la seconde tubulure était ixé un tube un peu plus long. En versant dans ce second tube ıne quantité convenable de mercure, on remplit exactement le premier jusqu'à l'ouverture de la clef du robinet supérieur. On tourne alors le robinet à trois voies, de manière à ouvrir une issue seulement au mercure contenu dans le tube divisé. On recueille dans un flacon le mercure qui s'écoule depuis l'ouverture du robinet supérieur jusqu'à la division 3000, placée vers le bas, et qui a été choisie pour le repère inférieur α correspondant au volume 1. Ce mercure est pesé. Remplissant de nouveau le tube divisé, on recueille séparément et immédiatement l'une après l'autre, pour éviter les erreurs provenant des changements de température, les deux quantités de mercure comprises : 1° entre le robinet supérieur et la division que l'on juge correspondre le mieux au volume 1/2 ; 2° entre cette division et la division 3000. Ces deux quantités ne seront pas absolument égales, mais une deuxième, une troisième expérience fixera exactement la position du repère β marquant le volume 1/2. On déterminera enfin avec précision la valeur d'une division du tube dans le voisinage de l'un et de l'autre repère, afin de connaître dans chaque cas le volume exact, quand même le mercure n'affleurerait pas rigoureusement au repère.

Le tube à gaz, environné d'un manchon dans lequel circulait un courant d'eau à température constante, était fixé à sa partie inférieure sur une pièce en fonte, servant à le raccorder au reste de

(¹) La gravure à l'acide fluorhydrique ne compromet pas la solidité d'un tube comme la gravure au diamant ; Regnault a donc pu tracer directement sur son tube une division à l'acide fluorhydrique.

l'appareil. Cette pièce se compose d'un canal horizontal, portant

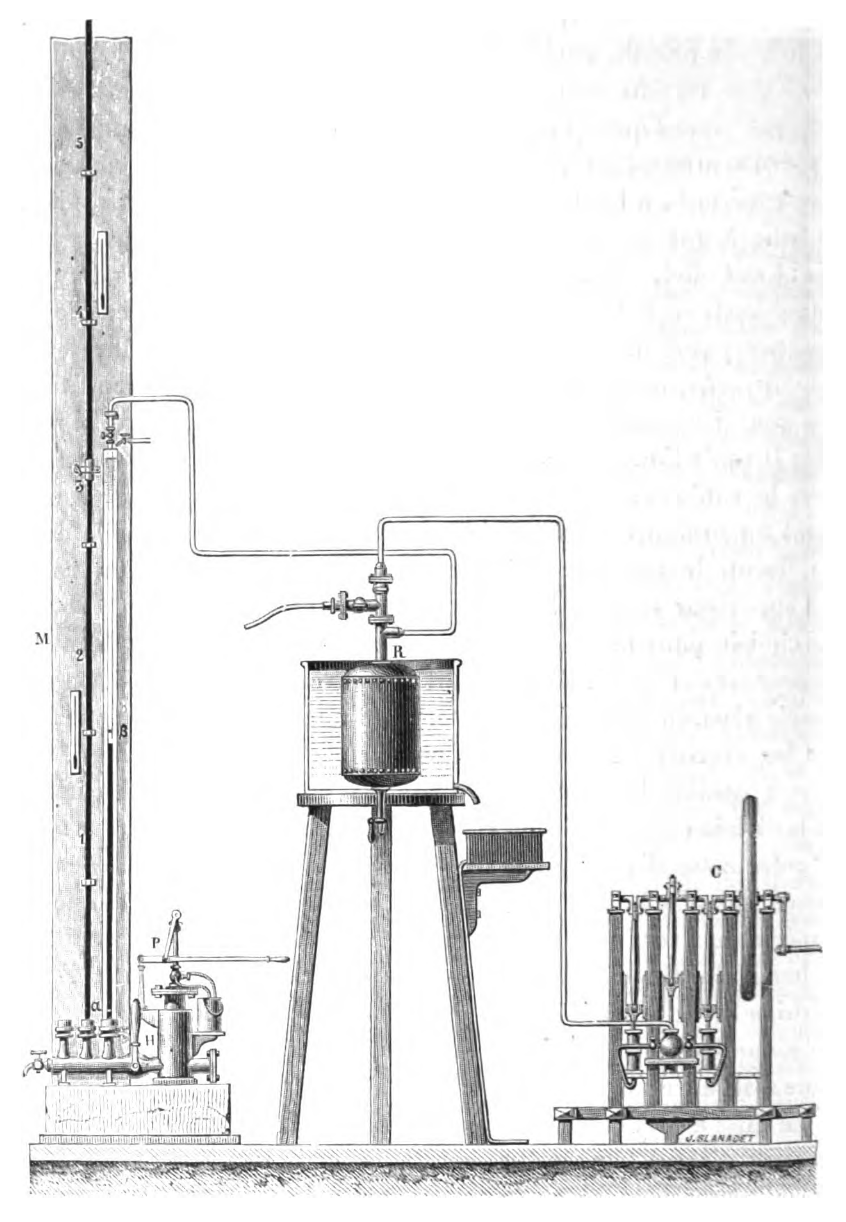
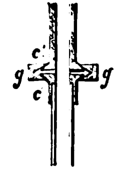


Fig. 471

deux tubulures verticales, et séparé par un robinet d'un vase en

fonte renfermant à sa partie inférieure du mercure, et par-dessus de l'eau, que l'on peut comprimer au moyen d'une petite pompe P puisant dans un seau le liquide et le refoulant dans le réservoir : la pression ainsi obtenue se transmettra au mercure qui montera dans les deux tubes M. Les pressions devant s'élever jusqu'à 30 atmosphères environ, tous les joints ont été faits avec le plus grand soin ; et, pour éviter que les tubes, retenus seulement par un mastic à la résine, ne soient arrachés par la pression s'exerçant sur leur base annulaire, chaque tube n'est pas directement mastiqué dans la tubulure, mais dans une pièce en fer qui s'ajuste sur la tubulure (au moyen de boulons à vis et d'un enduit au minium), et qui consiste en une capsule terminée par un tube étroit : le tube de cristal s'appuie par sa base contre le fond de la capsule, son ouverture coïncidant avec celle du tube de fer qui a exactement le même diamètre.

La branche ouverte se composait d'une succession de tubes de cristal, longs chacun de 3 mètres, identiques au tube à gaz, et reliés entre eux par un dispositif qui a été souvent employé par Regnault, et qui permettait de monter et de démonter très rapidement l'appareil. Deux extrémités voisines sont mastiquées dans des tubulures en fer, terminées par des bases coniques cc', parfaitement égales, et percées d'un trou de même diamètre que celui des tubes. Les tubulures étant rapprochées, après interposition d'un cuir gras, sont réunies par un *collier à gorge gg*, taillé intérieurement suivant deux cônes accolés par leurs bases, l'angle à la base de ces cônes étant un peu plus petit que celui des cônes des tubulures. En serrant le collier gg au moyen de sa clef à vis e, on exerce donc une pression égale sur tout le contour des bases coniques cc', et l'on obtient une fermeture hermétique, en même temps que l'on évite les torsions que produisent toujours les vis et les écrous, et qui amènent si facilement la rupture des tubes de verre.



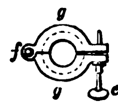


Fig. 472

L'appareil était installé dans une tour du Collège de France, construite autrefois par Savart pour des recherches d'hydraulique, que la mort l'empêcha d'exécuter. Cette tour ayant environ 12 mètres de hauteur, on put facilement y monter quatre tubes l'un au-dessus de l'autre, en les fixant contre une solide planche

en bois, dressée avec soin et scellée au mur de la tour : les tubes étaient maintenus sur de petits chevalets en bois par de simples brides de cuivre, séparées du verre par un cuir doux. Ce mode de suspension parut suffisant, et les contrepoids employés par Dulong furent abandonnés. Le dernier tube traversait la terrasse de la tour, sur laquelle on éleva un mât vertical, constitué par deux forts madriers de sapin assemblés en T par des étriers de fer : ce mât fut consolidé par trois jambes de force en bois résistant et quatre haubans en fer, qui s'attachaient d'une part à la maçonnerie de la tour, et d'autre part à un collier en fer enserrant le haut du mât; des pièces à vis, situées vers le bas de ces haubans, permettaient de les tendre à volonté de façon à mettre le mât dans la verticale. On établit ainsi une paroi inébranlable, sur laquelle on put appliquer encore quatre tubes de 3 mètres, ce qui donna à la branche ouverte une hauteur totale de 24 mètres.

Deux cathétomètres étaient installés, le premier sur un palier solide placé en face du tube, le second sur un palier mobile qui pouvait s'accrocher à différentes hauteurs au moyen de tenons en fer, scellés dans le mur à $0^m,95$ les uns des autres. Des repères 1, 2, 3,... furent tracés sur le tube, à $0^m,95$ d'intervalle environ. Les distances respectives de ces repères, ainsi que la distance du repère 1 au repère β de la branche fermée, furent déterminées une fois pour toutes à l'aide du cathétomètre n° 2. Dès lors, pour connaître la hauteur de la colonne de mercure soulevée, il suffisait de mesurer avec le cathétomètre n° 1 la distance du niveau du mercure dans le tube fermé au repère β, et avec le cathétomètre n° 2 la distance du niveau du mercure dans le tube ouvert au repère le plus voisin. L'observateur chargé de cette dernière opération pouvait s'élever parallèlement au tube sur un chariot glissant le long de deux chaînes de Galle, et manœuvré avec une manivelle attachée au chariot même; un contrepoids, équilibrant le système, rendait la manœuvre aisée et sûre. Pour la partie du tube située au-dessus de la terrasse, on se contentait de lire directement la hauteur du mercure dans le tube à une division en millimètres tracée sur le verre; l'erreur absolue ne dépassait pas un 1/2 millimètre, précision plus que suffisante quand il s'agit de hautes pressions. Un système analogue à celui qui servait à transporter l'obser-

rateur à l'intérieur de la tour lui permettait de s'élever le long du mât : une chaise, équilibrée par un contrepoids, glissait sur deux chaînes de Galle tendues des deux côtés du mât, et se manœuvrait comme le palier mobile. En visant différentes divisions du tube avec une lunette à réticule disposée à une fenêtre d'un bâtiment voisin, on s'était assuré qu'aucun dérangement sensible ne résultait du déplacement de l'observateur le long du mât : les plus grands écarts n'atteignaient pas une 1/2 division, c'est-à-dire un 1/2 millimètre.

Marche d'une expérience. — La marche d'une expérience se conçoit facilement. On commence par faire le vide à plusieurs reprises dans le tube fermé, en y laissant chaque fois rentrer du gaz pur et sec. Puis, l'eau du manchon, qui s'est échauffée pendant les opérations préliminaires, est remplacée par de l'eau froide, dont on règle l'écoulement de manière à entretenir un courant continu autour du tube : un thermomètre très sensible, suspendu au milieu du manchon, et en contact avec le tube, permet d'apprécier les moindres variations dans la température. Le gaz est introduit une dernière fois sous la pression à laquelle on veut opérer, et l'on amène le niveau du mercure au repère inférieur, c'est-à-dire à la division 3000 ; on y réussit facilement en refoulant d'abord le mercure un peu au-dessus de cette division, puis en ouvrant légèrement le robinet de décharge de la pompe P ; la pression diminue aussi lentement que l'on veut et, visant au cathétomètre n° 1, on arrête rigoureusement le niveau du mercure à la division 3000. On ferme alors le robinet placé entre le manomètre M et le réservoir à mercure H ; on relève le niveau du mercure dans la grande colonne au cathétomètre n° 2 ; on note le thermomètre du manchon et la hauteur du baromètre ; puis on ferme le robinet supérieur du tube à gaz. On rétablit la communication entre le réservoir à mercure et le manomètre, on pousse le mercure dans les deux branches au moyen de la pompe foulante à eau, et l'on réduit le gaz au volume 1/2 en procédant exactement comme il vient d'être dit ; on ferme le robinet situé entre le réservoir et le manomètre, de manière à empêcher toute fuite du côté de la pompe, qui ne peut jamais parfaitement tenir la pression. On attend quelques minutes pour que la chaleur dégagée par la compression de l'air se soit dissipée, on observe de nouveau le thermomètre du manchon et

le baromètre; on relève au cathétomètre n° 1 la position exacte du mercure dans le tube à gaz : elle ne coïncidera plus rigoureusement en général avec le repère 1/2, peu importe, puisque l'on a jaugé scrupuleusement le tube dans cette région; le cathétomètre n° 2 donne le niveau du mercure dans la grande branche, et les thermomètres, échelonnés de $1^m,50$ en $1^m,50$, sa température aux diverses hauteurs. On a dès lors tous les éléments nécessaires pour déterminer exactement le volume et la force élastique du gaz à chacune des deux phases de l'expérience.

On recommençait ensuite l'expérience, tantôt en opérant successivement à des pressions croissantes; tantôt, au contraire, en introduisant immédiatement au maximum de compression le gaz, qu'on laissait ensuite échapper par portions successives pour faire les mesures sous des pressions moindres : ce dernier mode fut surtout employé pour les gaz autres que l'air atmosphérique, parce que l'on était ainsi plus sûr d'expérimenter pendant toute la série sur un gaz parfaitement identique.

Corrections. — Les expériences effectuées, Regnault appliqua aux données immédiates de l'observation certaines corrections :

1° La pression atmosphérique était lue à un baromètre situé dans la pièce inférieure de la tour : la pression exercée sur le sommet de la colonne de mercure dans le grand tube n'était pas absolument la même [1]. Soit z la différence de niveau entre le sommet de la colonne de mercure et la cuvette du baromètre, on peut, vu la petitesse de z, appliquer la formule simplifiée (281)

$$z = 18400^m \log \frac{h}{h - \Delta h},$$

h étant la hauteur barométrique observée, réduite à zéro, et

(1) En toute rigueur, il eût fallu tenir compte aussi de la hauteur de la colonne fluide enfermée dans le tube à gaz, la pression moyenne de ce gaz étant inférieure à la pression que supporte la surface libre du mercure dans le tube. Mais, en faisant le calcul, on reconnaît que les valeurs de l'expression $\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1} - 1$, telles que les a données Regnault, ne sont modifiées en rien par cette correction. Les valeurs absolues des pressions sont elles-mêmes à peine touchées : pour $z = 22^m$, la pression moyenne de la colonne sous la longueur de $1^m,50$, ne diffère de la pression à la base que de $1^{mm},570$.

$-\Delta h$ la hauteur qu'aurait marquée le baromètre, à zéro, au veau z. Pour $z = 22^{m}$, $\Delta h = 2^{mm},092$, h étant supposé égal à 30^mm.

2° La pression était mesurée dans chaque cas par la hauteur de la colonne de mercure à 0° [1] qui lui faisait équilibre, le mercure étant supposé avoir sa densité normale; mais, le mercure étant sensiblement compressible, la densité des parties basses était supérieure à la densité normale : Regnault transforme donc la hauteur observée en ce qu'elle serait si le mercure n'était pas compressible et conservait dans toute la colonne la densité qu'il possède sous la pression de l'atmosphère.

Soit z la distance d'une section droite de la colonne de mercure à la surface terminale sur laquelle s'exerce librement la pression atmosphérique, et soit h la hauteur de la colonne de mercure normal qui ferait équilibre à la pression réellement exercée par le mercure situé au-dessus de la section considérée : la pression sur l'unité de surface de cette section sera $\rho_0 h$, ρ_0 étant la densité normale du mercure. Sur l'unité de surface de la section qui se trouve immédiatement au-dessous, à la distance $z+dz$ du niveau supérieur, la pression sera $\rho_0(h+dh)$. La différence de pression sur les deux sections sera donc $\rho_0 dh$. Cette différence est aussi égale à ρdz, ρ étant la densité du mercure comprimé, au niveau z. On a donc

$$\rho_0 dh = \rho dz.$$

Mais, en désignant par $\varkappa$ le coefficient de compressibilité du mercure, 0,0000046 [2], on a

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1-\varkappa h};$$

par suite,

$$(1-\varkappa h)dh = dz.$$

[1] On fait aisément la réduction à zéro en attribuant à la colonne du tube à gaz la température de l'eau du manchon, et à la colonne de la branche ouverte la moyenne des températures données par les thermomètres à mercure échelonnés sur toute sa longueur.

[2] Le coefficient trouvé par Regnault (196), 0,0000035, était rapporté à la pression de 1 atmosphère. Si l'on prend pour unité de pression le poids d'une colonne de mercure de 1 mètre, $\varkappa$ devient 0,0000046.

En intégrant et en remarquant que pour $z=0$, $h=0$, on a

$$h-\frac{\varkappa}{2}h^2=z.$$

Or, $\varkappa$ est très petit, et par suite h diffère très peu de z; on peut donc écrire sans erreur sensible

$$h=\frac{z}{1-\frac{\varkappa}{2}z}.$$

Ainsi, la correction $h-z$, dont il faut augmenter chaque hauteur observée z, est

$$h-z=\frac{\frac{\varkappa}{2}z^2}{1-\frac{\varkappa}{2}z}.$$

Pour $z=22^{m}$, $h-z=1^{mm},193$. La correction est donc toujours fort petite.

3° Le tube à gaz augmente de volume à mesure que la pression intérieure devient plus grande. Pour savoir si cette augmentation avait une influence sensible, on a visé avec un premier cathétomètre la division 3000, et avec un deuxième cathétomètre une des divisions supérieures du tube plein d'air sous la pression atmosphérique; puis on a établi une pression de 25 atmosphères à l'intérieur du tube : il a été impossible de constater un déplacement sensible des divisions que visaient les deux cathétomètres. Une pression de 25 atmosphères ne produit donc pas un allongement de $\frac{1}{10}$ de millimètre sur une longueur de plus de $2^{m},5$, c'est-à-dire un allongement de $\frac{1}{25000}$. L'accroissement de la capacité intérieure ne dépasse donc pas $3\cdot\frac{1}{25000}$ ou $\frac{1}{8000}$ environ. La mesure directe de la dilatation intérieure d'un tube du même verre, transformé en piézomètre, donna à peu près le même nombre. La variation de capacité du tube est donc négligeable.

4° La température du courant d'eau froide qui circule dans le manchon ne restant pas rigoureusement constante pendant toute une série d'expériences, les volumes furent ramenés par le calcul

à ce qu'ils auraient été si la température fût demeurée constante.

Résultats. — Regnault opéra sur l'air atmosphérique, l'azote, l'acide carbonique et l'hydrogène. Il calcula pour chaque expérience le rapport $\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$, p_0 désignant la pression initiale du gaz sous le volume initial v_0 (volume entier du tube à gaz), et p_1 la pression sous le volume v_1, sensiblement égal à $\frac{1}{2} v_0$. Si la loi de Mariotte était exacte, ce rapport devrait être constamment égal à l'unité.

Or, on reconnut que pour l'*air atmosphérique* ce rapport est toujours supérieur à l'unité, et qu'il va en grandissant d'une manière très régulière, à mesure que la pression initiale p_0 s'accroît. Pour $p_0 = 12^{atm},30$, $\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1} = 1,0062$, et, bien que ce nombre diffère peu de 1, l'écart est parfaitement mesurable, la différence entre la force élastique p_1 observée et celle qui correspondrait à la loi de Mariotte s'élevant à 114 millimètres. Donc, à la température ordinaire, l'air atmosphérique ne suit pas rigoureusement la loi de Mariotte : il se comprime un peu plus que cela ne devrait avoir lieu d'après cette loi, l'écart augmentant à mesure que la pression augmente, dans la limite des expériences (c'est-à-dire jusque vers 30 atmosphères).

L'*azote* suit la même marche que l'air atmosphérique : il se comprime plus qu'il ne le ferait si la loi de Mariotte régissait son élasticité; le rapport $\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$ croît régulièrement avec la pression, moins rapidement toutefois que pour l'air atmosphérique : $p_0 = 12^{atm},85$ donne $\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1} = 1,0048$. Il est donc très probable que l'*oxygène*, sur lequel les expériences directes ne furent pas jugées possibles (l'oxygène comprimé ayant paru très sensiblement absorbé par le mercure), s'écarte au contraire de la loi de Mariotte plus que l'air même.

Pour l'*acide carbonique*, ainsi qu'on devait s'y attendre, les écarts, toujours positifs, sont encore bien plus considérables : le rapport $\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$, qui est déjà représenté par 1,0076 quand la pression initiale est de 1 atmosphère seulement, devient 1,0999 lorsque cette pression initiale est de $12^{atm},66$.

L'*hydrogène* présente le fait remarquable d'un écart en sens

contraire de celui des autres gaz : pour l'hydrogène, le rapport $\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1}$ est toujours plus petit que 1, l'écart augmentant d'ailleurs en valeur absolue quand la pression augmente elle-même : pour $p_0 = 13^{atm},62$, $\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1} = 0,9924$.

En résumé, à la température ordinaire et aux pressions comprises entre 1 et 30 atmosphères, tous les gaz étudiés sont plus compressibles que ne l'exigerait la loi de Mariotte, à l'exception d'un seul, l'hydrogène, qui diminue moins rapidement de volume que la loi ne le voudrait.

Ces résultats ressortent immédiatement des tableaux d'expériences. Mais si l'on veut obtenir pour chaque gaz la loi empirique de sa compressibilité, il est nécessaire de rapprocher tous les nombres se rapportant à un même gaz.

Loi empirique de la compressibilité de chacun des gaz étudiés. — Regnault commença par effectuer une construction graphique en prenant les pressions initiales p_0 pour abscisses, et les valeurs correspondantes de la fonction $\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1} - 1$ pour ordonnées, le rapport $\frac{v_0}{v_1}$ étant égal à 2. Cette construction fut exécutée avec le plus grand soin.

Les papiers quadrillés qui sont livrés par le commerce n'étant jamais bien réguliers, Regnault prit une planche en cuivre qu'il divisa d'abord lui-même avec la plus scrupuleuse exactitude. Son intention première était de donner à la planche une surface de 1^{mq}, mais n'ayant pas trouvé de papier convenable de ce format pour tirer ensuite les épreuves, il réduisit son cadre à un carré de 80 centimètres de côté. Après avoir tracé sur la planche de cuivre deux côtés du cadre rigoureusement perpendiculaires l'un sur l'autre, au moyen d'une excellente machine à diviser, il porta sur chaque côté, à partir du point d'intersection, 100 divisions égales chacune à 8 millimètres. Deux systèmes de divisions, respectivement parallèles aux deux premiers, étant ensuite tracés sur les deux autres bords de la planche, les deux traits correspondant à la division 100 se rencontrèrent en un point qu'il suffit de joindre aux extrémités des deux côtés rectangulaires déjà tracés pour obtenir un

:adre rigoureusement exact; les divisions homologues opposées 'urent jointes par des lignes droites tracées le long d'une règle métal-ique parfaitement dressée, et la surface du grand carré fut ainsi livisée en petits carrés bien égaux.

Si l'on représente $0^m,1$ de mercure par une division de la ligne les abscisses, et 0,001 par une division de l'axe des ordonnées, chaque expérience se traduit par un point que l'on marquait par l'intersection de deux lignes menées parallèlement aux axes, et situées aux distances fournies par l'expérience. Soit par exemple à inscrire le point donné par l'observation

$$x=71,760, \qquad y=25,173.$$

On détermine immédiatement le petit carré *abcd* dans lequel le point doit se trouver, puis on place sur une planche une petite machine à diviser, dont le socle en fonte est recouvert de drap

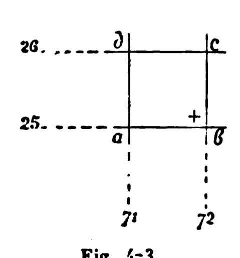


Fig. 473

pour ne pas rayer le cuivre; on oriente la vis micrométrique parallèlement à *ab*, et on amène le tracelet au zéro sur la ligne *da*, en plaçant exactement en regard de *a* un repère, marqué sur le chariot rigoureusement dans la direction du trait que grave le tracelet. Pour prendre les 760 millièmes de *ab*, on fait d'abord tourner la vis jusqu'à ce que le trait 7 d'une échelle, ayant son zéro au repère et divisée en $\frac{8}{10}$ de millimètres, arrive en face de *a*; il ne reste plus alors qu'à faire avancer encore le chariot de $\frac{60}{100}$ d'une division de l'échelle, c'est-à-dire de $\frac{60}{100}\cdot\frac{8}{10}=\frac{48}{100}$ de millimètre, ce qui sera facile à l'aide du cadran à 50 divisions placé sur la tête de la vis dont le pas est de $\frac{1}{2}$ millimètre; on fera tourner

la vis de 48 divisions. Le tracelet sera ainsi amené dans la position convenable, et il n'y aura qu'à tracer avec lui un trait sur la planche pour obtenir une ligne qui doit contenir le point cherché. Plaçant maintenant la petite machine parallèlement à *bc*, le repère sur *b*, on fait avancer le chariot d'abord de 1 division de l'échelle, puis de $\frac{73}{100} \cdot \frac{8}{10} = \frac{58}{100}$ de millimètre, c'est-à-dire encore de 1 tour plus 8 divisions du cadran, et on trace un nouveau trait renfermant également le point cherché, qui se trouve ainsi déterminé par le croisement des deux lignes.

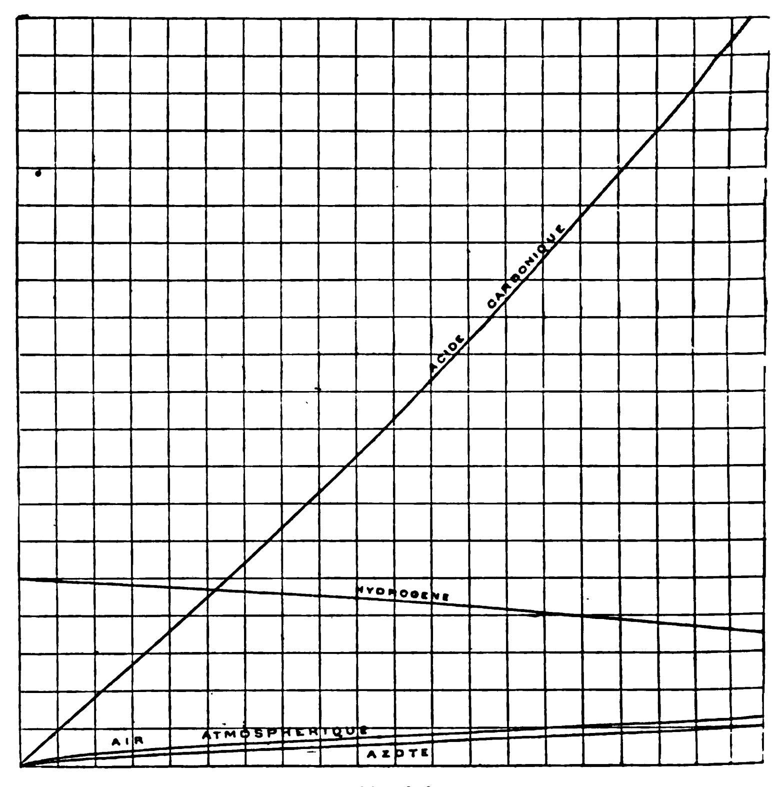


Fig. 474

Toutes les expériences relatives à un même gaz étant ainsi reportées, on voit que les divers points sont distribués avec une régularité satisfaisante. On trace la courbe continue passant au plus près de tous ces points, et on a la représentation graphique

e la marche de la fonction $\frac{p_0 v_0}{p_1 v_1} - 1$, quand p_0 varie de 1 à 15 atmosphères environ.

Pour chaque gaz la ligne diffère peu d'une ligne droite ([1]); la ourbure est néanmoins sensible : la courbe de l'acide carbonique ourne sa convexité vers l'axe des x, les trois autres au contraire ont concaves de ce côté.

La courbe obtenue, il est facile de savoir quelle force élastique p_1 prend une masse donnée de gaz, ayant initialement la pression p_0 sous le volume v_0, quand le volume devient $v_1 = \frac{v_0}{m}$, la température restant constante.

Calculons en effet les pressions p_1, p_2, p_3, ... p_n, que prend une *même* masse de gaz quand son volume devient successivement $\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3} \cdots \frac{1}{2^n}$.

La courbe fait connaître immédiatement la quantité a_1 définissant la pression p_1

$$2\frac{p_0}{p_1} = 1 + a_1.$$

La même masse de gaz passant de la pression p_1, sous le volume $v_1 = \frac{v_0}{2}$, à la pression p_2, on trouve de même sur la courbe la quantité a_2 qui détermine la pression p_2,

$$2\frac{p_1}{p_2} = 1 + a_2,$$

et ainsi de suite

. . . .

$$2\frac{p_{n-1}}{p_n} = 1 + a_n.$$

On a donc, en multipliant ces équations membre à membre,

$$2^n \frac{p_0}{p_n} = (1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n),$$

équation qui détermine p_n, les quantités a_1, a_2, a_n étant connues.

([1]) Sur la figure 474, la courbe de l'hydrogène a été relevée assez fortement, pour plus de clarté.

Si l'on effectue ce calcul pour différentes valeurs de n, on reconnaît que les valeurs numériques de $\frac{\frac{p_n}{p_0}}{2^n}$ varient d'une manière continue et assez lente pour que l'on puisse poser

$$\frac{\frac{p_n}{p_0}}{2^n} = 1 + A(2^n - 1) + B(2^n - 1)^2,$$

ou, m désignant d'une manière générale le rapport $\frac{v_0}{v_n}$,

$$\frac{\frac{p_n}{p_0}}{m} = 1 + A(m - 1) + B(m - 1)^2,$$

A et B étant deux constantes que l'on calculera d'après les données de l'expérience.

Regnault a trouvé ainsi :

Air $$\frac{\frac{p_n}{p_0}}{m} = 1 - 0{,}001\,105\,38(m - 1) + 0{,}000\,019\,380\,9(m - 1)^2$$

Azote $$\frac{\frac{p_n}{p_0}}{m} = 1 - 0{,}000\,690\,14(m - 1) + 0{,}000\,070\,405(m - 1)^2$$

Ac. carboniq. $$\frac{\frac{p_n}{p_0}}{m} = 1 - 0{,}008\,531\,80(m - 1) - 0{,}000\,007\,285\,6(m - 1)^2$$

Hydrogène $$\frac{\frac{p_n}{p_0}}{m} = 1 + 0{,}000\,547\,23(m - 1) + 0{,}000\,008\,415\,5(m - 1)^2$$

Au moyen de ces formules [1], on peut aisément dresser le tableau suivant, qui résume les expériences :

[1] Voir, sur d'autres formules, Regnault, *loc. cit.*, XXVI, 237 ; Schröder van der Kolk, *loc. cit.*, et Jochmann, *Zeitschrift für Mathematik*, V, 101 ; 1858.

Air atmosphérique		Azote		Acide carbonique		Hydrogène	
p	pv	p	pv	p	pv	p	pv
1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,9978	0,9989	1,9986	0,9993	1,9829	0,9914	2,0011	1,0006
3,9874	0,9969	3,9920	0,9980	3,8974	0,9743	4,0069	1,0017
7,9457	0,9932	7,9641	0,9955	7,5194	0,9399	8,0339	1,0042
11,8822	0,9902	11,9191	0,9933	10,8632	0,9053	12,0845	1,0070
15,8045	0,9878	15,8597	0,9912	13,9261	0,8704	16,1616	1,0101
19,7199	0,9860	19,7886	0,9894	16,7054	0,8353	20,2687	1,0134

Ces expériences de Regnault sont, comme tous les travaux de l'illustre physicien, des chefs-d'œuvre d'exactitude, dont les résultats immédiats sont pour la science des documents inattaquables et définitifs. De nouvelles recherches ont au contraire modifié les idées que Regnault avait émises sur la compressibilité des gaz : Regnault pensait que tout gaz suffisamment raréfié devait d'abord se conduire comme l'hydrogène, puis, la pression augmentant, suivre rigoureusement la loi de Mariotte pour un certain état de condensation; enfin, la pression continuant à croître, le gaz s'écarterait de nouveau de la loi de Mariotte, mais en sens contraire de ses écarts primitifs. Ces conclusions étaient quelque peu hasardées : s'il eût été exact en effet que l'hydrogène se rapproche de la loi à mesure que la pression augmente, les écarts qu'il présentait auraient dû diminuer lorsque la pression s'élevait : le tableau précédent montre tout le contraire. Quant à ce qui doit arriver aux fortes pressions, on ne pouvait le deviner.

Appareil de laboratoire. — Avant de passer aux recherches plus récentes, nous décrirons encore un appareil de laboratoire, employé par Regnault pour constater l'inexactitude de la loi en opérant seulement entre 1 et 2 atmosphères. C'est un tube de Mariotte, dont la branche de gauche est formée d'un tube élargi dans sa région moyenne, et divisé en parties d'égale capacité. Les deux branches plongent dans un manchon rempli d'eau, servant à maintenir la

température constante. Elles sont mastiquées dans une pièce de fer en forme d'U, percée d'un canal, et munie d'un robinet à trois voies qui permet de faire communiquer entre elles les deux branches du manomètre en les isolant de l'extérieur (1), ou de les mettre toutes les deux en rapport avec l'extérieur (2), ou de faire écouler le mercure seulement du tube de gauche (3) ou de celui de droite (4), ou enfin d'interrompre toute communication des branches soit entre elles, soit avec l'extérieur. La branche de gauche étant remplie de gaz pur et sec, on verse du mercure par la branche ouverte, de façon à réduire graduellement le volume du gaz ; on mesure dans chaque cas le volume

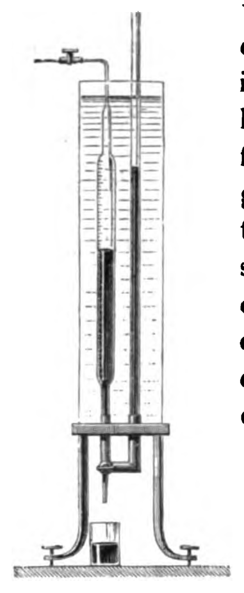


Fig. 475

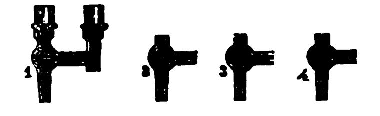


Fig. 476

et la pression, et l'on constate des écarts d'autant plus considérables que le gaz est plus voisin du point de liquéfaction [1].

288. Expériences aux basses pressions. — Les expériences de Regnault embrassent les pressions comprises entre 1 et 30 atmosphères : son appareil ne lui a pas permis d'opérer à des pressions plus fortes et lui a paru incertain pour les pressions moindres. Relativement à ces dernières, il a seulement constaté, par la mesure indirecte de la densité de l'air, que ce gaz *ne présente* point d'écart sensible entre 1 atmosphère et $\frac{1}{2}$ atmosphère.

[1] Regnault trouve ainsi pour le rapport $\frac{p_0 v_0}{pv}$, p étant sensiblement le double de la pression atmosphérique initiale p_0 :

Air	1,00215	Acide chlorhydrique	1,00925
Bioxyde d'azote	1,00285	Acide sulfhydrique	1,01083
Oxyde de carbone	1,00293	Gaz ammoniac	1,01881
Protocarbure d'hydrogène ..	1,00634	Acide sulfureux	1,02088
Protoxyde d'azote	1,00651	Cyanogène	1,02353

Expériences de M. Siljeström. — M. Siljeström (¹) a entrepris aller plus loin. Suivant un procédé indiqué par Regnault, le z était d'abord renfermé sous une pression connue P, dans un cipient de volume V, que l'on faisait ensuite communiquer avec ı deuxième récipient de volume V′, vide, ou du moins ne renferant que du gaz à la plus faible pression possible p; et l'on mesuit la pression finale Π de la masse contenue dans le volume +V′. Si le gaz se rapprochait d'autant plus de la loi de Mariotte u'il est plus raréfié, à mesure que P diminuerait le rapport $\frac{P-p}{\Pi-p}$ ugmenterait en tendant asymptotiquement vers la limite $\frac{V+V'}{V}$. I. Siljeström n'a pas cherché à évaluer d'une manière précise cette quantité $\frac{V+V'}{V}$; il s'est contenté de déterminer les valeurs sucessives du rapport $\frac{P-p}{\Pi-p}$. Il trouve par exemple pour l'air, les pressions étant exprimées en millimètres :

P.	759	352	164	77	37	18
Π.	352	164	77	37	18	7
$\frac{P-p}{\Pi-p}$.	1,47209	1,47165	1,46887	1,46870	1,46122	1,46511
Erreur probable.	0,00012	0,00026	0,00065	0,00157	0,00249	0,00514

Le rapport diminue en même temps que la pression, sans qu'une limite se dessine nettement. Avec l'acide carbonique ce rapport s'est montré au contraire très légèrement croissant. L'hydrogène a donné des nombres décroissants qui descendirent même au-dessous de ceux qu'avait fournis l'air, de sorte qu'aux faibles pressions (inférieures à 76^{mm}), l'hydrogène serait, comme l'air, plus compressible que ne l'exige la loi de Mariotte.

Expériences de M. Mendeleeff. — D'après M. Mendeleeff (²), au contraire, tout gaz suffisamment raréfié se comporte comme l'hydrogène dans les expériences de Regnault, et l'écart $\frac{d(pv)}{dp}$, positif,

(¹) Siljestroem, *Svenska Vet. Acad. Handl.*, II; 1873; *et Pogg. Ann.*, CLI, 451 et 573; 1874.

(²) Mendeleeff, Kirpitchoff et Hémilian, *Bulletin de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, XIX et XXI et *Ann. de chim. et de phys.*, (5), II, 427 et IX, 111; 1874-76.

augmente quand la pression diminue. L'appareil consiste en un réservoir ovoïde en verre, fermé à sa partie inférieure par un robinet, et communiquant par sa partie supérieure avec un gazomètre à air sec et un baromètre manométrique. Le réservoir étant primitivement rempli de 45 kilogrammes environ de mercure, on en fait écouler d'abord à peu près 1 kilogramme, qui se trouve remplacé par de l'air sec, puis on supprime la communication avec le gazomètre, et lâchant graduellement du mercure, on note chaque fois le poids du mercure écoulé et la pression du gaz. L'appareil est plongé dans une cuve pleine d'eau, maintenue à température constante. Les tubes du baromètre manométrique ont 20 millimètres de diamètre, ce qui évite la correction de capillarité. On a tenu compte des changements de volume du réservoir sous les différentes pressions qu'il supporte. Voici, comme exemple, les données d'une expérience faite sur l'air à 17°,5 (les pressions sont exprimées en millimètres, et les volumes en grammes de mercure) :

p	646,19	486,22	207,43	155,65	104,81	51,63	16,40	1
v	1027,29	1364,73	3195,89	4258,84	6315,75	12769,20	39320,71	4403
pv	1,00000	0,99960	0,99867	0,99856	0,99730	0,99306	0,97114	0,6

Expériences de M. Amagat. — Enfin, M. Amagat [1], revenant au procédé de Regnault, opère avec un baromètre à cuvette profonde, dont la chambre barométrique, renflée en deux grosses boules égales, communique par sa partie supérieure avec un baromètre tronqué, soigneusement construit; le gaz remplissant d'abord la boule supérieure seule de volume v sous une pression initiale p est, par un simple déplacement de la cuvette, amené à occuper les deux boules ayant un volume total v', et la pression devient p'. M. Amagat déclare que sous les faibles pressions l'air suit la loi de Mariotte; on a en effet, les pressions étant évaluées en millimètres :

p	12,297	6,210	3,770	1,852	1,377	0,978	0,295
$\frac{p'v'}{pv}$	0,9986	1,0021	1,0019	0,9986	1,0042	1,0160	0,9680

[1] Amagat, *Ann. de chim. et de phys.*, (5), VIII, 270, et XXVIII, 480; 1876-83.

Le désaccord entre ces diverses recherches n'est que trop expliqué par l'importance que prennent à ces faibles pressions toutes les erreurs systématiques des expériences.

289. Expériences aux fortes pressions. — Regnault avait trouvé pour l'acide carbonique une compressibilité croissant rapidement avec la pression jusqu'à ce que l'état liquide fût atteint. Natterer ([1]) reconnut que les gaz alors réputés permanents présentent au contraire sous les hautes pressions une compressibilité nettement décroissante.

Expériences de Natterer. — Parti de l'idée d'arriver à la liquéfaction, Natterer opérait en refoulant le gaz à étudier dans le réservoir de son appareil de compression, et en mesurant la pression par le poids nécessaire pour maintenir un piston, mobile dans un cylindre en communication avec le réservoir, et dont la tige était animée d'un mouvement continu de rotation afin de réduire l'influence du frottement. Il obtint ainsi les résultats remarquables, inscrits au tableau ci-après.

Découverte d'Andrews. — Quelques années plus tard, Andrews ([2]), reprenant l'étude de l'acide carbonique à des températures croissantes, arrivait à ce fait capital qu'au-dessus d'une certaine température, qu'il appelle le *point critique* (30°,92), l'acide carbonique ne peut plus être liquéfié ; mais, tout entier à cette belle découverte, il négligeait une conséquence importante de ses expériences, et laissait à M. Cailletet l'honneur d'établir qu'un gaz, considéré à une température où il n'est pas liquéfiable, présente sous une certaine pression un maximum de compressibilité, au delà duquel il se comporte comme l'hydrogène dans les expériences de Regnault.

Expériences de M. Cailletet. — M. Cailletet ([3]) comprimait une masse constante de gaz dans une sorte de piézomètre, surmonté d'un tube capillaire où le mercure ne pénétrait que quand le volume du gaz était déjà fortement réduit. Une pompe de presse hydraulique refoulait l'eau sur le mercure dans lequel plongeait

([1]) Natterer, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.* V, 351 ; VI, 557 ; et XII, 199 ; et *Pogg. Ann.*, LXII, 139 et XCIV, 436 ; 1850-54.

([2]) Andrews, *Phil. Trans.* ; 1869 ; et *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XXI, 208 ; 1870 (lecture Bakerienne pour 1869).

([3]) Cailletet, C. R., LXX, 1131 ; 1870.

le réservoir du piézomètre : la pression était mesurée à la fois par un levier pressant sur une soupape et par un manomètre Desgoffe modifié (292). Quand la pression n'était pas très considérable, on lisait directement la hauteur du mercure dans le tube capillaire que l'on faisait sortir à cet effet du tube-laboratoire en acier renfermant le réservoir du piézomètre. Pour les très fortes pressions on enfermait tout le piézomètre, réservoir et tube, dans le tube-laboratoire : on avait doré légèrement le tube capillaire à l'intérieur par le procédé Bœttger; le mercure, en s'élevant contre les parois, dissout l'or qu'il rencontre, et le niveau du métal brillant indique après l'expérience la hauteur atteinte par le mercure. Le même tube peut ensuite servir à une autre pression plus forte. Outre le fait nouveau qu'elles mirent en évidence, ces expériences confirmèrent entièrement celles de Natterer. Voici, en effet, d'après les deux observateurs, les valeurs du produit $\frac{p_0 v_0}{pv}$ pour l'air et l'hydrogène :

p	$\frac{p_0 v_0}{pv}$ — Air.		Hydrogène.	
	Natterer.	Cailletet.	Natterer.	Cailletet.
60^atm	»	1,0131 (c)	»	0,9810 (c)
80	»	1,0118	»	»
100	1,0000 (a)	1,0098	0,9800 (b)	0,9552
200	0,9502	0,9990	0,9050	0,9158
300	0,9200	0,9465	0,8600	0,8761
400	0,8628	0,8672	0,8312	0,8347
500	0,7893	0,7927	0,7891	0,7893
605	0,7185	0,7215	0,7533	0,7580
705	0,6601	0,6660	0,7385	»
2790	0,2527 (azote)	»	0,3613	»

(a) Le volume sous la pression de 100^atm et cette pression même sont pris pour unités.
(b) On part de $p_0 = 78^{atm}$ et du volume correspondant v_0.
(c) v_0 et p_0 se rapportent à la pression atmosphérique.

Si l'on rapproche ces nombres de ceux qu'a donnés Regnault jusqu'à 30 atmosphères, on voit que pour l'hydrogène le rapport

$\frac{\delta v_0}{v}$ décroît constamment et régulièrement à mesure que la pres-on augmente. L'air, au contraire, présente vers o atmosphères un maximum des plus curieux, our décroître ensuite plus rapidement que l'hy-rogène.

Ces résultats ne sont pas douteux quant à eur sens général; mais il restait sur les valeurs numériques une incertitude que M. Cailletet hercha à lever en employant le manomètre à air libre, qui seul peut donner des indications précises. A cet effet, il disposa (¹) sur la pente l'un coteau, à Châtillon-sur-Seine, un tube en acier de 3 millimètres de diamètre, rempli de mercure, terminé en haut par un réservoir également plein de mercure, et aboutissant en bas au tube-laboratoire qui contenait le piézomètre à gaz. On portait successivement le réservoir supérieur au niveau de repères jalonnés le long du coteau à des distances verticales de 1 mètre : la pression exercée sur le gaz était dans chaque cas exactement mesurée par la hauteur verticale de la colonne de mercure. Plus tard, M. Cailletet put mettre à profit un puits artésien en foncement à la Butte-aux-Cailles, et dont la profondeur dépassait 500 mètres; il y procéda à une série de recherches (²) que nous analyserons avec quelques détails.

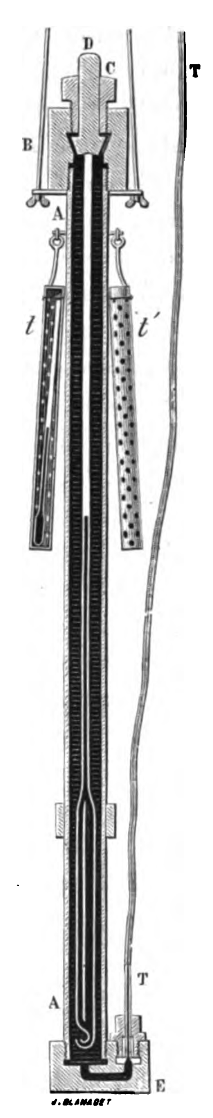


Fig. 477

Le piézomètre à gaz P, doré dans sa partie capillaire, est enfermé dans un tube-laboratoire en acier A, de $1^m,80$ de long sur 25 millimètres de large : un obturateur conique en fer D sert à fermer l'appareil au moyen de l'écrou C. A la base E du tube-laboratoire est fixé un tube flexible en acier

(¹) Cailletet, C. R., LXXXIV, 82; 1877.
(²) Cailletet, C. R., LXXXVIII, 61; 1879.

doux T, de 250 mètres de longueur [1] et 3 millimètres de diamètre intérieur, qui peut s'enrouler dans une hélice creusée à la surface d'un gros cylindre en bois de 2 mètres de diamètre. Un aide, en agissant sur des engrenages par une manivelle, fait tourner le cylindre et, suivant le sens du mouvement, enroule ou déroule le tube T. Pour ne pas fatiguer ce tube fin, on a suspendu le tube-laboratoire à un fil d'acier de 4 millimètres de diamètre, gradué soigneusement, et s'enroulant sur un second treuil mis en mouvement par un second aide. Une poulie à double gorge, établie au niveau du sol, guide le tube et le fil de suspension à l'entrée du puits. Lorsqu'on veut opérer, le tube-laboratoire étant remonté, on fait le vide dans tout l'appareil au moyen d'une machine pneumatique, et l'on attend que le vide soit parfait pour laisser arriver le mercure : sans cette précaution, il resterait toujours de l'air qui diviserait la colonne de mercure et fausserait les résultats. Le remplissage effectué, on enferme dans le tube-laboratoire le piézomètre contenant le gaz à étudier. Les aides agissent sur les engrenages et descendent lentement l'appareil à l'intérieur du puits, de manière à éviter les oscillations du mercure dans le tube du piézomètre. Les divisions tracées sur le fil de suspension font connaître à chaque instant la profondeur à laquelle se trouve l'appareil, et par suite la pression, en millimètres de mercure, que supporte le gaz dans le piézomètre. Pendant que le tube-laboratoire prend la température de la couche d'eau dans laquelle il se trouve immergé, on note la température et la pression extérieures; puis on remonte l'appareil à la surface, on note la température de la couche d'eau où il plon-

[1] La figure montre la disposition adoptée pour relier entre elles les diverses parties du tube d'acier : des rondelles en fer RR sont soudées aux extrémités du tube TT, et peuvent être serrées l'une contre l'autre au moyen des manchons à vis MM : une rondelle de cuir interposée *cc* rend le joint absolument étanche, tandis qu'un petit bout de tube intérieur empêche le cuir de venir obstruer l'orifice.

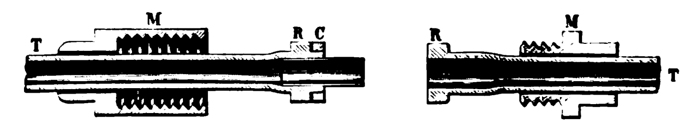


Fig. 478

çait, température donnée par les deux thermomètres à maxima t, t'; et, retirant le piézomètre, on lit sur la division qu'il porte la hauteur de la trace que le mercure a laissée sur l'or au niveau qu'il a atteint.

Les colonnes de mercure sont réduites à zéro; pour cela, on distingue dans le tube en acier trois parties : 1° la partie située hors du puits, qui subit la température extérieure; 2° la portion comprise entre l'orifice du puits et le niveau de l'eau; 3° la partie immergée, subdivisée elle-même en colonnes de 5 mètres. Des expériences préliminaires, avec des thermomètres à maxima au vingtième de degré, ayant donné la température du puits à toute profondeur, on a tous les éléments pour la réduction à zéro.

On n'a pas tenu compte de la compressibilité du mercure.

Quant à l'allongement du fil de suspension, il a été calculé d'après les formules en usage, et vérifié directement sur une longueur de fil égale à 10 mètres.

Afin d'atténuer les erreurs résultant de la réduction qu'aurait subie une même masse de gaz supportant des pressions de plus en plus élevées, on a employé successivement trois piézomètres, de dimensions croissantes et soigneusement mesurées, de manière à rendre tous les résultats comparables entre eux. On a trouvé ainsi les valeurs de pv que nous transcrivons ci-dessous, après les avoir multipliées toutefois par un facteur tel que $p_0v_0 = 1$ sous la pression $p_0 = 1^{atm}$:

Azote à 15°.

PRESSIONS			PRESSIONS		
en mètres de mercure.	en atmosphères.	pv.	en mètres de mercure.	en atmosphères.	pv.
39,36	51,79	0,9789	99,19	130,52	1,0220
49,27	64,83	0,9595	109,20	143,68	1,0145
59,46	77,84	0,9449	124,12	163,31	1,0592
69,37	91,28	0,9583	149,21	196,33	1,0653
79,23	104,35	0,9762	164,15	215,99	1,0801
89,23	117,41	0,9955	181,99	239,46	1,1159

Ainsi, le produit pv va en diminuant depuis la pression atmosphérique jusqu'à 57^m ou 75^{atm} de pression, puis il augmente, pas-

sant par l'unité pour 95^m ou 125^{atm}, de sorte qu'à 125 atmosphères le gaz se trouve avoir exactement le volume voulu par la loi de Mariotte; ensuite *pv* devient supérieur à l'unité, et la compressibilité du gaz diminue assez rapidement à mesure que la pression s'élève.

Expériences de M. Amagat. — M. Amagat [1] a refait ces mesures

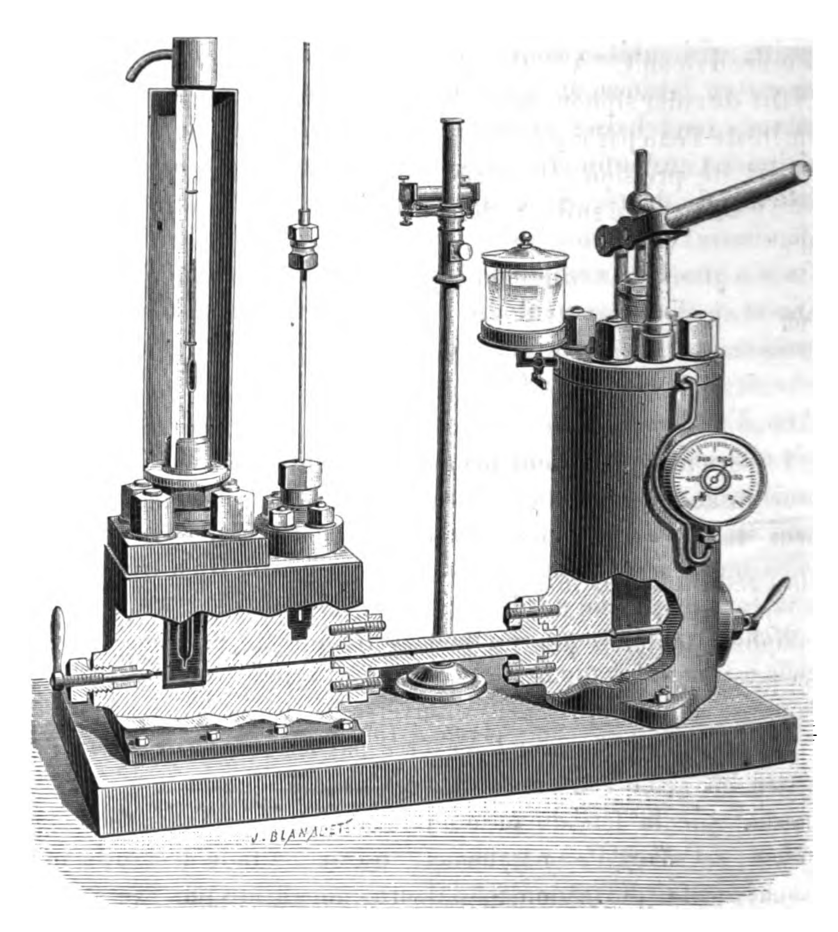


Fig. 479

avec un appareil ressemblant beaucoup à celui de M. Cailletet : même disposition du tube à gaz, même emploi, pour la grande branche, d'un tube fin en acier; mais, par un retour au procédé de

[1] AMAGAT, C. R., LXXXVII, 432, et LXXXVIII, 339; 1878-79; et *Ann. de chim. et de phys.*, (5), XIX, 345; 1880.

Dulong et de Regnault, les lectures étaient faites directement aux deux tubes, au tube à gaz que l'on avait pris à cet effet assez capillaire pour qu'il résistât à la pression s'exerçant à l'intérieur seulement (1), et au tube d'acier qui, formé de plusieurs segments, pouvait se démonter aisément à la hauteur où l'on amenait le mercure, et recevoir momentanément un bout de tube de verre permettant la visée directe. On avait repris également la pompe foulante (à glycérine) qui, chassant le mercure de bas en haut dans les deux branches, empêche toute introduction accidentelle d'air dans le tube fin. Les expériences ont été faites, partie sur l'un des escaliers du fort Saint-Just à Lyon, partie dans un puits de mine à Saint-Étienne.

Les résultats sont inscrits au tableau suivant, dans lequel nous avons réduit de même les pv en prenant pour unité la valeur correspondant à la pression atmosphérique :

Azote, à 15° pour les pressions inférieures à 75 atmosphères et à 22° pour les pressions supérieures.

PRESSIONS en mètres de mercure.	PRESSIONS en atmosphères.	pv.	PRESSIONS en mètres de mercure.	PRESSIONS en atmosphères.	pv.
20,74	27,29	0,9894	128,30	168,81	1,0255
35,34	46,50	0,9876	158,56	208,64	1,0520
47,15	62,03	0,9858	190,86	251,13	1,0815
55,48	73,00	0,9868	221,10	290,93	1,1218
61,24	80,58	0,9875	252,35	332,04	1,1625
69,14	90,98	0,9893	283,71	373,30	1,2070
82,97	109,17	0,9940	327,39	430,77	1,2696
96,44	126,90	1,0015			

On observe encore le retour momentané à la loi de Mariotte vers 95m de pression; mais le minimum de pv est descendu à 50m ou 65atm et moins accusé ; d'une manière générale, les écarts sont moindres que ceux qu'avait trouvés M. Cailletet.

(1) Voir les critiques formulées par M. Cailletet relativement à l'emploi de ce tube capillaire pressé avec une telle force à l'intérieur seulement, et la réponse de M. Amagat (Cailletet, *Ann. de chim. et de phys.*, (5), XIX, 386; 1880; et Amagat, *Ibid.*, XXVIII, 456; 1883).

Ayant ensuite transformé son manomètre en un appareil de Pouillet, permettant de comparer la compressibilité d'un gaz quelconque à celle de l'azote, M. Amagat a pu étudier les compressibilités de l'air, de l'oxygène, de l'hydrogène, de l'oxyde de carbone, du formène et de l'éthylène jusqu'à 400 atmosphères. Si l'on représente les résultats par des courbes ayant pour abscisses les p et pour ordonnées les valeurs de pv relatives à chaque gaz, on obtient pour l'hydrogène une ligne droite, et pour tous les autres gaz une courbe concave vers le haut et offrant un minimum (1) d'autant plus accusé que le gaz est plus facilement liquéfiable, la marche générale de la courbe étant la même que pour l'azote.

290. Expériences aux températures élevées. — Toutes les expériences relatées jusqu'ici se rapportent à la température moyenne de notre atmosphère. « Il y aurait le plus grand intérêt, dit Regnault, à étudier la compressibilité des gaz à des températures élevées; malheureusement cette étude présente des difficultés presque insurmontables, vu l'impossibilité d'obtenir des températures élevées stationnaires. Les expériences peuvent cependant être faites avec succès à la température de l'ébullition de l'eau, en déterminant, au moyen de la balance, le poids du gaz qui remplit un ballon sous différentes pressions à 0° et à 100° (2). » Regnault appliqua cette méthode à l'acide carbonique, et, bien que la conclusion qu'il avait tirée de ses expériences ait été légèrement modifiée depuis par une rectification de calcul due à

(1) Le minimum de pv, ou le maximum de compressibilité, est situé pour les différents gaz vers les pressions suivantes, exprimées en mètres de mercure :

Air	65m	Oxyde de carbone	50m
Azote	50	Formène	120
Oxygène	100	Éthylène	65

L'éthylène présente des variations de compressibilité extraordinaires : le quotient $\frac{p_0 v_0}{pv}$ varie, suivant les pressions extrêmes p_0 et p, entre 2,213 et 0,337, c'est-à-dire qu'à la température ordinaire l'éthylène peut, selon les circonstances, être deux fois plus ou trois fois moins compressible qu'un gaz qui suivrait exactement la loi de Mariotte.

(2) Regnault, *Mémoires de l'Académie des sciences*, XXI, 149 ; 1847.

M. Blaserna [1], il n'en fut pas moins établi qu'à 100° l'acide carbonique est beaucoup plus près de la loi qu'à 0° [2]. En 1870, ce même acide carbonique fut de la part de M. Andrews le sujet du remarquable travail que nous avons déjà signalé, et dans lequel

[1] BLASERNA, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), V, 123; 1865; et C. R., LXIX, 1869.

[2] En partant des recherches de Regnault sur la dilatation des gaz et sur leur compressibilité à la température ordinaire, M. Reye et M. Schröder van der Kolk ont tenté d'établir des formules représentant la compressibilité à 100°. Ils en ont conclu qu'à 100° l'air obéit sensiblement à la loi de Mariotte, tandis que pour l'acide carbonique l'écart reste encore notable. (REYE, *Pogg. Ann.*, CXVI, 429; 1862; et SCHRÖDER VAN DER KOLK, *Ibid.*, CXVI, 429, et CXXVI, 433; 1862-65.)

M. Amagat a entrepris des mesures directes. Il a opéré soit avec un appareil à boules, analogue à celui que nous avons décrit plus haut, et dans lequel le gaz, pris à une pression moyenne de 0m,70, pouvait être réduit de moitié, à diverses températures parfaitement connues, soit avec un deuxième appareil indiqué par Regnault au mémoire précité. Dans un même bain liquide, à la même hauteur, plongent deux réservoirs de verre, surmontés chacun d'un tube capillaire aboutissant à une pièce à trois robinets, sur laquelle se greffent un baromètre tronqué, un manomètre à air libre et un tube pour introduire ou enlever du gaz. L'un des réservoirs étant vide et l'autre chargé à 2 atmosphères, on établit la communication entre eux, et l'on mesure la pression commune. Soit p_0 cette pression sous le volume v_0, lequel est sensiblement double du volume primitif v correspondant à la pression p d'environ 2 atmosphères; au moyen des valeurs exactement mesurées de ces diverses quantités on peut calculer $\frac{p_0 v_0}{pv}$ pour la température de l'expérience. On a ainsi trouvé :

Hydrogène.		Air.		Ammoniaque.		Acide carbonique.		Acide sulfureux.	
$t.$	$\frac{p_0 v_0}{pv}.$	$t.$	$\frac{p_0 v_0}{pv}.$	$t.$	$\frac{p_0 v_0}{pv}.$	$t.$	$\frac{p_0 v_0}{pv}.$	$t.$	$\frac{p_0 v_0}{pv}.$
0°	»	0°	1,00150	7°	1,01270	8°	1,00650	15°	1,01850
50	»	50	»	50	»	50	1,00360	50	1,01100
100	»	100	1,00011	100	1,00540	100	1,00230	100	1,00540
150	»	150	»	150	»	150	1,00140	150	1,00320
200	»	200	»	200	»	200	1,00080	200	1,00210
250	0,99986	250	1,00026	250	»	250	1,00060	250	1,00160
320	»	320	1,00018	320	»	320	»	320	»

Les nombres relatifs à l'air et à l'acide carbonique à 100° sont presque identiques à ceux de M. Schröder van der Kolk. (AMAGAT, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XXVIII, 274, et XXIX, 253; 1873).

Dernièrement enfin, M. Winkelmann a fait connaître les résultats d'expériences exécutées sur l'éthylène au moyen d'un tube de Mariotte convenablement disposé, et montrant également que le gaz se rapproche plus de la loi de Mariotte à 100° qu'à 0°. On a trouvé, en effet, sous 1 et 2 atmosphères : à 0°, $\frac{p_0 v_0}{pv} = 1,00548$; et à 100°, $\frac{p_0 v_0}{pv} = 1,00277$. (WINKELMANN, *Wied. Ann.*, V, 92; 1878; et *Journal de physique*, VIII, 183; 1880.)

la compressibilité de ce corps fut étudiée à diverses températures entre des limites très étendues. Peu après, M. Van der Waals, puis M. Clausius, donnèrent des formules représentant la compressibilité d'un gaz à toute pression et à toute température :

formule de Van der Waals

$$\left(p+\frac{c}{v^2}\right)(v-\alpha)=\mathrm{RT}$$

formule de Clausius

$$\left(p+\frac{c}{\mathrm{T}(v+\beta)^2}\right)(v-\alpha)=\mathrm{RT}$$

α, β, c et R sont des constantes : α s'appelle le *covolume*, et le terme ajouté à p la *pression interne* ; R est la constante qui suffirait à définir le gaz, s'il suivait exactement la loi théorique [1]. T est la température absolue, comptée à partir de 273°.

En 1881, M. Amagat publia une série d'expériences effectuées avec son appareil de Pouillet, sous des pressions atteignant plusieurs centaines d'atmosphères, et à des températures croissant jusqu'à 100°. Les faisceaux de courbes ci-contre traduisent les résultats relatifs à l'hydrogène et à l'acide carbonique : les abscisses figurent les pressions p en mètres de mercure, les ordonnées représentent les valeurs correspondantes de pv. Les courbes relatives aux autres gaz étudiés, azote, formène, éthylène, se placeraient entre ces deux types extrêmes. Dans chaque faisceau, la température augmentant, les courbes tendent à devenir des lignes droites sensiblement parallèles entre elles et à la droite représentant la compressibilité du liquide

$$pv=\alpha p+b,$$

ce qui donne précisément la relation

$$p(v-\alpha)=\mathrm{RT},$$

à laquelle se réduit la formule de Clausius pour une température T suffisamment élevée.

[1] On aurait alors simplement $pv=\mathrm{RT}$.

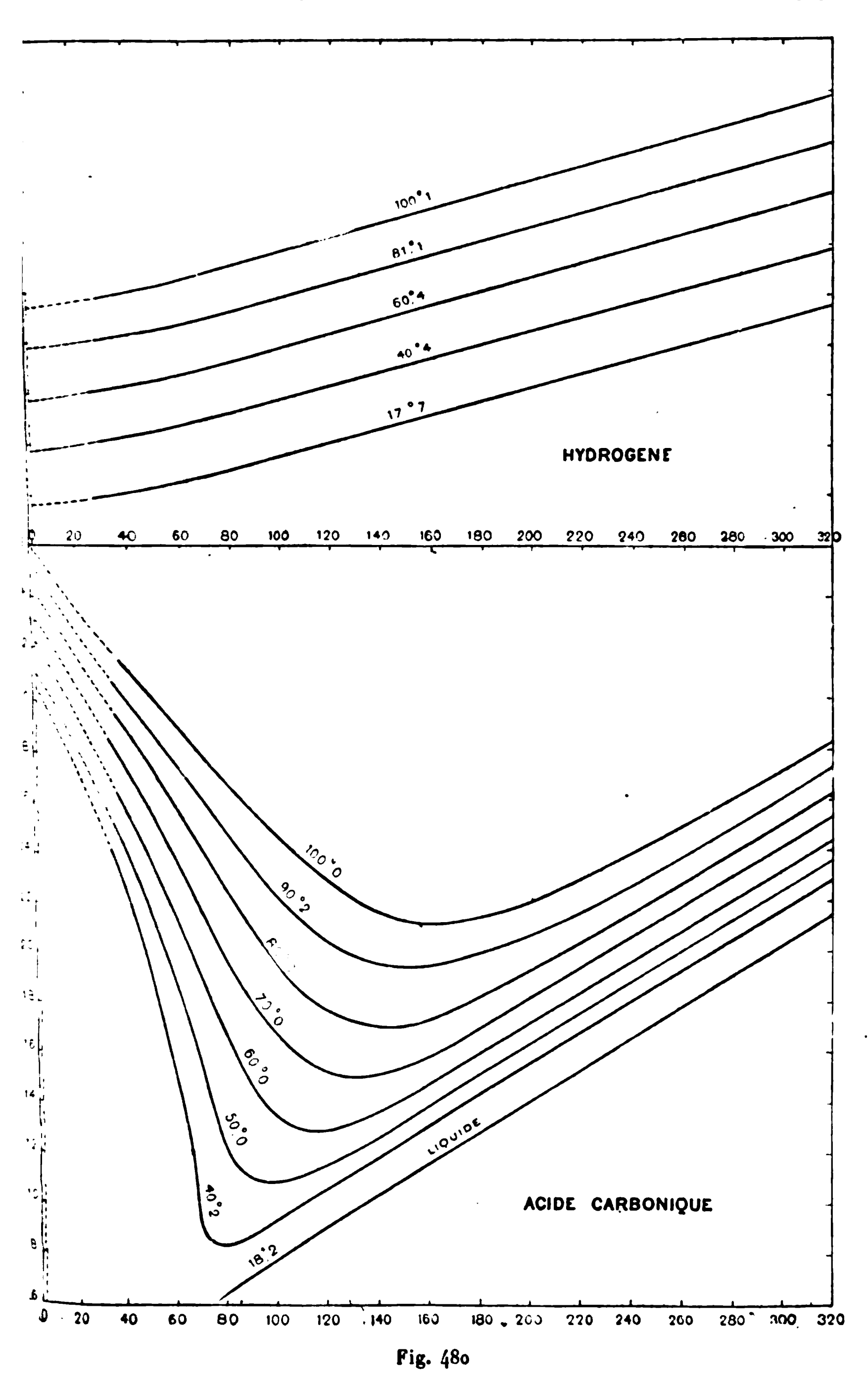

100°1
81°1
60°4
40°4
17°7
HYDROGENE
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320
100°0
90°2
70°0
60°0
50°0
40°2
18°2
LIQUIDE
ACIDE CARBONIQUE
0 20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240 260 280 300 320

Fig. 480

291. Conclusions. — En résumé, si on laisse de côté les pressions très inférieures à la pression atmosphérique, pour lesquelles la marche du phénomène est encore inconnue, les nombreuses recherches que nous avons scrupuleusement rapportées conduisent aux conclusions suivantes :

1° La compressibilité de l'hydrogène, d'abord presque égale, quoique légèrement inférieure à celle qu'exigerait la loi de Mariotte, diminue sans cesse à mesure que la pression augmente : le gaz résiste de plus en plus, et, à 3000 atmosphères, son volume est 3 fois plus grand que ne le veut la loi.

2° Tout gaz, observé à une température notablement supérieure à son point critique, se comporte comme l'hydrogène.

3° Aux températures comprises entre ces degrés élevés et le point critique, chaque gaz est d'abord plus compressible que ne le veut la loi ; l'écart augmente avec la pression, passe par un maximum, puis décroît, devient nul, change de signe, et dès lors le gaz se comporte comme l'hydrogène, de sorte qu'à partir d'une certaine pression sa compressibilité ne se distingue plus de celle du liquide qui en résulterait.

4° Aux températures inférieures au point critique, ou à cette dernière température même, la compressibilité du gaz, supérieure dès le début à celle qui serait d'accord avec la loi, augmente sans cesse jusqu'au changement d'état qui représente lui-même un accroissement brusque de la compressibilité. Ce changement opéré, l'état limite se trouve instantanément atteint, la compressibilité limite d'un gaz étant précisément celle de son liquide.

5° Tous ces résultats sont compris dans la formule de Clausius

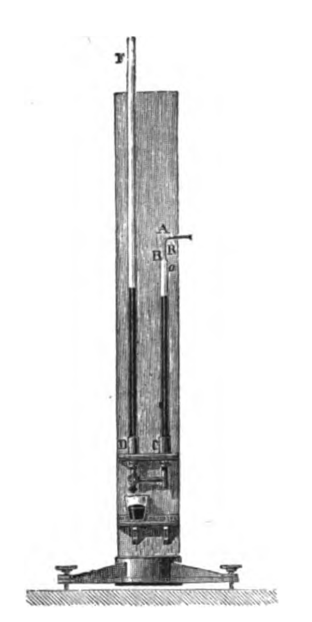
$$\left(p+\frac{c}{T(v+\beta)^2}\right)(v-\alpha)=RT.$$

II. — MANOMÈTRES ET VOLUMÉNOMÈTRES.

292. Manomètres à air libre. — Les manomètres (μανός, rare) sont des appareils destinés à indiquer le degré de raréfaction ou de compression d'un gaz, ou, plus exactement, à mesurer la pression d'un fluide.

L'instrument fondamental est le manomètre à air libre. Les appareils employés pour étudier la loi de Mariotte, et en particulier l'appareil de Regnault, ne sont autre chose que des manomètres à air libre.

Manomètres de Regnault. — La figure 481 représente un manomètre à air libre, modèle de Regnault, pour les pressions ne dépassant pas 2 ou 3 atmosphères. Deux tubes en verre, AC, DF, de même diamètre, divisés en millimètres sur toute



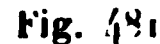

Fig. 481



Fig. 482

leur longueur, sont mastiqués à leur partie inférieure dans une pièce en fonte, percée d'un canal en U réunissant les deux tubes, et munie d'un robinet à trois voies. Le grand tube est ouvert librement à l'air. Le petit tube se relie par un collier à gorge au récipient dans lequel on veut connaître la pression. Cette pression est mesurée par la hauteur barométrique réduite à zéro, H, augmentée de la différence h des hauteurs du mercure dans les deux branches, cette quantité h étant également réduite à zéro. Les lectures dans les deux branches se font soit directement sur la division millimétrique dont elles sont munies, soit mieux au moyen d'un

cathétomètre. Toutefois, pour les pressions inférieures à la pression atmosphérique, Regnault s'est le plus souvent servi de l'appa-

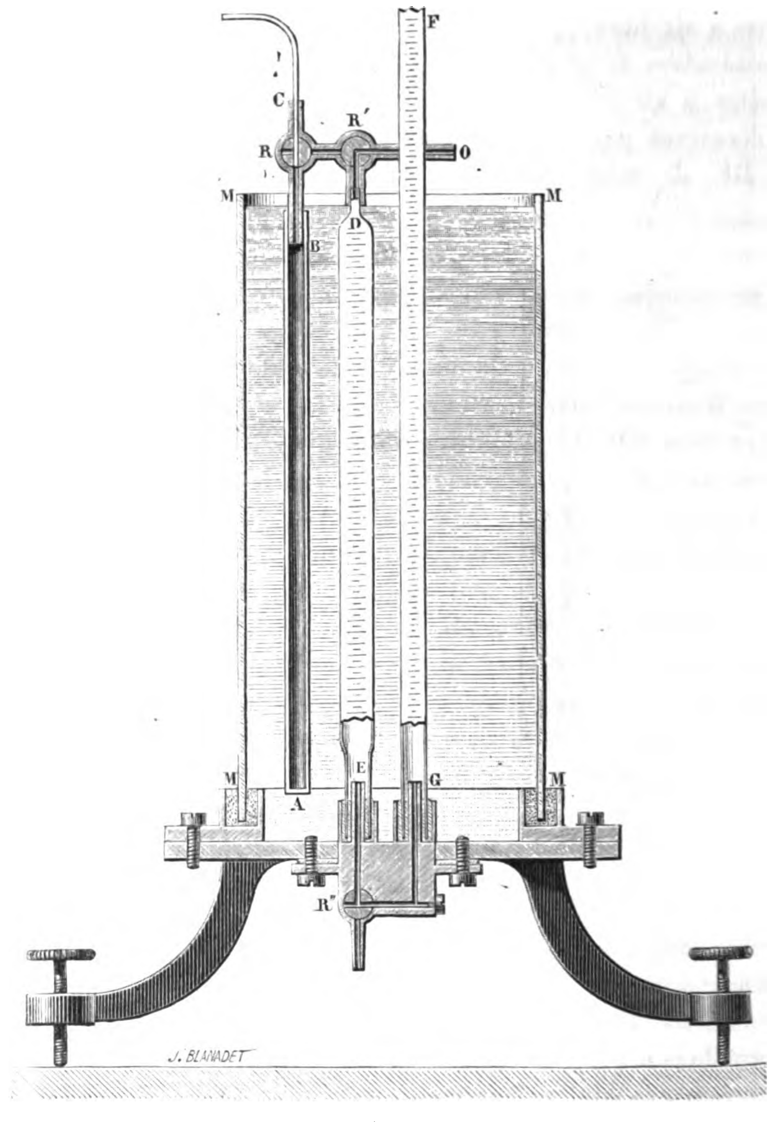


Fig. 483

reil connu sous le nom de *manomètre barométrique*, et représenté figure 482 : le tube manométrique A communique à sa partie supé-

rieure avec l'enceinte dans laquelle on veut mesurer la pression, et plonge par le bas dans l'auget B d'une cuvette, sur le deuxième auget B′ de laquelle repose également un baromètre normal; une cloison sépare à la partie inférieure les deux augets, de manière à ce que de l'air sortant accidentellement de A ne puisse pénétrer en A′.

Pour les pressions élevées, on emploiera un grand manomètre à air libre, ou, à son défaut, le manomètre portatif imaginé par Regnault [1] pour suppléer au grand manomètre. Cet appareil se compose d'un tube en laiton épais AB, surmonté d'un robinet à trois voies R, au moyen duquel il peut communiquer par la tubulure C avec le réservoir contenant l'air comprimé à la pression cherchée x, et par la tubulure latérale avec un deuxième robinet R′, ajusté à la partie supérieure d'un petit manomètre DEGF; un manchon MM, plein d'eau, entoure tous ces tubes. Les robinets R, R′ et R″ étant d'abord dans la position indiquée sur la figure, et par conséquent le cylindre AB étant plein de gaz à la pression inconnue x, on verse du mercure dans le manomètre, de façon à remplir complètement le tube DE jusqu'en O. On tourne alors R, on ouvre lentement R′ et en même temps R″, et on laisse écouler du mercure jusqu'à ce que le niveau soit sensiblement le même dans les deux branches. Le gaz, qui occupait dans AB le volume V à la pression x, occupe alors le volume V + W à la pression $H+h$ que l'on mesure aisément; on a donc

$$x = \frac{V+W}{V}(H+h),$$

quantité connue si les volumes V et W ont été déterminés par un jaugeage préalable.

Manomètre Kretz. — Parmi les manomètres de précision, nous citerons encore celui qu'a imaginé M. Kretz pour mesurer avec une grande exactitude de faibles variations de pression. Cet appareil se compose essentiellement de deux réservoirs cylindriques larges A et B, de même section S, réunis par un tube étroit en

(1) Regnault, *Mémoires de l'Académie des sciences*, XXXI; et *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XXIV, 258; 1871.

siphon TT′, de section s. Le réservoir A, le t
du siphon contiennent de l'eau alcoolisée, de
jusqu'en M dans la branche T′ ; par-dessus ce
versé en T′ de l'essence de térébenthine, de

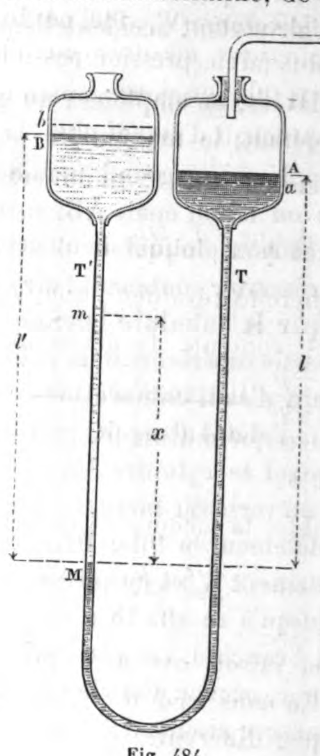


Fig. 484

nière à remplir en partie le réservoir B : l'esse
reste au-dessus de l'eau alcoolisée sans s'y mé
la surface de séparation M des deux liquide
nette. Quand la pression sur les deux colonnes li
les hauteurs l et l' des surfaces libres au-dess
en raison inverse des densités d et d' de l'ea
l'essence de térébenthine, et l'on a

$$ld = l'd'.$$

Si alors un accroissement de pression h se
liquides marchent dans le sens AMB. La surfa



lessus de sa position initiale; l'eau
. l'essence monte en B de la même
rivons que les pressions au niveau m
s branches, nous avons, en désignant par
mérique mesurée en colonne d'eau, et en
en colonne d'eau,

$$x\frac{s}{S}d' + (l' - x)d' = (l - x)d - x\frac{s}{S}d + \mathrm{H} + h,$$

ous rappelant que $l'd' = ld$,

$$-x\left(1 - \frac{s}{S}\right)d' = -x\left(1 + \frac{s}{S}\right)d + h;$$

ou

$$x = \frac{h}{d - d' + \frac{s}{S}(d + d')}:$$

x est proportionnel à h.

Si $\frac{s}{S}$ était négligeable, la formule se réduirait à

$$x = \frac{h}{d - d'}.$$

la sensibilité serait en raison inverse de la différence des densités des deux liquides. En tous cas, il y a avantage à prendre des liquides de densité peu différente.

Dans les conditions ordinaires, le diamètre commun des vases A et B est $0^{\mathrm{m}},15$, celui du tube TT', $0^{\mathrm{m}},007$; par suite, $\frac{s}{S} = 0,00217$; $d = 0,899$, $d' = 0,869$; en conséquence, $d - d' = 0,030$, $d + d' = 1,768$. On a donc

$$x = \frac{h}{0,030 + 0,004} = 29h;$$

la sensibilité est 29 fois plus grande que celle d'un manomètre à eau. Comme d'ailleurs x est proportionnel à h, on gradue aisément l'appareil en comparant ses déplacements extrêmes avec ceux d'un manomètre à eau.

Manomètres industriels. — Dans l'industrie, la forme la plus habituelle du manomètre à air libre est celle que montre la figure 485:

la pression se transmet par la tubulure à robinet R dans l'intérieur d'une boîte B, contenant une cuvette N pleine de mercure ; dans cette cuvette plonge un tube AM, traversant la boîte à cuir C, et s'ouvrant librement dans l'atmosphère. Si la cuvette est assez large pour que l'on puisse y regarder le niveau du mercure comme constant, il suffit de prendre à partir de ce niveau une série de hauteurs distantes de $0^m,76$ pour graduer l'appareil en atmosphères. Si la section de la cuvette n'est pas extrêmement grande par rapport à celle du tube, un accroissement h de la pression extérieure amène à la fois une élévation x du mercure dans le tube et un abaissement y dans la cuvette, tels que

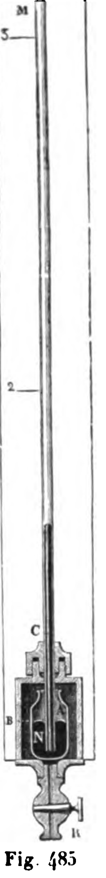


Fig. 485

$$x+y=h,$$

et

$$sx=Sy,$$

cette deuxième équation exprimant que le volume du mercure monté dans le tube de section s est égal au volume du mercure qui a quitté la cuvette de section annulaire S. De ces deux équations on tire

$$x=\frac{S}{S+s}h.$$

Par conséquent, pour graduer le tube en atmosphères, on marquera des divisions distantes de $\frac{S}{S+s}\cdot 0^m,76$.

Si l'appareil doit servir pour des pressions un peu élevées, et si par conséquent le tube devient trop long pour qu'on puisse commodément l'examiner sur toute sa longueur, on emploie (fig. 486) un flotteur p qui, par l'intermédiaire d'un cordon et d'une poulie, agit sur un index p' reportant les indications à une hauteur convenable.

Quand on ne tient pas à une grande précision et que d'autre part on désire avoir constamment l'échelle entière sous les yeux, on réduit les déplacements du mercure dans le tube ouvert, comme le montre la figure 487. Un long tube de fer, recourbé en siphon,

BC, communique en A avec le récipient à gaz ou à vapeur, et porte en D un large tube de verre, donnant libre accès à l'air par l'ajutage EF percé en O. Soient S la section du tube D, s la section du tube

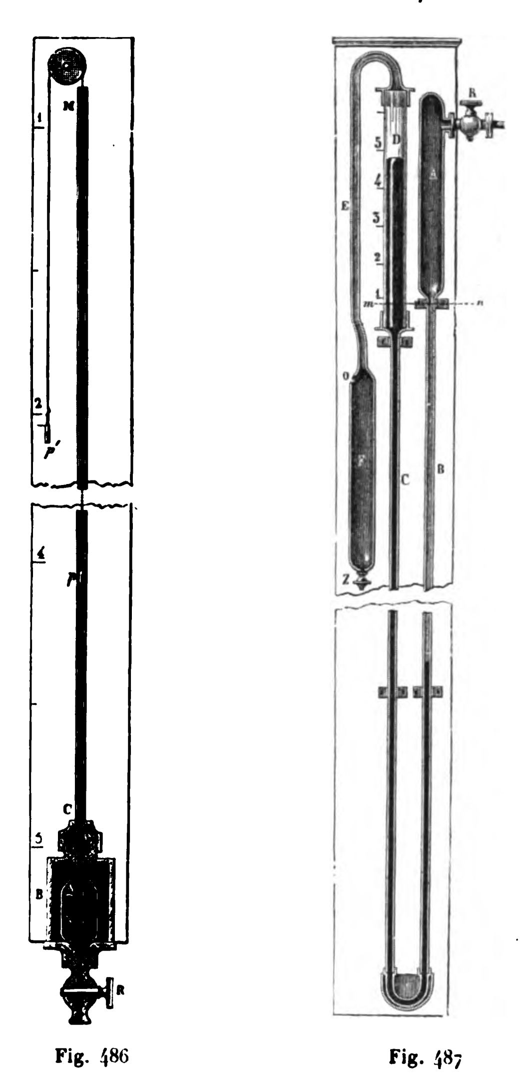


Fig. 486 Fig. 487

de fer, si la pression dans le récipient s'accroît de h, le mercure montera en D de

$$x = \frac{s}{S+s} h;$$

c'est donc dans ce rapport $\frac{s}{S+s}$ que devra être réduite la graduation du tube D. Toute la partie inférieure du siphon se loge en terre, et on ne laisse au-dessus du sol que le tube D et les renflements A et F, destinés a recevoir le mercure qui serait accidentellement projeté d'un côté ou de l'autre.

On emploie aussi pour le même objet le manomètre à branches multiples, construit par Richard sur le principe du baromètre de Fahrenheit. Une série de tubes en siphon, ACB, A'C'B',...

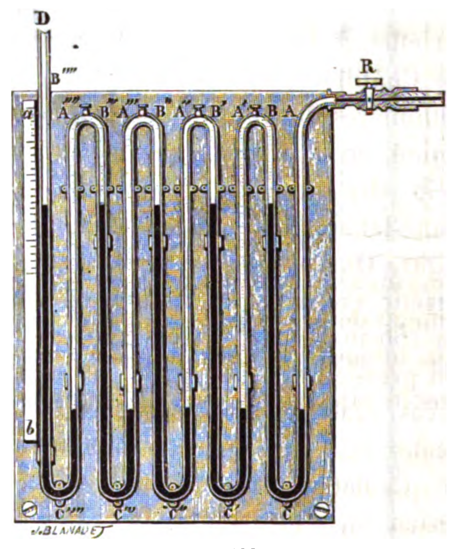


Fig. 488

tous de même diamètre, sont réunis de manière à former un seul tube plusieurs fois recourbé, fixé par un bout R au récipient à gaz, et s'ouvrant de l'autre bout D dans l'atmosphère. On a d'abord mis dans chaque siphon du mercure jusqu'au milieu des tubes, puis les branches supérieures de communication ont été remplies d'eau. L'appareil étant en place, supposons qu'un accroissement de pression h se produise en R, le mercure descendra dans la branche AC d'une certaine quantité l, et s'elèvera dans la branche CB d'une hauteur égale l; la différence des niveaux dans les deux branches du siphon ACB s'accroîtra de $2l$. En même temps, une colonne d'eau de longueur l sera refoulée dans la

branche A'C' du deuxième siphon ; par suite, le mercure dans cette branche descendra de l, ce qu'il ne pourra faire sans s'élever de la même quantité l dans la deuxième branche C'B' : la différence des niveaux dans les deux branches du siphon A'C'B' sera ainsi augmentée de $2l$; et ainsi de suite. Supposons l'équilibre établi. Dans le dernier siphon A''''C''''B'''' la pression s'est accrue de $2l$ à la surface du mercure en C''''A''''. Cet accroissement de pression se transmet à l'avant-dernier siphon, mais diminué de la quantité $2l\alpha$, α étant la densité de l'eau par rapport à celle du mercure, de sorte que l'accroissement de pression à la surface du mercure en C'''A''' est $2l+2l(1-\alpha)$; et ainsi de suite. Si donc le manomètre comprend n siphons, on a

$$h=2l+(n-1)2l(1-\alpha),$$

d'où

$$l=\frac{h}{2[n-(n-1)\alpha]}.$$

Tel sera le déplacement de l'extrémité libre de la dernière colonne pour un accroissement de pression h; en d'autres termes, les divisions de l'échelle, toujours proportionnelles aux pressions, sont ainsi réduites dans le rapport $\frac{1}{2[n-(n-1)\alpha]}$.

Manomètre Desgoffe. — Pour les très fortes pressions, M. Desgoffe a imaginé l'appareil ci-contre, qui repose sur le principe de la presse hydraulique, pris à l'inverse.

La pression à mesurer P s'exerce par le tube T sur la tête d'un piston en acier P, terminé par un large disque en métal D. Elle produit sur la tête du piston un effort Ps, s étant la section du piston; cet effort Ps se transmet (abstraction faite des frottements) au disque D, de section S, de sorte que le disque exercera au-dessous de lui une pression par unité de surface égale à

$$P\frac{s}{S}.$$

Que maintenant cette pression soit appliquée au liquide contenu dans la courte branche d'un manomètre à air libre, et l'ascension du liquide dans la grande branche mesurera la pres-

sion P, diminuée dans le rapport $\frac{s}{S}$. Si, par exemple, $S = 100s$, on pourra mesurer des pressions de 500 atmosphères avec une colonne de mercure de 3m,80 seulement.

Le disque D n'agit pas directement sur le mercure. Une lame de caoutchouc, placée sous le disque, ferme complètement la courte

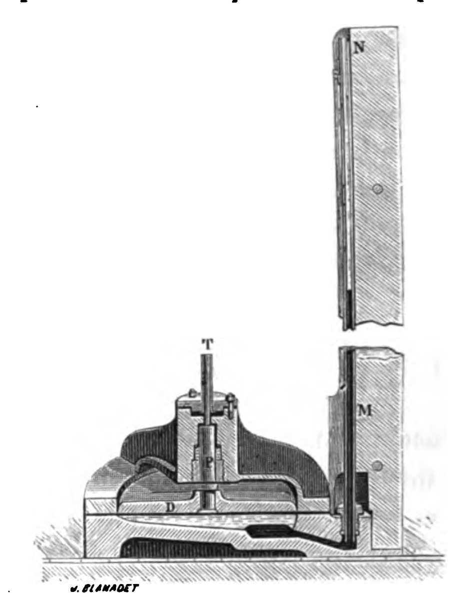


Fig. 489

branche du manomètre à sa partie supérieure, de façon à retenir le liquide; au-dessous de cette lame est de l'eau, séparant le mercure du caoutchouc qui, sans cela, s'altérerait très vite. La courte branche du manomètre forme d'ailleurs une large cuvette, dont le diamètre est tellement considérable par rapport à celui de la branche ouverte que la lame de caoutchouc se déplace à peine sous les plus fortes pressions (dans les expériences de M. Cailletet (289), elle descendait seulement de $\frac{1}{5}$ de millimètre pour une élévation du mercure de 4m,30 en A); la résistance de cette membrane est donc négligeable [1].

[1] Le fond de la cuvette est relevé d'un côté, de manière à arrêter le disque D dans le cas d'une pression trop forte, et creusé de l'autre pour rassembler le mercure lors d'une diminution de pression.

Le piston en acier se meut dans un cylindre en bronze, d'où il sort en traversant un cuir soigneusement embouti. Pour éviter l'erreur que peut amener le frottement à travers ce cuir embouti, on prendra soin, dans les mesures, de faire osciller la pression P au-dessus et au-dessous de la valeur que l'on veut déterminer, de manière à vaincre l'adhérence du piston.

Avec ces précautions, il est possible d'obtenir de cet appareil de très bons résultats, comme l'a montré M. Cailletet dans l'étude qu'il en a faite comparativement à un manomètre à hydrogène comprimé, gradué d'après les nombres de Regnault [1].

293. Manomètres à air comprimé. — Si le manomètre à air libre offre l'avantage d'une précision constante, il a, quoi que l'on fasse, l'inconvénient d'être encombrant. De là l'emploi du manomètre à air comprimé. Cet appareil se compose essentiellement d'un tube AM, plein d'air, fermé à sa partie supérieure, et renversé sur une cuvette N, logée elle-même dans un cylindre métallique B, qui communique avec le récipient dans lequel on veut mesurer la pression; le cylindre B est muni en C d'une boîte en cuir traversée par le tube manométrique, et en R d'un robinet permettant d'établir ou de supprimer la communication avec le récipient. Sous la pression atmosphérique, le mercure est de niveau dans le tube et dans la cuvette. Si la pression augmente en B, le mercure monte dans le tube en comprimant le gaz, de sorte que la nouvelle tension du gaz, augmentée de la pression de la colonne soulevée, fasse équilibre à la pression extérieure. Comme l'air suit très approximativement la loi de Mariotte, les traits indiquant 2, 3, 4,.... atmosphères seront peu au-dessous de la moitié, du tiers, du quart,... de la longueur du tube à partir du sommet. Pour avoir les positions exactes de ces traits, on gradue l'appareil par comparaison avec un manomètre à air libre.

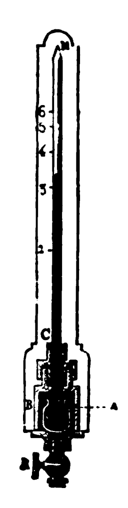


Fig. 490

Une telle opération demande, à proprement parler, les précau-

[1] CAILLETET, *loc. cit.*

tions mêmes qu'a nécessitées l'étude de la loi de Mariotte. Si donc on veut un manomètre de précision, on devra le construire de façon à pouvoir utiliser les résultats des expériences antérieures. On jaugera soigneusement le tube manométrique, puis, le disposant sur une monture convenable, on le remplira d'air, ou mieux d'azote pur et sec, et on le fermera à la partie supérieure. Il suffira dès lors de lire exactement le volume occupé par l'azote pour connaître la pression correspondante d'après les expériences de Regnault et ensuite celles de M. Cailletet et de M. Amagat.

Pour les appareils industriels, tout en procédant plus grossièrement, on appliquera essentiellement la même méthode : on comparera directement chaque manomètre avec un manomètre à air libre. On éliminera ainsi les défauts de cylindricité du tube, les erreurs de capillarité, etc.

Bien que cette méthode de graduation soit la seule usitée et la seule bonne, il n'est pas inutile de se rendre compte par le calcul de la manière dont s'échelonneront les divers traits de la graduation. Supposons le tube cylindrique, et de section s; supposons la cuvette également cylindrique, et de section annulaire S. Sous la pression atmosphérique H, l'air enfermé dans le tube occupe toute

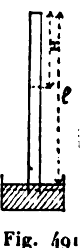


Fig. 491

la longueur du tube l; si la pression devient nH, l'air est relégué dans un espace de longueur x. D'après la loi de Mariotte, la tension de cet air est alors

$$H\frac{l}{x}.$$

D'autre part, cette même tension est égale à la pression extérieure nH, diminuée de la hauteur du mercure dans le tube au-

dessus du niveau actuel dans la cuvette, soit $(l-x)+(l-x)\frac{s}{S}$; ce qui donne

$$nH-(l-x)\left(1+\frac{s}{S}\right).$$

En égalant ces deux expressions, on a

$$H\frac{l}{x}=nH-(l-x)\left(1+\frac{s}{S}\right),$$

ou

$$\frac{S+s}{S}x^2+\left(nH-\frac{S+s}{S}l\right)x-lH=0,$$

équation du deuxième degré, dont les racines sont nécessairement réelles, puisque la question admet nécessairement une solution réelle, ce qui est confirmé algébriquement, d'ailleurs, par le signe $-$ du terme tout connu. Ce signe nous apprend en outre que les deux racines sont de signe contraire, ce qui permet de choisir immédiatement celle des racines qui convient à la question, et il n'y en a évidemment qu'une : d'après la manière dont nous avons compté x, on ne peut en effet admettre physiquement une quantité négative. C'est donc la racine positive qui donne la valeur cherchée

$$x=\frac{S}{2(S+s)}\left\{-nH+\frac{S+s}{S}l+\sqrt{n^2H^2-2(n-2)\frac{S+s}{S}lH+\left(\frac{S+s}{S}\right)^2l^2}\right\}.$$

En attribuant à n dans cette expression successivement les valeurs 1, 2, 3, 4,.... on aura la place des différents points de l'échelle.

On donne aussi fréquemment au manomètre à air comprimé la forme d'un siphon [1]. Si les deux branches M et N sont cylindriques, et ont respectivement des sections s et S, la formule précédente s'applique sans modification aucune.

Une même variation dans la pression se traduit par un mouvement de la colonne mercurielle, sensiblement en raison inverse

[1] Au bas de la branche M, on ménage une boule A, dans laquelle l'air du manomètre pourra se répandre et se dilater si la pression dans le récipient tombe accidentellement au-dessous de 1 atmosphère.

de la pression. En d'autres termes, la sensibilité décroît rapidement avec la pression.

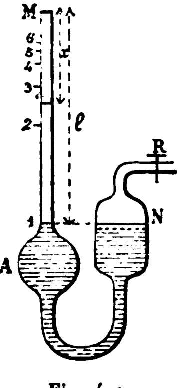


Fig. 492

Pour éviter cet inconvénient, on donne souvent à la branche fermée M une forme conique. Il est possible alors, dans certaines

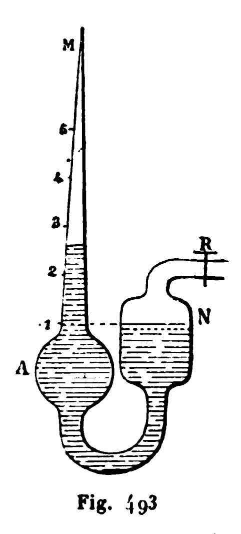


Fig. 493

limites, d'avoir pour des accroissements égaux de pression des déplacements égaux du niveau du mercure en M [1]. L'appareil

[1] Pour que le manomètre fût d'égale sensibilité dans toute son étendue, la section méridienne de la branche M devrait être une branche d'hyperbole équilatère, ayant pour l'une de ses asymptotes l'axe du tube.

gradue, comme tous les autres, par comparaison avec un mano-ètre à air libre.

294. Manomètres métalliques. — Les manomètres à air ›mprimé sont peu embarrassants, mais assez fragiles, et par même peuvent occasionner des accidents. D'autre part, il ;t presque impossible de s'en servir sur les machines mobiles. [. Bourdon a donc rendu un grand service à l'industrie par l'in-ention de son manomètre métallique, aujourd'hui universelle-ıent adopté.

Manomètre Bourdon. — Cet appareil consiste essentiellement en ın tube métallique, à section aplatie latéralement, enroulé sur lui-nème, et fermé à l'une de ses extrémités. La pression agit direc-

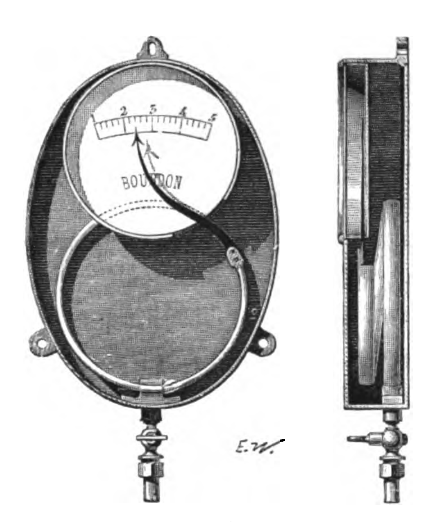


Fig. 494

tement à l'intérieur du tube, et tend à le dérouler; l'extrémité du tube éprouve ainsi des déplacements qui, dans des limites assez étendues, sont proportionnels aux pressions. L'instrument se gradue par comparaison avec un manomètre à air libre; et, d'après ce qui précède, les divisions sont équidistantes.

Manomètre Ducomet. — Un appareil analogue, d'invention plus récente, et aussi très répandu, est le manomètre Ducomet, constitué essentiellement par un capsule B, formée d'une triple lame argent-

cuivre-argent, soumise intérieurement à l'influence de la pression qu'on veut mesurer, et extérieurement à l'action d'un ressort DEFG. Si la pression augmente en A, la capsule se bombe, le bouton C se soulève en fléchissant le ressort DEFG; la bielle *b* tire sur une sorte de vilebrequin *cfd* portant l'aiguille indicatrice *gh*, et la fait avancer d'une quantité proportionnelle à la pression. Quand la pression diminue, la capsule, refoulée par le ressort, revient sur elle-même, et l'aiguille suit ce mouvement.

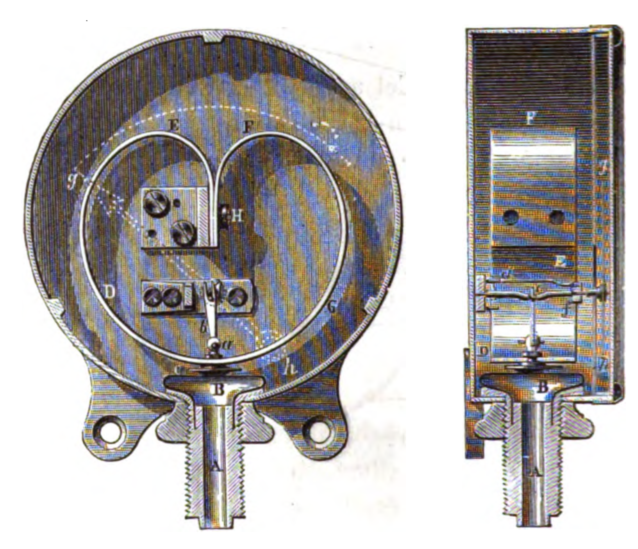


Fig. 495

Manomètre Cailletet. — Pour les hautes pressions, M. Cailletet [1], après avoir fait usage du manomètre à réservoir de verre dont nous avons parlé (155), se sert actuellement d'un manomètre à soupape, affranchi de tout frottement appréciable par l'emploi, en guise de soupape, d'un piston libre, analogue à celui de la machine pneumatique de Deleuil (302). Un tel piston, constitué par un cylindre de métal, mobile dans un corps de pompe cylindrique d'un diamètre à peine supérieur à celui du piston, et lubrifié par le fluide même du corps de pompe, permet de mesurer exactement les pressions considérables développées par une presse hydraulique, l'eau ne

(1) Cailletet, *Ann. de chim. et de phys.*, (5), XIX, 388; 1880.

s'échappant qu'avec une extrême lenteur par l'espace annulaire très étroit compris entre le piston et la paroi intérieure du cylindre où il se meut. Cette méthode, indiquée par M. Marcel Deprez, a été appliquée par M. Cailletet à la mesure de pressions dépassant 1500 atmosphères. La figure 496 représente son appareil. Une cavité cylindrique, creusée dans un bloc d'acier fondu, reçoit un piston plein, également en acier, dont le diamètre est inférieur de $\frac{1}{200}$ de millimètre seulement à celui du corps de pompe (¹). La

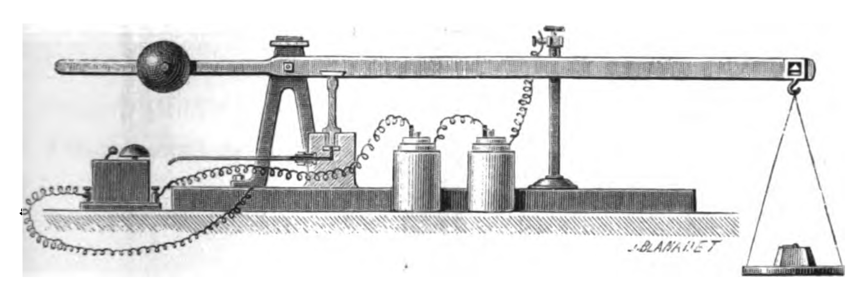


Fig. 496

tête du piston, terminée par un couteau, agit sur un fléau portant à son extrémité un plateau où l'on met des poids. Quand la pression fait équilibre à l'effort exercé par ces poids, le piston se soulève, et, fermant un circuit, met en mouvement une sonnerie électrique. M. Cailletet s'est assuré que cet appareil très simple donne des indications exactes dans les limites où il a été possible de le comparer avec les manomètres à mercure.

295. Voluménomètres. — Une application ingénieuse de la loi de Mariotte est celle que fit, en 1797, le capitaine du génie Say (²) dans son stéréomètre (στερεός, solide), instrument destiné à mesurer le volume et par suite la densité de la poudre de guerre, et en général de tout corps solide que l'on ne saurait mettre en contact avec l'eau.

(¹) A la base du corps de pompe, M. Cailletet place une membrane de baudruche qui, sans gêner en rien la communication de la pression, a l'avantage de supprimer tout écoulement d'eau autour du piston. Celui-ci est alors lubrifié par l'air simplement, comme dans la machine de Deleuil.

(²) Say, *Ann. de chim. et de phys.*, (1), XXIII, 1; an VI (1797).

Stéréomètre de Say. — Une cloche en verre, que peut fermer hermétiquement un plan de verre, est soudée à la partie supérieure d'un tube bien cylindrique, gradué, plongeant dans une éprouvette pleine de mercure. La cloche ne contenant d'abord que de l'air, on enfonce l'appareil dans le mercure jusqu'au zéro de la graduation; on applique l'obturateur, et on enferme ainsi un volume V d'air, à la pression atmosphérique actuelle H. On soulève le tube:



Fig. 497

le volume occupé par l'air augmente de v, tandis que le mercure monte de h dans le tube; on lit cette hauteur h. D'après la loi de Mariotte, on a

$$VH = (V + v)(H - h),$$

d'où

$$V = v\frac{H - h}{h},$$

équation qui détermine V, si v est connu par un jaugeage préalable.

Si v est inconnu, on fera une deuxième expérience en soulevant le tube de façon que le mercure s'élève à une hauteur différente h_1.

Le tube étant cylindrique, les volumes v et v_1, dont l'espace V, occupé par l'air, s'est accru dans les deux expériences, sont respectivement égaux à na et n_1a, n et n_1 désignant les divisions auxquelles s'arrêtait le mercure, et a étant le volume inconnu d'une division. On a ainsi deux équations donnant V et a.

V étant déterminé, on recommence une expérience toute semblable, après avoir mis dans la cloche le corps de volume inconnu x. On a alors

$$(V-x)H=(V-x+v)(H-h'),$$

d'où

$$x=V-v\frac{H-h'}{h'}.$$

Volumimètre de Kopp. — Kopp [1] a modifié l'appareil de Say

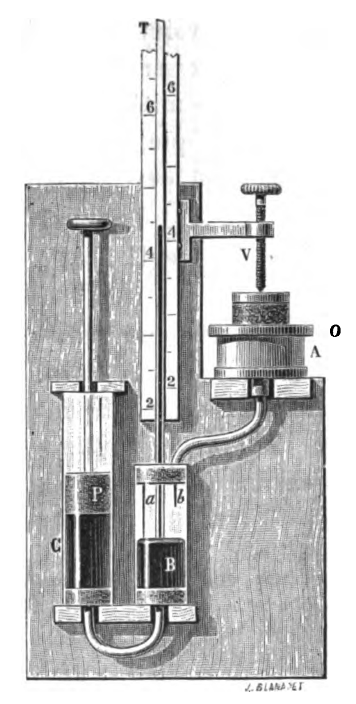


Fig. 498

comme le montre la figure 498. En A est la cloche, qui se ferme

[1] Kopp, *Liebig's Ann. von chem. und pharm.*, XXXV, 17; 1840.

encore au moyen d'un obturateur O que l'on peut appuyer à l'aide de la vis V. Elle communique par un petit tube avec un cylindre de verre B, fermé à ses deux extrémités. Dans ce cylindre plonge un tube étroit T, ouvert à ses deux bouts, et le long duquel court une échelle, en pouces, ayant son zéro à l'extrémité d'une pointe d'ivoire *a* fixée en haut du cylindre comme dans la cuvette de Fortin (une deuxième échelle partant d'une pointe *b* servira à une expérience de vérification). Enfin le cylindre B est relié par sa partie inférieure à un corps de pompe C, dans lequel se meut un piston P. Du mercure remplit en partie les cylindres B et C.

L'obturateur étant en place, on soulève le piston P, qui entraîne derrière lui le mercure; l'extrémité inférieure du tube T est dégagée, et la pression atmosphérique s'établit dans le cylindre B et la cloche A. On abaisse le piston; le mercure, en fermant l'orifice du tube T, isole en B et A un volume d'air V à la pression atmosphérique H. On continue à presser sur le piston jusqu'à ce que le mercure vienne toucher l'extrémité de la pointe *a* : le volume est alors réduit à $V-v$, tandis que, le mercure s'étant élevé en T d'une hauteur h, la pression est devenue $H+h$; et l'on a

$$VH=(V-v)(H+h)\ (^1).$$

On introduit alors en A, dans un petit vase en platine qui s'y trouve placé à poste fixe, n grammes d'eau, et, après avoir remis le couvercle O, on recommence la même manœuvre. On a alors

$$(V-n)H=(V-n-v)(H+h_1).$$

(1) Kopp a construit sur le même principe un petit appareil destiné à remplacer le baromètre à mercure, et qui a exactement la même forme que son voluminiètre, sauf que la cloche A est supprimée. En opérant comme avec le voluminètre, on a une équation toute semblable

$$VH=(V-v)(H+h),$$

V étant le volume B depuis l'orifice du tube T jusqu'à la base supérieure du cylindre, et v le volume compris entre l'orifice du tube T et l'extrémité de la pointe *a*. Quand ces volumes V et v ont été mesurés une fois pour toutes, une manipulation très simple donne h, et par suite, au moyen de l'équation précédente, la pression inconnue H. (Kopp, *Pogg. Ann.*, XL, 62; 1837).

Ces deux équations déterminent V et v.

Si l'on remplace les n grammes d'eau par un volume x d'une poudre quelconque, une nouvelle opération, identique aux deux précédentes, donnera

$$(V-x)H=(V-x-v)(H+h'),$$

et par suite x, toutes les autres quantités étant connues.

La pointe b et la deuxième échelle permettent de contrôler cette mesure en réduisant l'espace V d'un volume v', déterminé une fois pour toutes, de même que le volume v.

Comme on a préalablement pesé la poudre, on en déduira aisément son poids spécifique.

Kopp a trouvé ainsi :

	Densité.			Densité.
Pierre ponce (pulvérisée)	2,15	Râpure bien desséchée de bois de	tilleul	1,13
Cendre de hêtre	2,85		sapin	1,16
Farine de froment	1,49		noyer	1,17
Amidon	1,56		pommier	1,20
Coton	1,27		prunier	1,22
Laine (travaillée)	1,29		poirier	1,23
Lin	1,45		chêne	1,27
Soie (fil de cocon brut)	1,56		hêtre	1,29

Voluménomètre de Regnault. — Regnault [1] a réalisé la même idée sous une forme très ingénieuse. Son voluménomètre se compose d'un manomètre MN, dont la courte branche, renflée en b, se relie au moyen d'un collier à gorge avec un ballon à large col B. Ce ballon est surmonté lui-même d'un ajutage à robinet r, s'ouvrant librement dans l'atmosphère.

Le robinet r étant ouvert et le robinet R du manomètre placé dans la position marquée sur la figure, on verse du mercure par la branche ouverte, jusqu'à ce que dans la petite branche il atteigne un repère α, tracé au-dessus de b. On ferme le robinet r, et on isole ainsi dans l'appareil un volume d'air V à la pression atmosphérique. On tourne le robinet R de manière à faire couler le mercure simultanément des deux branches, jusqu'à ce que dans la branche fermée il atteigne un deuxième repère β, tracé au-dessous

[1] REGNAULT, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XIV, 207 ; 1845.

de b. Le mercure est alors plus bas dans la branche M d'une quantité h que l'on mesure. Et l'on a

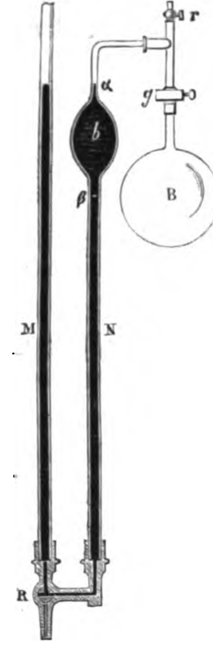


Fig. 499

$$VH = (V + v)(H - h),$$

v désignant le volume du renflement b entre α et β. Supposons le volume v connu, cette première expérience détermine V.

Que maintenant l'on recommence l'opération après avoir mis dans le ballon un corps de volume x, et l'on aura

$$(V - x)H = (V - x + v)(H - h'),$$

équation qui fera connaître x, comme dans le stéréomètre de Say.

Pour avoir v, on effectuera un jaugeage au mercure sur l'appareil même. Ayant amené le mercure en α, on le fera écouler de la branche N seule jusqu'en β, on pèsera le mercure recueilli, et du poids trouvé on déduira immédiatement v. On pourrait aussi mesurer directement V, par un jaugeage au mercure de α en g, et par un jaugeage à l'eau pour le ballon : on aurait ainsi une vérification de la mesure au voluménomètre.

Ajoutons qu'après avoir déterminé x par la méthode indiquée plus haut, on fera bien de vérifier la valeur ainsi obtenue en procédant par compression, au lieu d'opérer par dilatation, c'est-à-dire que, partant d'abord du volume $V + v - x$ sous la pression atmosphérique, on passera au volume $V - x$ sous la pression $H + h''$, ce qui donnera x par l'équation

$$(V + v - x)H = (V - x)(H + h'').$$

Rarement cette vérification sera satisfaisante. Toutes les poudres en effet condensent plus ou moins l'air à leur surface (301) ; et pour une même poudre cette condensation est variable avec la

pression. De là une erreur inhérente à la méthode, et affectant également tous les voluménomètres. C'est ce qui a fait renoncer à cet instrument pour la mesure de la densité des poudres de guerre (211).

III. — MÉLANGE DES GAZ.

296. Loi du mélange des gaz. — *Miscibilité des gaz.* — Deux liquides mis en présence ne se mêlent pas toujours. Deux gaz, au contraire, se mêlent toujours [1], et au bout d'un temps plus ou moins long le mélange est complet. C'est ce que montra Berthollet [2] par une expérience restée célèbre.

Expérience de Berthollet. — Deux ballons, munis de garnitures à robinet pouvant se visser l'une sur l'autre, furent remplis, l'un d'hydrogène, l'autre d'acide carbonique. On les réunit en plaçant en haut le ballon à hydrogène, puis ouvrant les robinets, on abandonna l'appareil à lui-même dans un lieu à température constante (les caves de l'Observatoire). Plusieurs jours après, on ferma les robinets, on sépara les ballons, et on reconnut : 1° que dans chaque ballon la pression était restée égale à la pression atmosphérique;

[1] Que sous une éprouvette pleine d'hydrogène on en place une autre pleine d'air en juxtaposant les deux ouvertures, puis qu'au bout de quelques instants on sépare les deux éprouvettes, et que de l'une ou de l'autre on

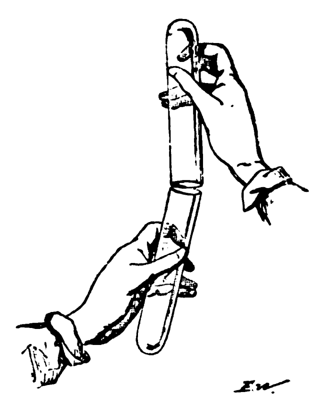


Fig. 500

approche une bougie enflammée : une détonation se produira, montrant que les deux gaz se sont mêlés malgré la différence des densités qui devrait tendre à les maintenir séparés. Cette expérience est due à Volta (1790).

[2] BERTHOLLET, *loc. cit.*

2° que dans l'un et l'autre ballon il y avait un mélange à volume égal d'acide carbonique et d'hydrogène.

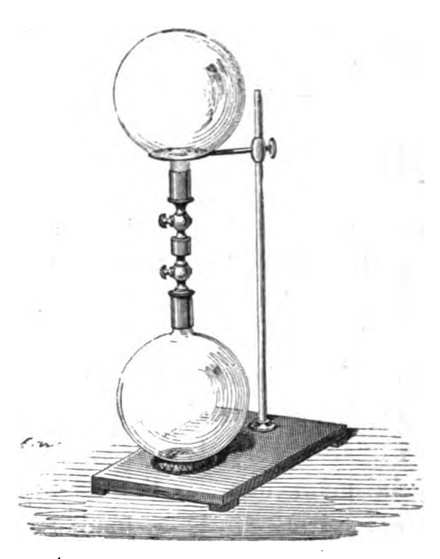


Fig. 501

Ce mélange parfait ne résultait évidemment ni des courants provoqués par des différences de température, ni de l'action de la pesanteur. Il faut donc l'attribuer à l'expansibilité (123) par suite de laquelle chaque gaz s'est répandu dans toute la capacité de l'enveloppe, sans que la présence d'un deuxième gaz ait eu d'autre effet que de retarder cette expansion (1).

Dès lors il est naturel de supposer que chaque gaz séparément prend la pression qui correspond au volume total; et comme la pression du mélange est nécessairement la résultante de ces pressions particulières, on se trouve amené à la loi formulée en 1801 par Dalton (2).

Loi de Dalton. — Dans un mélange de plusieurs gaz n'ayant les uns sur les autres aucune action chimique, la force élastique du mélange est égale à la somme des forces élastiques des différents gaz considérés comme occupant chacun le volume total.

(1) Ce phénomène sera étudié plus loin en détail sous le nom de diffusion. Ici nous ne considérons que l'équilibre qui a lieu, la diffusion achevée.

(2) DALTON, *Manchester Phil. Soc. Memoirs*, V, 535; et *Ann. de chim. et de phys.*, (1), XLIV, 40; 1802.

Si donc nous nommons v, v', v''... les volumes de divers gaz pris initialement sous les pressions respectives p, p', p''..., si nous appelons V le volume du récipient dans lequel on les introduit tous, et P la pression du mélange, nous aurons

$$P = \frac{pv}{V} + \frac{p'v'}{V} + \frac{p''v''}{V} + \cdots,$$

ou

$$P = \Sigma \frac{pv}{V}.$$

Cette relation peut s'écrire

$$PV = \Sigma pv,$$

c'est-à-dire que le produit PV de la pression P par le volume V du mélange est égal à la somme des produits pv relatifs aux gaz constituants.

Vérifications expérimentales et applications. — L'expérience de Berthollet peut évidemment être citée comme une preuve expérimentale de cette loi.

On vérifie aussi constamment la loi, en chimie, soit sous la forme

$$V = \Sigma v,$$

dans le cas de $p = p' = p'' \cdots = P$,
soit sous la forme

$$P = \Sigma p,$$

dans le cas de $v = v' = v'' \cdots = V$.

A ce dernier cas correspond un mode d'analyse souvent employé par Regnault. Soit par exemple un mélange de deux gaz A et B, remplissant le volume V sous la pression P ; on absorbe le gaz B, puis on ramène le gaz A au volume V ; il faut pour cela réduire la pression à p. Le gaz B répandu dans le même volume V supportait la pression $P - p$; sous la pression p, il occuperait un volume $\frac{V(P-p)}{p}$.
Donc les volumes des deux gaz sous la même pression p sont dans le rapport

$$\frac{V}{\frac{V(P-p)}{p}} = \frac{p}{P-p}$$

telle est la composition en volume du mélange proposé. Cette méthode a, comme on le voit, l'avantage d'éviter les mesures de volume : tout se réduit à des mesures de pression sous un volume constant, quelconque d'ailleurs, et inutile à connaître.

Que l'on procède ainsi à l'analyse d'un mélange de composition connue, et l'exactitude de l'analyse sera une confirmation de la loi. Ces vérifications toutefois ne sont pas absolument rigoureuses, les appareils usités en chimie ne permettant pas des mesures très précises.

D'une manière générale, si l'on connaît aux différentes pressions les produits pv relatifs à chacun des gaz constituant le mélange, on pourra calculer pour les mêmes pressions le produit PV propre au mélange. En comparant les résultats de ce calcul à l'observation, Regnault trouva qu'en effet, même pour des gaz s'écartant beaucoup de la loi de Mariotte, tels que l'acide carbonique ou l'acide sulfureux, mêlés à l'air ou à l'hydrogène, la compressibilité réelle du mélange à 2 atmosphères s'accordait sensiblement avec la compressibilité calculée d'après la loi de Dalton. Mais aux pressions élevées il n'en est plus ainsi : M. Andrews [1] et M. Cailletet [2] ont montré qu'alors chaque mélange a une compressibilité particulière, que l'on ne peut évaluer d'avance.

En résumé, la loi du mélange des gaz doit être considérée comme n'étant qu'approchée à la manière de la loi de Mariotte. Mais, de même que la loi de Mariotte, on pourra la tenir pour exacte dans toutes les applications courantes.

C'est en calculant d'après cette loi la tension actuelle des gaz de notre atmosphère que nous pourrons estimer leur action physiologique. Les expériences de M. Paul Bert [3] sur les modifications que les changements de la pression barométrique apportent dans les manifestations vitales des animaux et des végétaux, l'ont en effet conduit à cette conclusion :

« D'une manière générale, les gaz favorables ou nuisibles (oxygène, acide carbonique, etc.) n'agissent sur les êtres vivants que suivant la tension qu'ils possèdent dans l'atmosphère ambiante, ten-

[1] Andrews, *Phil. mag.*; 1876-1877.
[2] Cailletet, *Journal de physique*, IX, 192; 1880.
[3] P. Bert, *La pression barométrique*. Paris, Masson; 1878.

sion qui se mesure en multipliant leur proportion centésimale par la pression barométrique du mélange ; l'augmentation de l'un des facteurs peut être compensée par la diminution de l'autre. »

IV. — ABSORPTION DES GAZ.

297. Solubilité des gaz dans les liquides. — Les gaz sont en général solubles dans les liquides, c'est-à-dire qu'ils peuvent s'unir aux liquides « de façon à constituer une série de systèmes liquides et homogènes, dans lesquels la proportion relative des composants varie d'une manière continue et indéfinie [1]. » Cette proportion dépend en effet non seulement de la nature du gaz et de celle du liquide [2], mais encore de la pression, ainsi que Mariotte [3] semble l'avoir reconnu le premier. Si la pression augmente, une nouvelle quantité de gaz se dissout; si la pression diminue indéfiniment, la dissolution s'appauvrit graduellement, et finit par perdre tout son gaz.

298. Loi d'Henry [4]. — La dissolution d'un gaz dans un liquide est régie par cette loi unique, due à Henry, de Manchester (1802) :

(1) BERTHELOT, *Essai de mécanique chimique*, II, 142. Paris, Dunod ; 1879.

(2) La double influence de la nature du gaz et de la nature du liquide s'est immédiatement manifestée aux premiers observateurs qui ont étudié cette question (Priestley, Cavendish). Th. de Saussure, en mesurant les volumes de différents gaz absorbés par 1 volume d'eau ou 1 volume d'alcool, obtint deux séries, presque parallèles, la solubilité dans l'alcool étant en général plus grande que dans l'eau. Le parallélisme toutefois n'existe pas toujours ; ainsi les volumes de gaz oléfiant et d'acide carbonique absorbés par 1 volume d'eau à 18° étant 0,155 et 1,06, les volumes des mêmes gaz absorbés par 1 volume d'essence de lavande à la même température sont 2,61 et 1,91.

Les nombres suivants, qui expriment le volume d'acide carbonique dissous par 1 volume de différents liquides à 18°, montrent bien l'influence de la nature du liquide :

Alcool de densité 0,803	2,60	Huile d'olive	1,51
Éther de densité 0,727	2,17	Eau	1,06
Essence de lavande	1,91	Eau sucrée	0,72
Essence de térébenthine	1,66	Eau salée	0,33

(TH. DE SAUSSURE, *Bibliothèque britannique*, XLIX et L; 1812).

(3) MARIOTTE, *loc. cit.*

(4) HENRY, *Phil. Trans.*; 1803.

Dans une solution gazeuse en équilibre à une température donnée, il existe un rapport constant entre la tension du gaz dissous et la tension du gaz extérieur.

Ce rapport constant β se nomme le *coefficient de solubilité* du gaz dans le liquide.

On peut dire aussi que

A une température donnée, il existe un rapport constant β *entre le volume du gaz dissous, mesuré sous la pression extérieure après l'absorption, et le volume du liquide absorbant.*

Ou bien encore que

A une température donnée, le poids du gaz dissous par un volume donné de liquide est proportionnel à la pression que ce gaz exerce sur le liquide après l'absorption ([1]).

De ces divers énoncés, le premier, étant le plus commode dans les applications, doit être particulièrement retenu.

Pour mesurer la quantité de gaz absorbée sous différentes pressions, Henry se servait d'un large tube gradué A, fermé à chaque extrémité par une garniture à robinet : la garniture inférieure communiquait en outre, au moyen d'un conduit flexible C, avec un tube vertical étroit B. L'appareil étant rempli de mercure jusqu'au robinet supérieur R, on y faisait arriver par R un volume déterminé w de liquide, en laissant écouler le mercure par R', puis sur ce liquide (ce qui était un procédé assez imparfait) un volume déterminé v de gaz sous une pression P, égale à la pression barométrique augmentée de l'excès de pression produit en B. On agitait jusqu'à ce que le gaz cessât de se dissoudre; on rétablissait la pression

([1]) Soit ϖ le poids de gaz dissous par l'unité de volume du liquide sous la pression P, ce dernier énoncé s'écrira

$$\varpi = \mu P,$$

μ étant un coefficient constant, dont le rapport avec β est aisé à déterminer. Si en effet nous désignons par a le poids de l'unité de volume d'air à la température de l'expérience et sous la pression 760^{mm}, et si nous appelons d la densité du gaz employé, nous avons

$$\varpi = ad\frac{\beta P}{760},$$

et par conséquent

$$\mu = \frac{ad}{760}\beta.$$

initiale P; on observait un volume v_1. On recommençait ensuite

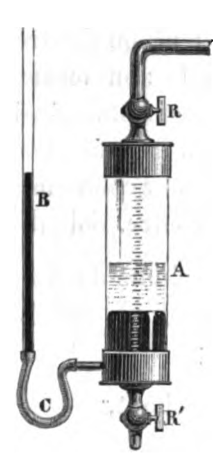


Fig. 502

à une autre pression. On vit ainsi que, quelle que fût la pression, un même volume w de liquide absorbait toujours le même volume $v - v_1$ de gaz. D'où la loi.

De ces expériences on concluait aisément les coefficients de solubilité. En effet, quand l'équilibre était établi, le gaz non dissous remplissait le volume v_1 sous la pression P, et le gaz dissous occupait le volume w sous la pression $P\beta$. Mais en réunissant ces deux masses de gaz, on reconstituerait la masse initiale, de volume v sous la pression P. On a donc, d'après la loi du mélange des gaz,

$$Pv = Pv_1 + P\beta w;$$

d'où

$$\beta = \frac{v - v_1}{w}.$$

Expériences de M. Bunsen. — M. Bunsen [1] a effectué sur ce sujet des expériences très précises, dont le principe est le suivant : dans une éprouvette graduée on introduit une certaine quantité

[1] BUNSEN, *Gasometrische Methoden*. Braunschweig, 1857 (Traduction française par Schneider. Paris, Masson; 1858).

du gaz à étudier, on en mesure exactement le volume et la pression, puis on introduit un volume déterminé de liquide, on ferme l'éprouvette, on l'agite vivement, on l'ouvre sur le mercure : le mercure monte dans l'éprouvette; on ferme de nouveau, on agite, on ouvre sur le mercure, et on continue ainsi jusqu'à ce que le volume du gaz ne diminue plus. On mesure alors le volume et la pression, et l'on a tout ce qu'il faut pour connaître le coefficient de solubilité à la température de l'expérience. Soient en effet :

p et v la pression et le volume du gaz au début,
p_1 et v_1 la pression et le volume du résidu gazeux,
w le volume du liquide;

on peut écrire, comme plus haut,

$$pv = p_1 v_1 + p_1 \beta w;$$

d'où

$$\beta = \frac{pv - p_1 v_1}{p_1 w}.$$

Pour opérer commodément et sûrement, M. Bunsen s'est servi d'un appareil spécial, qu'il nomme l'*absorptiomètre* (1).

L'éprouvette graduée e porte à sa partie inférieure un anneau b, fileté extérieurement suivant un pas de vis dont l'écrou est taillé dans une pièce aa, garnie au fond d'une plaque de caoutchouc, et munie latéralement de deux ressorts en acier cc, qui s'engagent dans deux rainures verticales creusées à l'intérieur du pied f. La pièce aa étant ainsi immobilisée dans le sens horizontal, il suffira d'imprimer à l'éprouvette un faible mouvement de rotation autour

(1) A défaut de cet appareil, on peut se servir d'un tube gradué ordinaire, que l'on bouche avec le doigt pour agiter; la manipulation ne présente aucune difficulté. La seule opération délicate est la lecture du volume du gaz au début et à la fin de l'expérience. Pour cette lecture, il faut avoir soin de porter le tube dans une éprouvette contenant au fond du mercure, puis par-dessus assez d'eau pour que le tube soit complètement immergé; car il est absolument nécessaire que la mesure du volume d'un gaz soit faite à une température connue; sinon, cette mesure n'a aucun sens. Tenant le tube avec une pince en bois, on fait les lectures de volume et de pression, y compris celle de la colonne d'eau qui presse sur le mercure de l'éprouvette. Sans atteindre évidemment à la précision de Bunsen, on peut ainsi faire de bonnes mesures.

de son axe, à gauche ou à droite, pour l'ouvrir ou la fermer à vo-

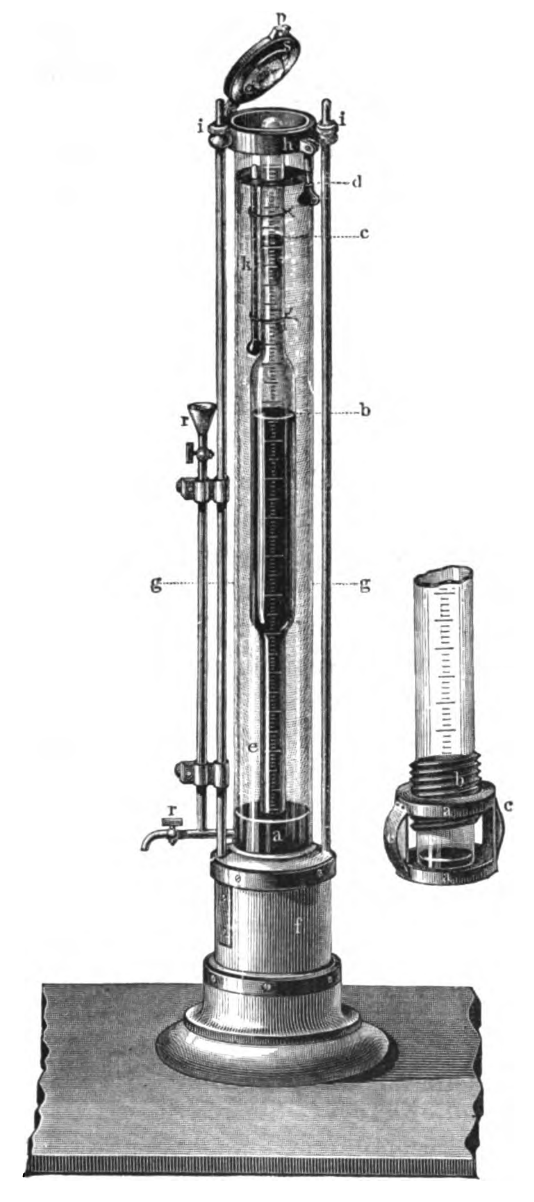


Fig. 503

lonté. L'éprouvette est placée dans un manchon *gg*, contenant à

la partie inférieure une certaine quantité de mercure, que l'on peut faire varier à volonté au moyen des tubes *rr*, et par-dessus une colonne d'eau remplissant le reste du manchon afin que la température demeure constante durant tout le cours de l'expérience. Un couvercle *p*, serré par la vis *d*, ferme le manchon à sa partie supérieure, et, pressant par un disque de caoutchouc *s* sur le sommet de l'éprouvette, maintient solidement celle-ci pendant les secousses violentes qu'on communique à l'instrument pour faciliter l'absorption.

Quand on veut procéder à une expérience, on remplit de mercure le tube à absorption, on y introduit, sur la cuve à mercure, une certaine quantité du gaz à examiner, et l'on effectue, comme d'ordinaire, les lectures nécessaires à la mesure et à la réduction du volume gazeux. On ajoute ensuite au gaz un volume convenable d'eau parfaitement purgée d'air, on ferme le tube à absorption avec la pièce *aa*, et on l'introduit dans le manchon contenant déjà une certaine quantité de mercure. On achève de remplir l'appareil avec de l'eau. On tourne ensuite légèrement le tube à absorption autour de son axe pour l'ouvrir et établir l'équilibre entre les pressions extérieure et intérieure; puis on referme l'instrument, et on le secoue très fortement pendant une minute. On répète cette opération aussi longtemps que le gaz éprouve une diminution appréciable lorsqu'on ouvre le tube. On procède enfin derechef aux lectures nécessaires à la mesure et à la réduction du résidu gazeux, en notant la température ainsi que la hauteur barométrique, et en relevant sur la division du tube à absorption : le niveau inférieur *a* du mercure dans le manchon; le niveau supérieur *b* du mercure dans le tube à absorption; le niveau supérieur *c* de l'eau dans le même tube; et le niveau supérieur *d* de l'eau dans le manchon.

En opérant ainsi, M. Bunsen a vérifié la loi d'Henry dans les limites de pression où il pouvait opérer.

Il a vérifié aussi ce fait, que, d'une manière générale, la solubilité d'un gaz dans un liquide diminue quand la température s'élève. Quelques nombres feront ressortir nettement l'influence de la température :

Coefficients de solubilité de quelques gaz dans l'eau, à différentes températures.

t	Hydrogène.	Azote.	Oxygène.	Acide carbonique.	Acide sulfureux.	Ammoniaque.
0°	0,01930	0,02035	0,04114	1,7967	79,789	1050
5	0,01930	0,01794	0,03628	1,4497	67,485	918
10	0,01930	0,01607	0,03250	1,1847	56,647	813
15	0,01930	0,01478	0,02989	1,0020	47,276	727
20	0,01930	0,01403	0,02838	0,9014	39,374	654
25	0,01930	»	»	»	32,940	586

Ces résultats peuvent se représenter par des formules paraboliques entre les limites des expériences :

$$\beta = \beta_0 - bt + ct^2.$$

Ainsi, l'on a entre 0° et 20° :

Hydrogène. . . .	$\beta = 0,01930$
Azote.	$0,02035 - 0,000539\,t + 0,00001116\,t^2$
Oxygène	$0,04114 - 0,001090\,t + 0,00002256\,t^2$
Acide carboniq.	$1,7967 - 0,0776\,t + 0,00164\,t^2$
Acide sulfureux.	$79,789 - 2,608\,t + 0,0294\,t^2$
Ammoniaque . .	$1050 - 29,5\,t + 0,677\,t^2 - 0,00956\,t^3$

En écrivant la relation précédente sous la forme

$$\beta = \beta_0 \left(1 - \frac{b}{\beta_0} t + \frac{c}{\beta_0} t^2\right),$$

on remarque que le rapport $\frac{b}{\beta_0}$, d'où dépend presque exclusivement la diminution de la solubilité, ne varie guère que du simple au double pour les différents gaz, tandis que β_0, l'ammoniaque même laissée de côté, varie de 1 à 4000 (1).

Degré d'exactitude de la loi d'Henry. — Les déterminations de M. Bunsen n'avaient été faites que dans des limites de pression très restreintes. Les expériences plus étendues de MM. Roscoë et Ditt-

(1) E. Wiedemann, *Wied. Ann.*, XVII, 349; 1882.

mar (¹) et de M. Sims (²) montrèrent bientôt que pour les gaz très solubles la quantité de gaz absorbée est loin d'être proportionnelle à la pression, l'écart étant d'autant plus considérable que la température est moins élevée.

Voici, par exemple, d'après M. Sims, les poids en grammes p d'acide sulfureux et d'ammoniaque que 1 gramme d'eau peut dissoudre à 20° sous diverses pressions h, exprimées en millimètres de mercure (déduction faite de la tension de la vapeur d'eau).

h	p	
	Acide sulfureux.	Ammoniaque.
100	0,016	0,158
200	0,030	0,232
300	0,044	0,296
400	0,059	0,353
500	0,071	0,403
600	0,083	0,447
700	0,104	0,492
800	0,110	0,535
900	»	0,574
1000	0,137	0,613
1500	0,205	»
2000	0,272	0,992

Ces deux gaz se dégagent cependant en totalité de leur dissolution quand on soumet celle-ci à l'action du vide, ou, ce qui revient au même, quand on l'abandonne en présence d'une atmosphère illimitée ou qu'on la fait traverser par un courant prolongé d'un autre gaz (³). Mais cette destruction de la dissolution par l'action du vide, ou par la présence d'une quantité, soit

(¹) Roscoe et Dittmar, *Chem. Soc. quart. Journ.*, XII, 128; 1860.
(²) Sims, *Chem. Soc. quart. Journ.*, XIV, 1; 1862.
(³) Nous ne considérons pas ici les liqueurs qui résistent à l'action du vide, soit immédiatement, soit après avoir perdu partie d'un de leurs composants, le caractère exclusivement chimique d'un liquide que ne modifie pas l'action du vide étant manifeste (Voir Berthelot, *loc. cit.*). Nous laissons également de côté les solutions salines, dont l'action sur les gaz est en général un phénomène complexe, dépendant à la fois de la solution simple et de la combinaison chimique (Voir Fernet, C. R., XLI, 1237, et XLVI, 620 et 674; 1855-58).

illimitée, soit incessamment renouvelée, d'un gaz étranger, bien que parfaitement conforme aux lois de la dissolution simple, ne témoigne pas que le liquide ne renferme pas de véritables combinaisons définies (1).

La chaleur de dissolution de tout gaz très soluble surpasse en effet de beaucoup sa chaleur de liquéfaction (2). Ainsi, tandis que la chaleur de liquéfaction du gaz ammoniac est 4,4, la dissolution de ce gaz, vers 15°, dégage environ 8 calories : la différence des deux nombres, représentant la chaleur qui serait dégagée par la réaction de l'eau sur l'ammoniaque liquide, indique nettement un phénomène chimique accompagnant le changement d'état. D'ailleurs, l'existence d'une combinaison réelle entre le gaz et l'eau peut le plus souvent être mise hors de doute par le refroidissement qui en détermine la cristallisation. L'acide sulfureux donne ainsi, à — 15°, — 6° et 0°, trois hydrates distincts, $SO^2,14HO$, $SO^2,9HO$ et SO^2,HO. De même la solution aqueuse d'ammoniaque renferme un hydrate $AzH^3,2HO$, que l'on peut séparer par refroidissement, et il en existe peut-être encore d'autres. Mais tous ces composés sont peu stables, et ne peuvent exister qu'en présence de certaines quantités de leurs composants ; par suite, le dégagement du composant gazeux amène une décomposition qui, l'élimination du gaz dissous continuant, se poursuit jusqu'à la destruction complète du composé, et par conséquent jusqu'au dégagement total du gaz contenu dans le liquide.

Aux pressions peu élevées, l'acide carbonique suit la loi d'Henry, mais bientôt il se comporte comme un gaz très soluble, dont MM. de Khanikoff et Louguinine (3) d'abord, puis M. von Wroblewski (4), ont cherché à mesurer l'absorption par l'eau sous les fortes pressions. MM. de Khanikoff et Louguinine, avec un instrument semblable à celui de Bunsen, ne purent pas aller bien loin.

(1) Voir Berthelot, *loc. cit.*, 147.

(2) Dans presque tous les cas connus, la chaleur de dissolution est supérieure à la chaleur de liquéfaction. Il n'est donc peut-être aucun gaz dont la dissolution puisse être regardée comme un simple mélange, où les molécules gazeuses seraient simplement disséminées, à la manière d'une poussière très ténue, répartie uniformément dans le liquide (Berthelot).

(3) De Khanikoff et Louguinine, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XI, 412; 1867.

(4) Von Wroblewski, *Wied. Ann.*, XVII, 103, et XVIII, 290; et *Journal de physique*, (2), I, 452; 1882-83.

M. von Wroblewski s'est servi d'une pompe Cailletet, dont il avait remplacé le tube à gaz par un appareil à absorption, relié à un manomètre à air comprimé. L'appareil était disposé de manière que le gaz pût être refroidi à zéro en même temps que soumis à des pressions qui furent portées jusqu'à 50 et 60 atmosphères. La température restant constante, la quantité de gaz dissoute dans l'eau croît beaucoup moins rapidement que la pression, et tend vers une certaine limite, comme le montre le tableau suivant, où q représente, en centimètres cubes à 0° et sous la pression de 760mm, la quantité de gaz dissoute par 1 centimètre cube sous la pression p évaluée en atmosphères.

p	q		$\frac{q}{p}$	
	à 0°.	à 12°,4.	à 0°.	à 12°,4.
1atm	1cc,797	1cc,086	1,797	1,086
5	8 ,65	5 ,15	1,730	1,030
10	16 ,03	9 ,65	1,603	0,965
15	21 ,95	13 ,63	1,463	0,909
20	26 ,65	17 ,11	1,332	0,855
25	30 ,55	20 ,31	1,222	0,812
30	33 ,74	23 ,25	1,124	0,775

D'autre part, en refroidissant le gaz par une détente brusque, on vit apparaître sur les parois humides du tube, ainsi qu'à la surface du liquide, un givre abondant, qui n'était autre qu'un hydrate solide CO^2, 8HO, stable à 0° aux pressions supérieures à 12atm,3, et se liquéfiant immédiatement au-dessous de cette limite pour se décomposer bientôt ensuite.

En résumé, la loi d'Henry ne convient qu'aux gaz peu solubles et pour des pressions peu considérables.

Volume de la solution. — L'utilité qu'il y aurait à connaître l'état réel des corps dissous, non seulement au point de vue de la mécanique moléculaire, mais aussi relativement au rôle des principaux liquides physiologiques, des médicaments, etc. (1), donne de l'intérêt à tous les faits qui peuvent nous éclairer sur cet état. Nous

(1) Voir Berthelot, *loc. cit.*

noterons donc encore qu'un liquide, en absorbant un gaz, augmente toujours de volume.

Quant à la densité de la dissolution, elle est, suivant les cas, plus grande ou plus petite que celle du liquide primitif. Soient en effet w_0 le volume initial du liquide, w son volume après la dissolution, D_0 la densité du liquide primitif, D la densité de la dissolution, et d la densité du gaz *par rapport à l'eau*, β désignant toujours le coefficient de solubilité du gaz, on a nécessairement

$$wD = w_0 D_0 + w_0 \beta d,$$

d'où

$$\frac{D}{D_0} = \frac{w_0}{w}\left(1 + \beta \frac{d}{D_0}\right) \text{ (1)},$$

rapport qui sera $\gtrless 1$ suivant que l'on aura $w \lesseqgtr w_0\left(1 + \beta \frac{d}{D_0}\right)$.

Avec les gaz très solubles, l'accroissement de volume est notable; il pourra donc y avoir une diminution de densité sensible (ammoniaque).

299. Loi de Dalton. — *Lorsque plusieurs gaz sont mis en présence d'un même liquide, chacun d'eux se dissout comme s'il était seul.*

Cette loi, due à Dalton [2], a été vérifiée par M. Bunsen à l'aide de son absorptiomètre. Il en a même fait la base d'une méthode d'analyse qui se comprendra aisément quand nous aurons établi les formules résumant les lois d'Henry et de Dalton pour un mélange de gaz.

Formules résumant les lois d'Henry et de Dalton. — Le cas le plus simple est celui où les gaz forment au-dessus du liquide une atmosphère illimitée, de sorte que la pression extérieure de chaque gaz reste la même après la dissolution. Soient p la pres-

[1] Appliquons cette formule à l'eau saturée d'acide carbonique à 10° : w ne diffère pas sensiblement de w_0, $\beta = 1{,}1847$, $\frac{d}{D_0} = 0{,}0019$; on a donc $D = 1{,}002$, ce qui est précisément le nombre observé directement.

[2] DALTON, *loc. cit.*

sion individuelle de l'un des gaz dans cette atmosphère, et β le coefficient de solubilité de ce gaz ; la tension x du gaz dissous sera

$$x=\beta p.$$

Pour un deuxième gaz on aura de même

$$x'=\beta' p',$$

et ainsi de suite.

De sorte que si l'on cherche la composition du mélange gazeux dissous, comme les différents éléments occupent tous le même volume (le volume du liquide) sous les pressions respectives x, x',..., on aura, pour les proportions respectives des composants dans le mélange, βp, $\beta' p'$,... Si, par exemple, on veut connaître la composition de l'air dissous dans l'eau, à 15°, puisque pour l'oxygène on a sensiblement $p=\frac{1}{5}H$ et $\beta=0,030$, et pour l'azote sensiblement $p'=\frac{4}{5}H$ et $\beta'=0,015$, le rapport cherché sera très approximativement

$$\frac{\frac{1}{5}\cdot 0,030}{\frac{4}{5}\cdot 0,015}=\frac{1}{2},$$

ce nombre $\frac{1}{2}$ indiquant le rapport des pressions des deux gaz sous le même volume, ou, ce qui est équivalent, le rapport des volumes des deux gaz sous une même pression.

L'analyse directe de l'air dissous dans l'eau confirme ce résultat, et de plus elle donne toujours exactement le même rapport, quelles que soient la température et la pression. Donc le rapport entre la solubilité de l'oxygène et celle de l'azote est constant dans les limites des expériences. Cette remarque a permis à M. Bunsen d'obtenir le coefficient de solubilité de l'oxygène, qui ne peut se mesurer directement dans l'absorptiomètre, où le mercure, agité violemment au contact de l'oxygène et de l'eau, exerce une absorption sensible : pour avoir le coefficient de solubilité de l'oxygène aux températures et pressions de ses expériences,

M. Bunsen n'a eu qu'à multiplier celui de l'azote par un nombre constant 2,0225.

Quant au volume même de chacun de ces deux gaz dans 1[l] d'eau, il sera :

O 1[l] à la pression $0{,}030 \cdot \frac{1}{5} \cdot H$, ou $1^l{,}0{,}030 \cdot \frac{1}{5} = 6^{cc}$ à la pression H;

Az 1[l] à la pression $0{,}015 \cdot \frac{4}{5} \cdot H$, ou $1^l{,}0{,}015 \cdot \frac{4}{5} = 12^{cc}$ à la pression H.

C'est en effet ce que donne l'expérience.

Considérons maintenant le cas général. Dans un vase offrant un espace vide u_0 on introduit un premier gaz occupant le volume v sous la pression p, puis un deuxième gaz occupant le volume v' sous la pression p' (nous nous bornerons à deux gaz pour ne pas compliquer inutilement les formules); on met de l'eau, on agite vivement, on ajoute une certaine quantité de liquide, on agite de nouveau, et ainsi de suite. Finalement, quand la dissolution est achevée, le vase renferme un volume d'eau w, et au-dessus de cette eau une atmosphère gazeuse occupant un volume u. Connaissant les coefficients de solubilité des deux gaz β et β', on demande la composition du gaz dissous et celle de l'atmosphère restant. Soient, pour le premier gaz, x la tension du gaz dissous, et y la tension du gaz non dissous, nous avons les deux équations

$$x = \beta y,$$

et

$$xw + yu = pv;$$

d'où

$$x = \frac{\beta p v}{\beta w + u}, \quad \text{et} \quad y = \frac{pv}{\beta w + u};$$

on aura de même pour le deuxième gaz, x' et y' désignant les quantités correspondantes,

$$x' = \frac{\beta' p' v'}{\beta' w + u}, \quad \text{et} \quad y' = \frac{p' v'}{\beta' w + u}.$$

Ces équations permettent de résoudre toutes les questions relatives au phénomène considéré. Si, par exemple, on veut connaître la

force élastique de l'atmosphère non dissoute, on aura pour cette force élastique Y

$$Y = \frac{pv}{\beta w + u} + \frac{p'v'}{\beta' w + u},$$

tandis qu'avant toute dissolution la force élastique du mélange était

$$P = \frac{pv + p'v'}{u_0}.$$

Analyse absorptiométrique. — Supposons, comme le cas se présente dans l'analyse absorptiométrique, qu'opérant sur un mélange de deux gaz en proportions inconnues, on ait mesuré le volume primitif et la pression initiale u_0,P, puis le volume et la pression finals, u,Y, après l'absorption par un volume connu w de liquide; on en pourra déduire la composition du mélange. Des deux équations définissant Y et P, on tire en effet

$$\frac{pv}{p'v'} = \frac{(\beta w + u)\{Y(\beta' w + u) - Pu_0\}}{(\beta' w + u)\{Pu_0 - Y(\beta w + u)\}},$$

et le rapport des volumes des deux gaz, sous une même pression $p = p'$, sera

$$\frac{v}{v'} = \frac{(\beta w + u)\{Y(\beta' w + u) - Pu_0\}}{(\beta' w + u)\{Pu_0 - Y(\beta w + u)\}}.$$

Ainsi, en mettant dans l'absorptiomètre un mélange gazeux, l'air par exemple, en présence d'un liquide (eau, ou mieux alcool). pour lequel les solubilités respectives de l'azote et de l'oxygène soient connues, on pourra déterminer la composition en volume du mélange.

On peut aller plus loin : l'analyse absorptiométrique permet de déterminer dans un mélange la nature des gaz constituant et leur proportion. Pour cela, il suffit de prendre une certaine quantité (u_0,P) du mélange et de la mettre successivement en présence de trois volumes différents w_1, w_2, w_3, du liquide absor-

bant : on mesurera chaque fois u et Y. On aura donc, en faisant $p=p'=\mathbf{P}$,

$$u_0=v+v',$$

$$Y_1=\left(\frac{v}{\beta w_1+u_1}+\frac{v'}{\beta' w_1+u_1}\right)P,$$

$$Y_2=\left(\frac{v}{\beta w_2+u_2}+\frac{v'}{\beta' w_2+u_2}\right)P,$$

$$Y_3=\left(\frac{v}{\beta w_3+u_3}+\frac{v'}{\beta' w_3+u_3}\right)P,$$

soit en tout quatre équations déterminant les volumes respectifs des deux gaz v et v', sous une même pression P, et leurs coefficients de solubilité β et β'. Cherchant alors dans les tables de solubilité quels sont les gaz qui ont précisément β et β' pour coefficients de solubilité à la température de l'expérience, on saura leur nature. On connaîtra donc et la *quantité* de chaque gaz contenue dans le mélange et sa *qualité*.

M. Berthelot [1], dans ses analyses de gaz hydrocarbonés, a donné un bel exemple de l'emploi que l'on peut faire de dissolvants convenablement choisis pour déterminer la composition de mélanges gazeux, que les méthodes eudiométriques ordinaires auraient été impuissantes à démêler.

300. Dégagement d'un gaz dissous. — Quand un gaz est dissous dans un liquide, la dissolution peut perdre ce gaz par plusieurs causes :

1° *Par échauffement.* — La solubilité d'un gaz étant en général moindre à chaud qu'à froid [2], lorsqu'on chauffe la dissolution, on provoque un dégagement graduel du gaz; et une ébullition un peu prolongée débarrassera entièrement le liquide. C'est ainsi qu'en chauffant de l'eau ordinaire, on voit apparaître des bulles

[1] Berthelot, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), LI, 59; 1857.

[2] L'eau froide des torrents des Alpes est, quoi qu'on en ait dit souvent, riche en oxygène dissous (voir Lory, *Bulletin de la Société de géologie* ; 1877), et la truite s'y joue gaiement, tandis qu'au soir d'un jour d'été nous voyons les poissons des eaux calmes et peu profondes venir chercher à la surface l'air qu'ils ne trouvent plus dans leurs eaux chauffées par le soleil.

abondantes de gaz vers 60°, et que par l'ébullition on peut dégager complètement tous les gaz dissous.

2° *Par congélation.* — Quand l'eau se congèle, les gaz dissous s'en séparent et forment des bulles qui, suivant les cas, se dégagent ou restent emprisonnées dans la glace. De même, l'argent fondu laisse échapper, en se solidifiant, l'oxygène qu'il a dissous à l'état liquide (1). Un refroidissement brusque produit le *rochage*, et l'argent solidifié porte la trace évidente du dégagement gazeux qui a suivi le changement d'état : 1 gramme d'argent peut donner ainsi jusqu'à 1 centimètre cube d'oxygène (2). Toutefois le dégagement n'est jamais complet. M. Dumas (3) a reconnu que 1 kilogramme d'argent pur en lingot retient une quantité d'oxygène variant de 50 à 200 centimètres cubes, suivant le mode de préparation du métal, et qu'il a pu retirer par l'action combinée du vide et d'une température comprise entre 500° et 600°.

3° *Par diminution de pression.* — Ce moyen résulte immédiatement des lois de la dissolution. Néanmoins, lorsqu'on réduit la pression à la surface d'une dissolution, le liquide retient en général une quantité de gaz supérieure à celle qui correspond normalement à la pression nouvelle; en d'autres termes, la dissolution reste *sursaturée*. Mais cette sursaturation est un état d'équilibre instable, et le gaz en excès se dégage de lui-même dans diverses circonstances, dont M. Gernez (4) a fait une étude spéciale que nous analyserons plus loin.

301. Condensation des gaz par les solides. — La con-

(1) M. Le Blanc a constaté dans la litharge une propriété analogue. La fonte en fusion dissout de l'hydrogène, de l'oxyde de carbone, de l'azote, dont elle garde une partie en se solidifiant, comme l'a prouvé M. Cailletet. H. Sainte-Claire Deville a montré que les substances vitreuses sont susceptibles, à l'état liquide, de dissoudre abondamment de l'hydrogène emprunté au gaz du foyer et ayant traversé les parois du creuset bien chaud. Parmi ces matières, les unes, telles que le verre d'émeraude et de chaux, dégagent l'hydrogène en se solidifiant, d'autres, comme l'obsidienne, le retiennent pour le dégager ensuite par la chaleur, en se boursoufflant et devenant de la ponce.

(2) Lucas, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), XII, 402; 1819.

(3) Dumas, C. R., LXXXVI, 65; 1878.

(4) Gernez, *Annales de l'École normale supérieure*, (2), IV, 311; 1875.

densation des gaz par les solides est un phénomène tout à fait analogue à leur dissolution dans les liquides.

Condensation à la surface du verre. — Nous avons déjà eu plus d'une fois l'occasion de constater l'adhérence énergique des gaz à la surface des solides, et en particulier à la surface du verre. MM. Jamin et Bertrand (¹) ont fait à ce sujet une expérience instructive. Ils remplirent de verre pilé un ballon, y firent le vide aussi complètement que possible, et l'ayant bien fermé ils l'abandonnèrent à lui-même pendant vingt-quatre heures; au bout de ce temps ils purent en extraire de nouveau une quantité notable d'air.

Pour rendre le fait encore plus visible, ils introduisirent dans un ballon à long col, une bouillie faite de verre pilé et d'eau soigneusement privée d'air; à peine commencèrent-ils à faire le vide dans l'appareil que le liquide se souleva et se mit à monter dans le col par suite du gonflement des atmosphères gazeuses adhérentes aux fragments de verre.

Dans ces conditions, la surface du verre est énorme. Avec les surfaces que présentaient les appareils employés par Regnault ou par Magnus (²) à la mesure de l'élasticité ou de la dilatabilité des gaz, la condensation est-elle capable d'altérer les résultats?

Pour le savoir, Magnus introduisit dans un de ses ballons 250 baguettes de verre, dont la surface représentait 13 fois celle du ballon (ce qui rendit 36 fois plus grande la surface en contact avec une même masse d'air), et sur l'appareil ainsi disposé il refit la mesure de la dilatation de l'air entre 0° et 100°; il ne trouva pas de différence appréciable. Avec l'acide sulfureux, la dilatation de 0° à 100° fut 0,3896 au lieu de 0,3822; en admettant que cet accroissement provienne de ce que le gaz condensé à la surface du verre à 0° s'est dégagé à 100°, Magnus conclut de là que 1^{mmq} de verre condense $0^{mmc},0008$ d'acide sulfureux, quantité encore bien faible. Selon M. Chiozza, 1^{mmq} de verre condense $0^{mmc},0157$ d'acide carbonique sous la pression de 1 atmosphère.

M. P. Chappuis (³) a repris dernièrement ces déterminations, et il

(¹) Jamin et Bertrand, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXIV, 344; 1852.
(²) Magnus, *Pogg. Ann.*, CXXI, 174; 1864.
(³) P. Chappuis, *Wied. Ann.*, VIII, 1 et 671; 1879.

a trouvé qu'une surface vitreuse de $1^{mq},675$ abandonne entre 0° et 180° :

Hydrogène...........	$0^{cc},45$	Acide sulfureux......	$1^{cc},03$
Air..................	0 ,58	Ammoniaque........	1 ,41

A 100°, la même surface ne laisse dégager que $0^{cc},63$ d'ammoniaque ; elle retient donc encore la moitié du gaz adhérent.

Condensation par le charbon. — Si la nature du gaz a son influence, la nature du corps solide influe également, ainsi que son état physique.

L'un des corps qui manifestent le plus nettement la propriété de condenser les gaz, est le charbon de bois éteint sous le mercure. Les gaz les plus solubles dans l'eau sont ceux qu'il absorbe le plus facilement, et l'absorption est d'autant plus marquée que la température est plus basse ; elle cesse complètement vers 100°.

D'après Th. de Saussure, 1^{vol} de charbon de bois absorbe à la température ordinaire :

Ammoniaque	90^{vol}
Acide chlorhydrique	85
Acide sulfureux. . .	65
Acide sulfhydrique .	55
Acide carbonique. .	35
Oxygène.	9,25
Azote	7,50
Hydrogène	1,75

De Saussure (1) remarque que l'acide carbonique ainsi condensé, occupant environ les $\frac{5}{8}$ du volume du charbon, est réduit au $\frac{1}{56}$ de son volume primitif, et par conséquent doit être en grande partie à un état voisin de l'état liquide. A l'appui de cette idée se placent les mesures calorimétriques de Favre et Silbermann (2), qui ont montré que la quantité de chaleur dégagée dans l'absorption du gaz par le charbon est généralement considérable, parfois même supé-

(1) TH. DE SAUSSURE, *loc. cit.*

(2) FAVRE et SILBERMANN, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), XXXVII, 471 ; 1853.

rieure à celle qui correspondrait à la solidification du gaz; tel est, par exemple, le cas pour l'acide sulfureux.

M. Joulin [1] a récemment constaté que, pour les gaz peu condensables (oxygène, azote, hydrogène), la quantité de gaz qui se condense est, comme celle qui se dissout, proportionnelle à la pression, et diminue à peu près proportionnellement à l'accroissement de la température, la saturation étant presque instantanée.

Condensation par les métaux; occlusion. — Le platine, et particulièrement la mousse de platine condense énergiquement les gaz à sa surface; la lampe sans flamme [2], le briquet à gaz hydrogène sont des applications bien connues de cette propriété. L'incandescence de la mousse de platine dans un courant d'hydrogène (Dœbereiner) atteste un dégagement de chaleur considérable; et en effet la mousse de platine absorbant 250 fois son volume d'hydrogène, si le volume des pores est le quart du volume total, le gaz se trouve réduit au $\frac{1}{1000}$ de son volume primitif, et par conséquent à un état physique assurément fort différent de celui où il était primitivement.

Le platine, chauffé dans une atmosphère d'hydrogène, fixe une certaine quantité de gaz qu'il retient même dans le vide. Ce phénomène, étudié par Graham [3] sous le nom d'*occlusion*, est une véritable absorption, indépendante de la surface.

Mais aucun métal n'absorbe l'hydrogène à un aussi haut degré que le palladium. Graham reconnut qu'un morceau de palladium forgé, mais non fondu, absorbait 376^{vol} de gaz à la température ordinaire, 643^{vol} à 95°, 526^{vol} à 245°. La mousse de palladium retint des quantités de gaz plus considérables encore. Un fil de palladium, pris comme électrode négative dans de l'eau acidulée, absorba jusqu'à 982 fois son volume d'hydrogène.

MM. Troost et Hautefeuille [4] ont montré que, dans tous les cas, le palladium commence par former avec l'hydrogène un véritable

[1] Joulin, C. R., XC, 741; 1880.

[2] H. Sainte-Claire Deville et M. Debray ont donné à l'expérience de Davy une forme remarquable : on chauffe au rouge un creuset de platine sur le chalumeau à gaz, on éteint celui-ci, et, quand le métal est sombre, on rend le gaz; le creuset redevient rouge et se maintient tel indéfiniment.

[3] Graham, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XIV, 315, et XVI, 188; 1868-69.

[4] Troost et Hautefeuille, *Ann. de chim. et de phys.*, (5), II, 273, et VII, 155; 1874-76.

hydrure Pd^2H, correspondant à l'absorption d'environ 600[vol], lequel condense en outre de l'hydrogène en quantités variables selon les conditions de l'expérience. Cet hydrure, stable à la température ordinaire, se dissocie par la chaleur, sa tension de dissociation croissant graduellement avec la température pour devenir égale à la pression atmosphérique vers 135°.

Le potassium et le sodium manifestent des phénomènes analogues. Le lithium et le thallium ne paraissent pas au contraire former de composés définis avec l'hydrogène.

Le fer, la fonte et l'acier contiennent toujours des gaz occlus à leur intérieur [1]. La fonte retient surtout de l'hydrogène, et le fer de l'oxyde de carbone, qu'ils dégagent dans le vide à 800°.

Après avoir établi que l'argent solide retient des quantités notables d'oxygène qui ne se dégagent que par l'action combinée du vide et de la chaleur, M. Dumas [2] a montré que semblablement l'aluminium chauffé dans le vide à la température du ramollissement de la porcelaine (1400°) donne un volume de gaz supérieur à celui du métal, et principalement formé d'hydrogène avec un peu d'acide carbonique, sans trace d'oxyde de carbone, d'oxygène, ni d'azote. De même le magnésium, au voisinage du rouge blanc, abandonne brusquement une fois et demie son volume d'hydrogène à peu près pur.

V. — MACHINES A RARÉFIER ET A COMPRIMER LES GAZ.

302. Machine pneumatique. — La première machine pneumatique fut construite par Otto de Guericke [3], en 1650.

Machine d'Otto de Guericke. — C'était une pompe C terminée par un tuyau à robinet R, se fixant au ballon B que l'on voulait vider d'air; le piston P était plein, mais sur le tuyau se trouvait ménagée une ouverture O, munie d'une soupape. Le piston P étant d'abord complètement enfoncé, on ouvrait le robinet R, on tirait le piston:

[1] Graham a retiré d'un morceau de météorite, qui avait 6[cme] de *volume*, 16[cme],5 de gaz contenant 85 0/0 d'hydrogène.

[2] Dumas, C. R., XC, 1027, 1880.

[3] Otto de Guericke, *Experimenta nova (ut vocantur) Magdeburgica*. Amstelodami (Amsterdam); 1672.

l'air se partageait entre le ballon B et le corps de pompe C; on fermait le robinet, et on enfonçait le piston; l'air du corps de

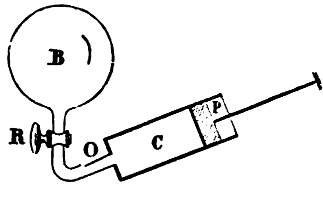


Fig. 504

pompe s'échappait par l'ouverture O; et ainsi de suite. C'est avec cet appareil qu'Otto de Guericke fit la fameuse expérience des hémisphères de Magdebourg.

Perfectionnements de Boyle et de Papin. — Boyle [1] donna une meilleure disposition à la pompe, et munit la tige du piston d'une crémaillère engrenant avec une roue dentée.

Bientôt Papin [2], alors auprès de Boyle, apporta à la machine pneumatique des perfectionnements importants. Au ballon B, employé jusqu'alors comme récipient, il substitua l'appareil si commode, en usage encore aujourd'hui : une cloche posée sur une platine au centre de laquelle s'ouvre le canal d'aspiration; il remplaça le robinet R par une soupape à fonctionnement automatique; enfin il accoupla deux corps de pompe, et rendit ainsi la manœuvre de la machine à la fois plus rapide et moins pénible [3].

[1] Boyle, *New experiments physico-mechanical touching the spring of the air*. Oxford; 1659.

[2] Papin, *A continuation of the new digestor of bones*. London; 1687. Boyle, à qui on a souvent attribué tout ce que Papin et lui firent alors en commun, reconnut lui-même que la machine décrite dans cet ouvrage est de l'invention de Papin (Voir de Comberousse, *Revue des Cours scientifiques;* 1881; et Gerland, *Wied. Ann.*, XIX, 534; 1883).

[3] Afin de nous rendre compte de l'avantage que présente l'emploi de deux corps de pompe relativement à la facilité de la manœuvre, considerons l'effort à exercer aux deux phases du mouvement. Pour soulever le piston au n^e coup, il faut, indépendamment de l'effort à faire pour vaincre les frottements, une force F égale à $S(H_0 - H')$, S étant la surface du piston, H_0 la pression atmosphérique, et H' la pression à l'intérieur du corps de pompe, laquelle, suivant la position du piston, varie de H_{n-1} à H_n (voir plus bas). Quand S est grand, cette force F est très considérable, dès que le vide est un peu avancé; car il faut alors compter à peu près 1 kilogramme par 1 centimètre carré. Pendant la descente, le piston est sollicité dans le sens du mouvement par une force F' qui, égale

Vers la même époque, Senguerd [1] inventait le robinet doublement perforé et à canal oblique pour la rentrée de l'air. Ensuite, Smeaton [2] imagina le petit baromètre tronqué contenu dans une éprouvette en communication avec le récipient, de manière à indiquer la pression du gaz restant.

Machine actuelle. — La machine actuelle se compose de deux

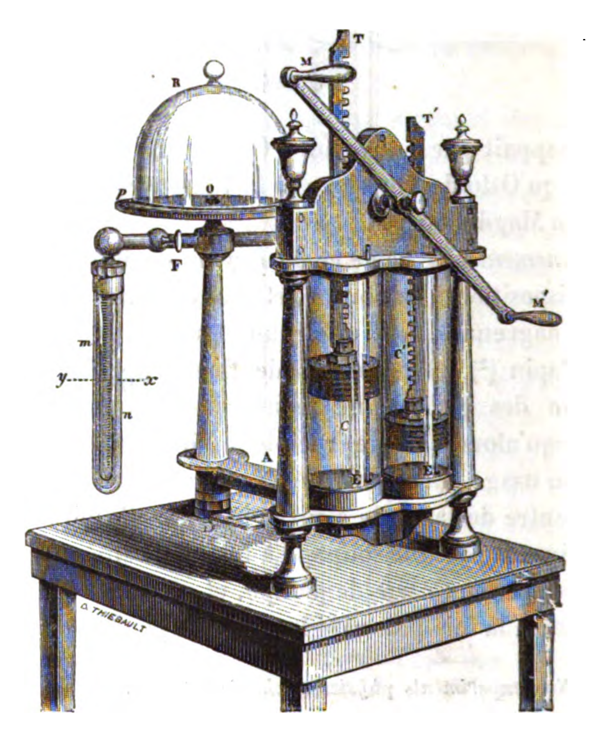


Fig. 505

parties, les pompes et le récipient, réunies par le canal d'aspiration.

d'abord à $S(H_0 - H_n)$, décroît jusqu'à ce que la pression intérieure devienne égale à H_0 ; alors la soupape d'expulsion s'ouvre, et la force reste nulle jusqu'à la fin de la course. Si les deux corps de pompe sont accouplés de façon que dans l'un le piston descende, tandis qu'il monte dans l'autre, l'effort à exercer pour soulever l'un des pistons est la différence des deux forces F et F' ; il est donc très faible pendant la plus grande partie de la course, et il ne donne quelque peine qu'à la fin du mouvement.

(1) Senguerd, *Philosophia naturalis.* Lugduni Batavorum (Leyde); 1685.

(2) Smeaton, *Phil. Trans.*, XLVII ; 1751.

Les deux corps de pompe étant identiques, considérons seulement l'un d'eux. C'est un cylindre de cristal C, dans lequel se meut un piston P, muni intérieurement d'une soupape *g* qui s'ouvre de bas en haut. Le piston est formé de rondelles de cuir pressées entre un disque *dd*, placé à la base du noyau métallique intérieur, et un

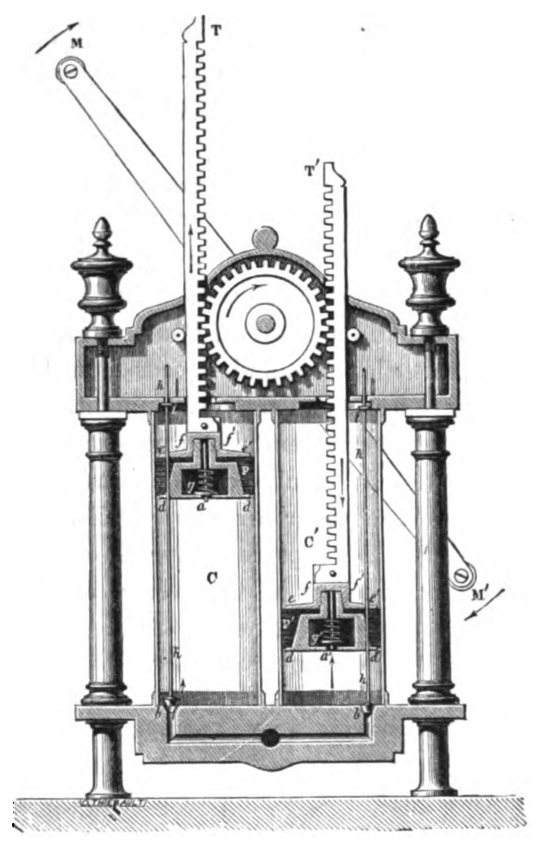


Fig. 506

large écrou *ee'*, roulant sur la tubulure *ff'* ménagée à la partie supérieure du noyau. Celui-ci est creusé d'une cavité communiquant librement avec l'atmosphère et contenant la soupape *g*, sur laquelle appuie légèrement un petit ressort à boudin. A la naissance du canal d'aspiration existe une deuxième soupape, qui s'ouvre aussi de bas en haut : c'est un petit cône en cuir *b*, surmonté d'une tige *h*, traversant à frottement les cuirs du piston. Cette tige *h* porte en

haut un arrêt *i*, qui viendra buter contre le couvercle du corps de pompe, dès que le piston, commençant à monter, l'aura soulevée elle-même d'une très petite quantité. Le piston glissera alors sur la tige *h* jusqu'à ce qu'il soit arrivé en haut de sa course. Quand ensuite il descendra, entraînant avec lui la tige *h*, il abaissera le cône *b*, et fermera l'ouverture E qui restera close pendant toute la descente du piston. Le jeu de la soupape est ainsi automatiquement réglé par celui du piston, lequel est lui-même produit par une manivelle MM, dont le mouvement alternatif se transmet à une roue dentée située entre les tiges, taillées en crémaillères, T, T', des deux pistons, de sorte que l'un d'eux monte tandis que l'autre descend, et *vice versa*.

Le récipient R est une cloche de verre reposant, par ses bords usés à l'émeri, sur une platine de verre, exactement dressée, au centre de laquelle aboutit le canal d'aspiration. Pour réunir les deux parties du récipient, on graisse légèrement les bords de la cloche, on la pose sur la platine bien propre, et on l'appuie fortement, en passant un peu de suif contre le joint : on obtient ainsi une fermeture hermétique.

Le canal d'aspiration A, terminé du côté du récipient par un nez O, sur lequel peuvent se visser divers appareils, se bifurque pour aboutir en E à chacun des corps de pompe. Il est muni d'une clef, percée de deux canaux : l'un V, transverse, ayant la disposition

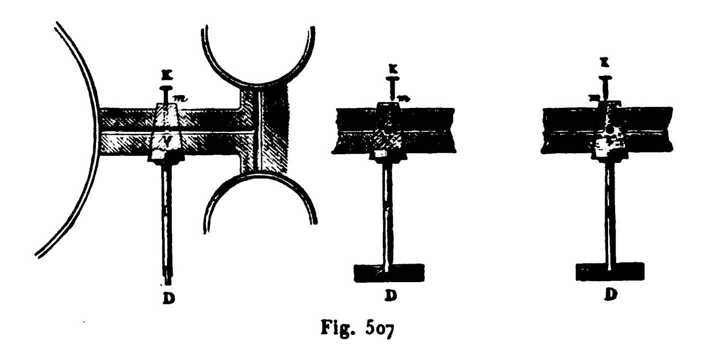


Fig. 507

ordinaire ; l'autre *m*, longitudinal, recourbé latéralement à la hauteur du premier, et pouvant se fermer à l'extérieur au moyen d'une petite cheville K. Si la clef est *ouverte*, en d'autres termes si l'on a amené à la partie supérieure la lettre O marquée sur la poignée, le récipient R communique simplement avec les deux

corps de pompe C, C'. Si la clef est *fermée* (position marquée par la lettre F), la communication est supprimée entre le récipient et les corps de pompe. Si enfin la clef est tournée à la *rentrée* R, en enlevant la cheville K on permet à l'air de rentrer dans le récipient.

Sur le même canal, soit latéralement, soit directement au-dessus, se trouve le manomètre MN : c'est une éprouvette contenant un baromètre tronqué à siphon, où la différence *mn* des niveaux du mercure dans les deux branches mesure la force élastique de l'air qui reste dans le récipient. Comme d'habitude, l'échelle court dans les deux sens à partir d'un zéro marqué vers le milieu *xy* du siphon. Ce qui caractérise l'appareil, c'est sa petite taille, par suite de laquelle le manomètre ne commence à donner d'indications qu'à partir du moment où la pression devient inférieure à QM [1]. En *l*, vers le haut de la branche fermée, est un petit étranglement ayant pour objet de ralentir le mouvement du mercure, et par suite d'éviter la rupture du tube, quand l'air, rentrant brusquement dans le récipient, repousse violemment le liquide vers M.

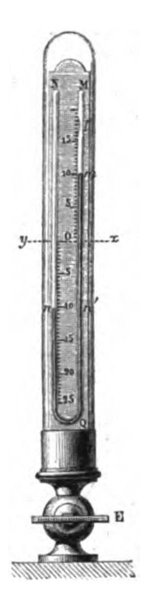


Fig. 508

Le fonctionnement de la machine est aisé à comprendre. Supposons la machine parfaite. Le piston étant d'abord au bas de sa course, si on le soulève, la soupape *b* s'ouvre, l'air du récipient pénètre dans le corps de pompe; et lorsque le piston est arrivé en haut de sa course, l'air qui occupait d'abord le volume V du récipient sous la pression H s'est répandu dans le volume $V+v$, v étant le volume du corps de pompe : la pression est donc réduite à une valeur H', telle que

$$VH = (V+v)H'. \qquad (1)$$

Quand ensuite on abaisse le piston, la communication est aussitôt interceptée entre le récipient, où la pression reste H', et le corps de

[1] Quand on veut connaître la pression à tout instant, on prend une éprouvette assez longue pour contenir un baromètre complet, ou mieux on relie le récipient, au moyen d'un tube flexible, à un manomètre barométrique de Regnault.

pompe qui se vide par l'ouverture *a* du piston, la soupape *g* se soulevant dès que la pression de l'air en C devient légèrement supérieure à la pression atmosphérique. Et le même jeu recommence.

A chaque coup de piston, la pression dans le récipient diminue suivant la loi indiquée par la formule (1). Si donc on appelle H_0 la pression initiale, égale à la pression atmosphérique, et $H_1, H_2, \ldots, H_n$, les pressions dans le récipient après 1, 2,..., *n* coups de piston, on aura

$$H_1 = \frac{V}{V+v} H_0,$$

$$H_2 = \frac{V}{V+v} H_1 = \left(\frac{V}{V+v}\right)^2 H_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H_n = \frac{V}{V+v} H_{n-1} = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n H_0.$$

Les pressions après les coups de piston successifs décroissent comme les termes d'une progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{V}{V+v}$. Par conséquent, dans une machine parfaite, la pression tend indéfiniment vers zéro.

Pratiquement, il n'en est pas ainsi : le manomètre de la machine indique promptement une limite. Cette limite tient à deux causes d'imperfection :

1° L'espace nuisible, c'est-à-dire l'espace qui reste toujours entre la base du corps de pompe et le piston quand celui-ci est à fond de course ;

2° Les interstices par lesquels se font toujours des rentrées d'air.

Ces rentrées ont lieu surtout autour des pistons qui ne peuvent pas joindre hermétiquement, et plus encore aux soupapes des pistons qui ne ferment jamais bien. Sans doute le constructeur peut atténuer ces imperfections, mais l'expérimentateur ne doit pas oublier qu'elles existent nécessairement : il précipitera donc les coups de piston à la fin de l'opération, tout en ayant soin d'enfoncer les pistons jusqu'au bas pour réduire autant que possible l'espace nuisible. Puis, le vide fait, il se hâtera de fermer la clef afin de supprimer la communication entre le récipient et les corps de pompe par où se font les rentrées d'air ; en même temps il aura soin

de rendre l'air sous les pistons : il évitera ainsi que la pression atmosphérique fasse passer l'huile entre le piston et le corps de pompe, et l'amène à la partie inférieure de celui-ci où elle gênerait beaucoup, absorbant, pendant la descente du piston, de l'air qu'elle dégagerait ensuite pendant la montée, au lieu et place de celui qui pourrait venir du récipient.

L'influence de l'espace nuisible, supposée seule, peut s'évaluer facilement. Comme au début de chaque coup de piston cet espace u est plein d'air à la pression atmosphérique H_0, une masse d'air (u, H_0) s'ajoute à celle (V, H) du récipient, et cette double masse se répand dans le volume $V+v$, où elle prend une pression H' telle que l'on ait, conformément à la loi du mélange des gaz,

$$VH + uH_0 = (V+v)H'. \qquad (2)$$

On aura donc successivement

$$H_1 = \frac{V}{V+v}H_0 + \frac{u}{V+v}H_0,$$
$$H_2 = \frac{V}{V+v}H_1 + \frac{u}{V+v}H_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$H_n = \left(\frac{V}{V+v}\right)H_{n-1} + \frac{u}{V+v}H_0,$$

équations entre lesquelles il s'agit d'éliminer les pressions intermédiaires $H_1, H_2, \ldots H_{n-1}$. Pour cela nous multiplierons la première en bas par $\left(\frac{V}{V+v}\right)^0$ puis, en remontant, la deuxième par $\left(\frac{V}{V+v}\right)^1$, enfin la n^e en haut par $\left(\frac{V}{V+v}\right)^{n-1}$, et nous ajouterons les équations ainsi multipliées ; il viendra

$$H_n = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n H_0 + \frac{u}{V+v}H_0 \left\{ 1 + \frac{V}{V+v} + \left(\frac{V}{V+v}\right)^2 \cdots + \left(\frac{V}{V+v}\right)^{n-1} \right\}$$
$$= \left(\frac{V}{V+v}\right)^n H_0 + \frac{u}{V+v}H_0 \frac{1-\left(\frac{V}{V+v}\right)^n}{1-\left(\frac{V}{V+v}\right)}$$
$$= \left(\frac{V}{V+v}\right)^n H_0 + \frac{u}{v}H_0 \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \right\}.$$

La pression décroît plus lentement que s'il n'y avait pas d'espace nuisible, et tend vers la limite

$$h = \frac{u}{v} H_0.$$

Cette valeur très simple peut s'établir immédiatement. Supposons en effet la pression dans le récipient arrivée à la limite h. Le piston étant au bas de sa course, et l'espace nuisible renfermant comme toujours un volume u d'air à la pression H_0, soulevons le piston jusqu'en haut. Puisque, par hypothèse, la limite est atteinte, aucune nouvelle quantité d'air ne vient du récipient, et le corps de pompe contient simplement alors, sous la pression h et au volume v, la petite masse d'air qui remplissait tout à l'heure l'espace nuisible ; on a donc

$$vh = uH_0,$$

d'où

$$h = \frac{u}{v} H_0,$$

c'est-à-dire la valeur précédemment trouvée.

Perfectionnement de Babinet. — Babinet a reculé cette limite par un dispositif ingénieux qui permet, à un instant donné, d'employer l'un des corps de pompe C′ à faire le vide dans l'autre C, restant seul en communication avec le récipient. Soit toujours u l'espace nuisible de C′, et soit u_1 l'espace nuisible de C avec les conduits qui s'y rattachent. Cet espace nuisible u_1 pouvant être considéré comme le récipient d'où la pompe C′ soutire l'air, la pression limite en u_1 est $h = \frac{u}{v} H_0$; mais, si telle est la pression dans l'espace nuisible de C, la pression limite dans le récipient est $h_1 = \frac{u_1}{v} h$; d'où

$$h_1 = \frac{u_1}{v} \cdot \frac{u}{v} H_0,$$

ou sensiblement

$$h_1 = \left(\frac{u}{v}\right)^2 H_0 :$$

on pourra donc ainsi faire « le vide du vide », suivant l'expression

même de l'auteur, en ce sens que l'on pourra réduire la limite habituelle du vide dans le rapport même où avec la machine ordinaire on aura déjà réduit la pression atmosphérique.

Pour obtenir ce résultat, Babinet réunit le fond du corps de pompe C à la branche du canal d'aspiration dirigée vers C′ par un conduit courbe *rst*, situé en arrière et obliquement; et sur le trajet de ce conduit ainsi que du canal d'aspiration, il place un robinet permettant soit de faire communiquer simplement les deux corps de pompe entre eux et avec le récipient comme d'habitude (I), soit de laisser le corps de pompe C seul en relation avec le récipient et en même temps d'établir la communication entre la base du corps de pompe C et l'orifice d'aspiration du deuxième

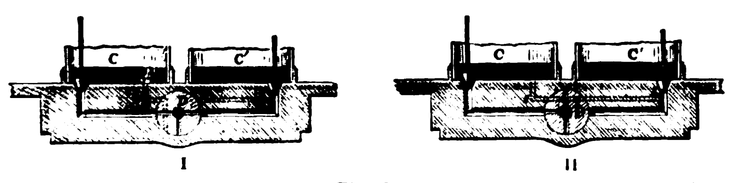


Fig. 509

corps de pompe C′ (II). La figure représente ce robinet D, placé à la bifurcation du canal d'aspiration; il est alors percé : 1° d'une voie longitudinale, dirigée constamment suivant la grande branche du canal d'aspiration; 2° de trois voies transverses, situées dans le plan des deux branches latérales du même canal; 3° d'une voie oblique, réunissant par derrière les deux parties du conduit annexe *rst*. Le robinet ayant d'abord la position indiquée en I, la machine fonctionne comme d'habitude. Quand, au bout d'un certain nombre de coups de piston, le manomètre montre qu'on cesse de rien gagner, on tourne le robinet dans la position II, et l'épuisement recommence, la pompe C fonctionnant de même qu'avec un piston plein, et aspirant l'air dans le récipient pour le refouler en C′, où il acquiert bientôt la pression suffisante pour soulever la soupape du piston ; et cet effet continue, les expulsions d'air en C′ devenant de plus en plus rares, jusqu'à ce que de nouveau on ne gagne plus rien. Avec une bonne machine munie du perfectionnement de Babinet on fait aisément le vide à 1 millimètre.

Machine de Bianchi. — L'avantage que présentent deux cylindres accouplés peut s'obtenir avec un seul *cylindre à double effet*, c'est-à-dire avec un cylindre fermé, dont chaque moitié joue le même rôle que l'un des cylindres de l'appareil ordinaire.

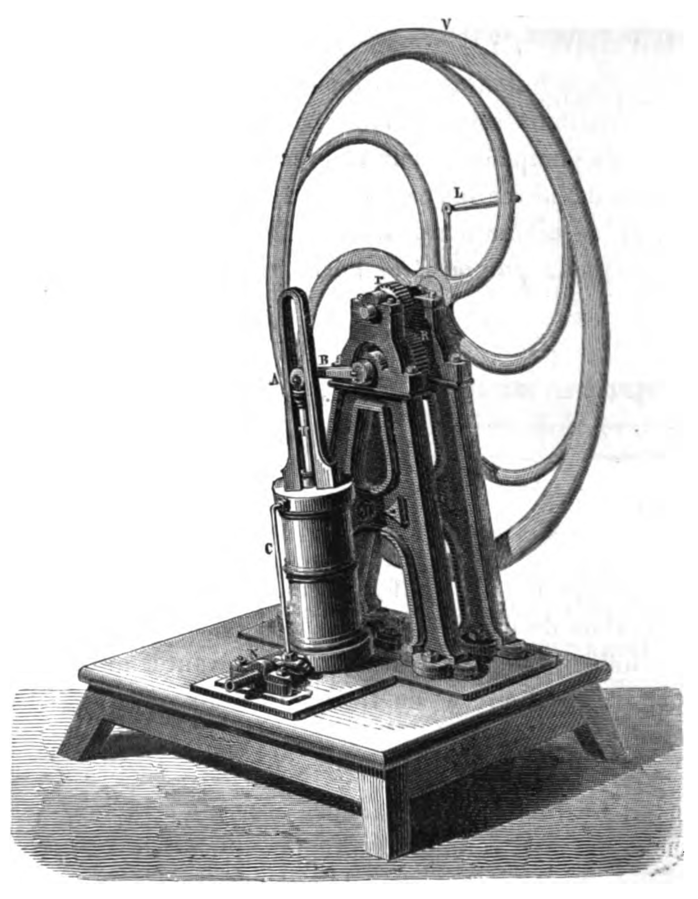


Fig. 510

Dans la machine de Bianchi, qui figura pour la première fois à l'exposition de 1855, le piston est mis en mouvement par la rotation d'un volant V, actionné par une manivelle L. Cette rotation continue, beaucoup moins fatigante que le balancement de la machine de Papin, est transmise par les roues *r* et R à une manivelle B, à laquelle est directement attachée la tête A de la tige du piston, d'ailleurs convenablement guidée. Cet arrangement exige

que le corps de pompe oscille autour d'un axe MN, qui n'est autre que le canal d'aspiration, lequel se prolonge jusqu'au récipient par un tube de caoutchouc assez résistant pour ne pas s'aplatir sous l'effort de la pression extérieure. Les soupapes d'aspiration *a* et *a'*, disposées à la façon habituelle, sont montées sur une même tige glissante; des deux soupapes d'expulsion, l'une *b* se trouve, ainsi

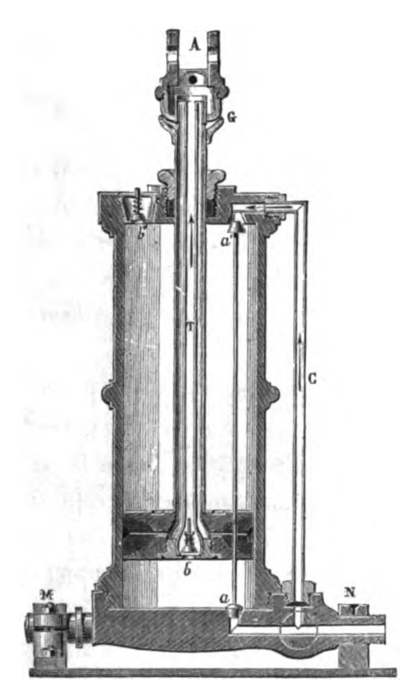


Fig. 511

que dans la machine ordinaire, à l'intérieur du piston, l'autre *b'* à la partie supérieure du corps de pompe [1]. Quand le piston descend, l'air contenu dans la partie inférieure du corps de pompe s'échappe par la tige T qui est creuse [2], tandis que l'air du récipient afflue

[1] Le diamètre du cercle décrit par l'extrémité de la manivelle B est un peu plus grand que la course du piston; mais la tête A de la tige du piston est saisie entre deux pièces épaisses de caoutchouc qui lui laissent le jeu nécessaire; le piston est ainsi fortement appuyé tour à tour contre l'une et contre l'autre base du cylindre, et les espaces nuisibles sont très réduits.

[2] Autour du tube T est un deuxième tube, et dans l'espace annulaire compris entre ces deux tubes descend l'huile que l'on verse dans le godet G pour le graissage des cuirs du piston.

par le tube C dans la partie supérieure. Lorsque le piston remonte, les rôles des deux parties s'intervertissent, et ainsi de suite. La machine fonctionne exactement comme une machine à deux corps de pompe; on y pourra même appliquer le perfectionnement de Babinet, le robinet à voies multiples se plaçant à la naissance du conduit C. Elle permet de faire rapidement le vide dans de grands récipients.

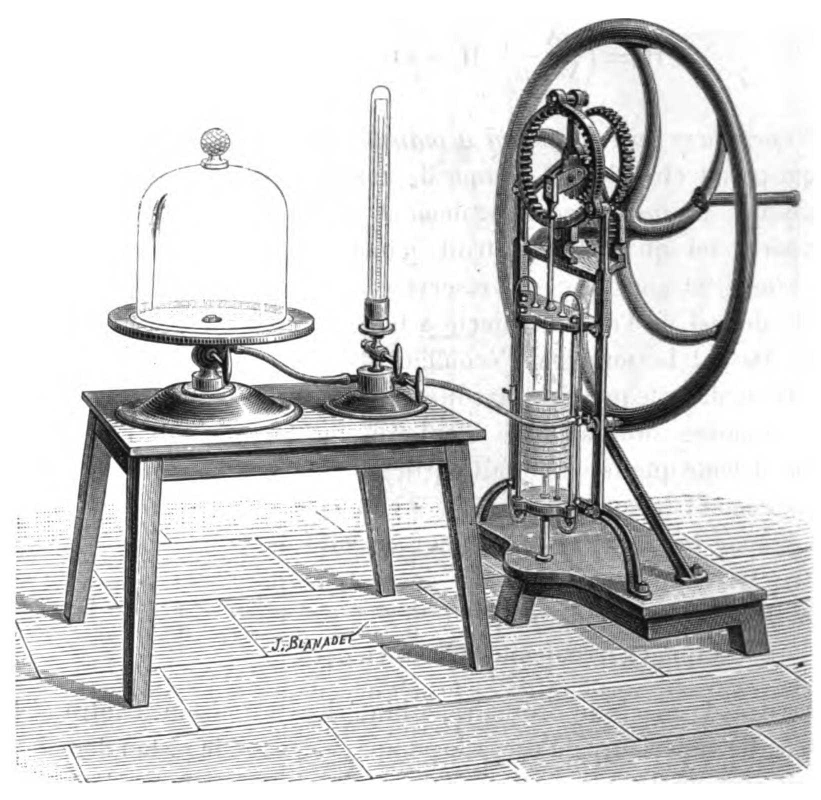


Fig. 512

Machine de Deleuil. — Pour le même objet, Deleuil a construit une machine curieuse, qu'il présenta à l'Académie des sciences en 1865. Le piston est formé par un cylindre en métal, d'une hauteur égale au tiers environ de celle du corps de pompe, et d'un diamètre inférieur de $\frac{1}{50}$ de millimètre seulement au diamètre du

ırps de pompe : une série de rainures circulaires, pratiquées sur la ırface du piston, logent autant de bourrelets gazeux qui lubrifient piston, tout en constituant une fermeture presque absolument ermétique à cause de la difficulté qu'éprouve l'air à passer par les ;paces capillaires très étroits. Le mouvement du piston à l'inté-.eur du corps de pompe devant dès lors être exactement rectili-ne, on a eu recours à l'engrenage de Lahire, fondé sur cette pro-riété : lorsqu'une circonférence roule intérieurement sur une

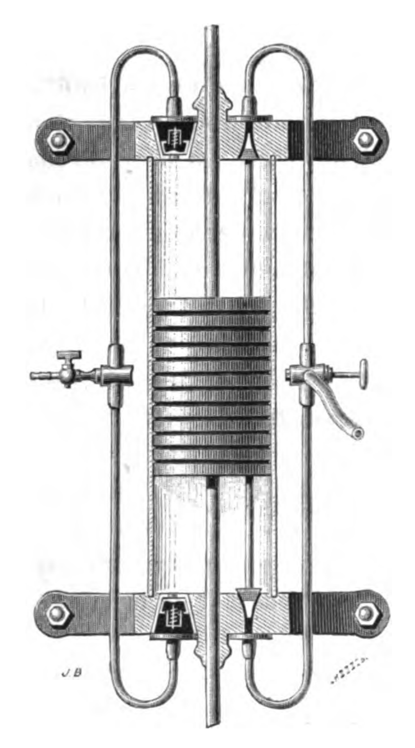


Fig. 513

seconde circonférence de rayon double, un quelconque de ses points décrit un diamètre de la circonférence fixe. On a donc attaché la tête de la tige du piston au point de la circonférence intérieure qui décrit le diamètre vertical : cette circonférence est constituée par une roue dentée, engrenant avec un cercle fixe de rayon double, et recevant son mouvement d'une manivelle et d'un volant.

La disposition de la pompe est d'ailleurs la même que celle de la machine de Bianchi, avec cette seule différence que les deux soupapes d'expulsion sont également établies sur l'une et l'autre base du corps de pompe, à l'entrée d'un conduit par où l'air peut être refoulé dans un récipient; de sorte que l'appareil sert également de machine de compression permettant de comprimer l'air à plusieurs atmosphères.

Machine de Carré. — Nous citerons encore la machine pneu-

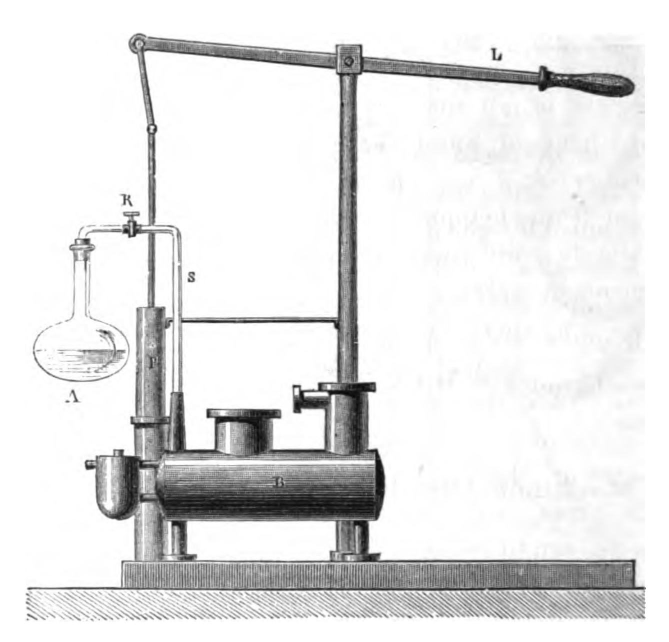


Fig. 514

matique de Carré qui, bien que construite pour un usage spécial (la fabrication de la glace par l'évaporation de l'eau dans le vide [1]), n'en convient pas moins dans tout autre cas. Elle se compose d'un corps de pompe P, long et étroit, à l'intérieur duquel se meut, sous l'action du levier L, un piston disposé à peu près comme celui de

[1] A cet effet, entre la pompe P et la carafe à trapper A est disposé un réservoir en plomb antimonié B, contenant de l'acide sulfurique qu'un agitateur, mis en mouvement par la machine même, remue de façon à renouveler sans cesse la surface absorbante.

ı machine ordinaire : il est en effet traversé en son milieu par la ge de la soupape d'aspiration, et latéralement il porte la soupape 'expulsion. Mais cette soupape, au lieu de rejeter directement dans 'atmosphère l'air expulsé, l'envoie dans la partie supérieure du orps de pompe, laquelle est hermétiquement fermée et ne communique avec l'atmosphère que par une troisième soupape, s'ouvrant sous une couche d'huile qui assure une fermeture parfaite n même temps qu'elle sert au graissage de l'appareil (1). La partie supérieure du corps de pompe joue ainsi, relativement à la partie inférieure, le même rôle que le corps de pompe C′ dans la machine à deux corps de pompe munie du perfectionnement de Babinet.

Machine de Kravogl. — Dans tous ces appareils, le vide est produit par le jeu d'un piston solide entraînant nécessairement un espace nuisible, que l'on évitera au contraire avec un piston liquide. Kravogl a construit, en effet, une machine pneumatique dont les pompes renversées renfermaient au-dessus des pistons en acier poli une certaine quantité de mercure, de façon à réaliser des pistons liquides (2). Il atteignit ainsi, paraît-il, des vides à $\frac{1}{10}$ de millimètre.

303. Machines pneumatiques à mercure. — *Pompe à mercure.* — Une solution bien meilleure est la pompe à mercure, qui n'est autre chose qu'un appareil disposé de façon à ce que l'on puisse répéter commodément et autant de fois que l'on veut l'expérience de Torricelli. Cette machine, construite pour la première fois (3) sous une forme pratique, en 1857, par Geissler de Berlin, pour la fabrication de ses tubes à incandescence, a été perfectionnée en France par MM. Alvergniat.

(1) Ces deux soupapes, celle du piston et celle du corps de pompe, portent chacune en dessous un petit prolongement qui, même lorsqu'il n'y a presque plus d'air dans l'appareil, assure leur ouverture automatique quand le piston arrive à l'une ou à l'autre extrémité de sa course.

(2) Le mouvement de ces pistons était produit, comme dans la machine ordinaire, par un balancier agissant sur une roue dentée qui, outre les tiges des pompes, menait deux crémaillères chargées d'effectuer mécaniquement l'ouverture et la fermeture des soupapes d'expulsion constamment noyées dans le mercure.

(3) Voir Poggendorff, *Pogg. Ann.*, CXXV, 151 ; 1865.

La figure ci-contre représente l'une des dispositions les plus commodes. Le tube barométrique T, surmonté d'une vaste ampoule A, est relié en bas par un tube de caoutchouc épais à la cuvette C ([1]). Celle-ci est portée par une chaîne de Galle PQ s'enroulant sur une petite roue dentée, dernier terme d'une série d'engrenages qui rendent la manœuvre plus facile : en agissant sur la manivelle M, adaptée au volant V, on fait monter la cuvette C, ou on la fait descendre (après avoir toutefois soulevé un cliquet retenant le système). Au-dessus de l'ampoule A se trouve un robinet R qui, selon qu'on lui donne la position 1 ou 2, établit la communication avec l'extérieur, le robinet S étant lui-même supposé ouvert, ou avec le récipient fixé en *a*. Élevons d'abord la cuvette C, le robinet R occupant la position 1, l'air contenu dans l'appareil s'échappe à travers le mercure placé dans la petite cuve G, disposée de façon à pouvoir recevoir une éprouvette si l'on veut recueillir le gaz, et le mercure monte en A. Poussons l'opération jusqu'à ce qu'il dépasse le robinet R: fermons ce robinet, abaissons la cuvette C à la limite de sa course : le vide barométrique se fait dans toute l'ampoule A. Amenons le robinet dans la position 2 : l'air du récipient afflue dans le baromètre; tournons le robinet R, remontons la cuvette, expulsons au dehors l'air qui était passé en A; et ainsi de suite.

Comme il n'y a pas d'espace nuisible, comme, d'autre part, la machine est toute en verre d'une seule pièce, abstraction faite des robinets que l'on réussit sans peine à faire tenir parfaitement, si nous offrons chaque fois au gaz le même espace A pour se répandre, les pressions successives seront exactement représentées par les termes d'une progression géométrique décroissante; et il n'y aura pas de limite au vide. Pratiquement, il n'y en a pas d'autre que la tension des vapeurs dégagées par l'appareil : la tension de la vapeur de mercure est à peine sensible aux températures ordinaires; mais il n'en est pas de même de la vapeur d'eau : d'où la nécessité

([1]) Quand le vide est un peu avancé, la hauteur du mercure dans le tube T au-dessus de la cuvette C ne diffère pas sensiblement de la hauteur barométrique. La naissance de l'ampoule A doit donc être à 80 centimètres environ de la cuvette au bas de sa course.

opérer avec du mercure parfaitement sec, et de tenir toujours machine à l'abri d'une rentrée d'air humide. Sur le trajet du tube

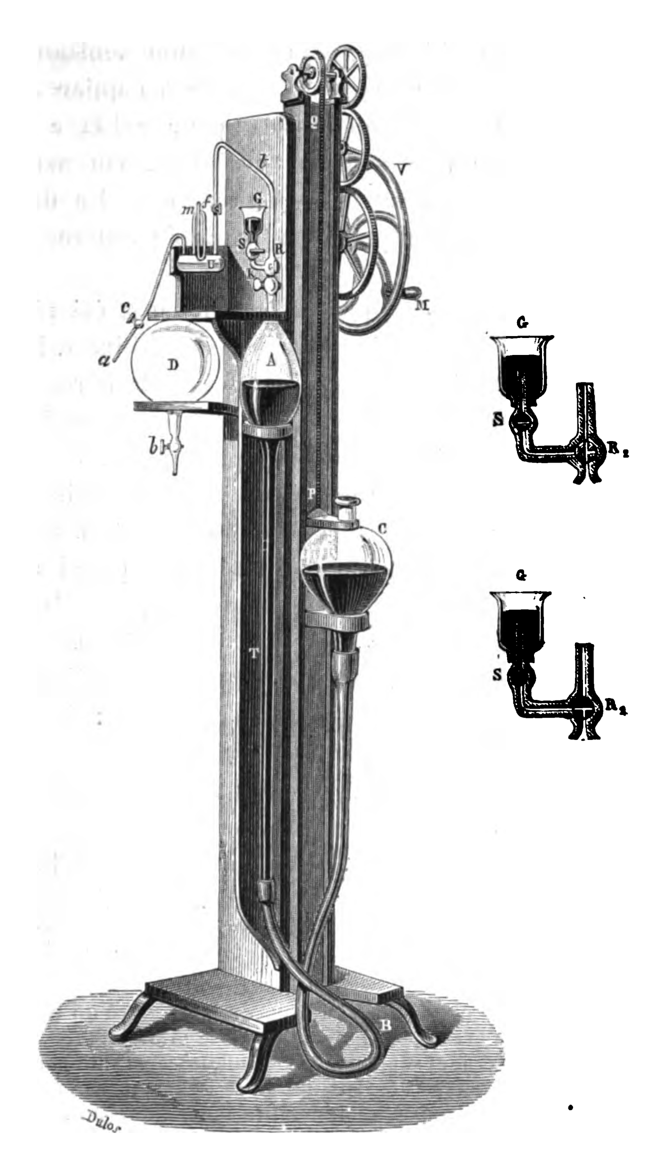


Fig. 515

conduisant au récipient, entre les robinets *f* et *c*, est placé un ré-

servoir U à acide sulfurique, destiné à protéger l'appareil contre l'humidité (1).

Le seul défaut de cette pompe est dans la lenteur de l'opération (à moins de lui donner un volume embarrassant et d'employer une masse de mercure difficile à manier (2)); aussi ne s'en sert-on habituellement que pour achever un vide déjà commencé avec une machine ordinaire. On arrive alors aisément à ce que les niveaux du mercure dans les deux branches du manomètre m ne présentent plus de différence appréciable.

Pompe sans robinet. — La pompe à mercure a été récemment perfectionnée par la suppression complète des robinets. Pour cela, il suffit d'adapter à l'orifice d'expulsion un long tube recourbé descendant jusqu'à une cuvette placée à 80 centimètres de l'ampoule, au-dessus de laquelle on élève le tube d'aspiration de même à 80 centimètres (Jean). Cette dernière condition toutefois est incommode; mieux vaut placer une soupape sur le trajet du tube maintenu à une hauteur convenable (Alvergniat). L'appareil prend alors l'aspect figuré ci-contre. En S est placée la soupape, constituée par un flotteur conique pouvant s'appliquer exactement contre la paroi supérieure du renflement K. Le tube d'aspiration t débouche dans l'ampoule A par deux branches qr et qp (Tœpler) : de cette manière, quand on abaisse la cuvette C, dès que le mercure dans le tube t est descendu en q, l'air venant du récipient peut se rendre en A par qp sans barboter à travers le mercure de l'ampoule. Lorsqu'on relève la cuvette, le mercure, montant par la branche rq, supprime en q la communication du récipient avec l'ampoule, puis, continuant son chemin vers K, il soulève la soupape S, et, l'ap-

(1) C'est pour le même objet qu'en dessous de R est placé un robinet K que l'on ferme quand on enlève R pour le nettoyer ou le graisser.

En D est figuré un récipient supplémentaire qui, une fois vidé par la machine à mercure, sert à achever le vide dans un autre récipient (par exemple dans un tube de Geissler où l'on veut faire apparaître la stratification).

(2) En déplaçant le mercure par le jeu d'une machine pneumatique ordinaire, on pourra laisser le réservoir C fixe, ce qui permettra à la fois de supprimer le mécanisme servant à le manœuvrer, et de donner aux réservoirs A et C une grande capacité. M. Jamin a construit sur ce principe une machine qui, par des coups de piston de 10 litres, fait le vide dans de vastes espaces avec autant de rapidité que de précision.

puyant avec force, ferme hermétiquement le tube t. Sur ce tube,

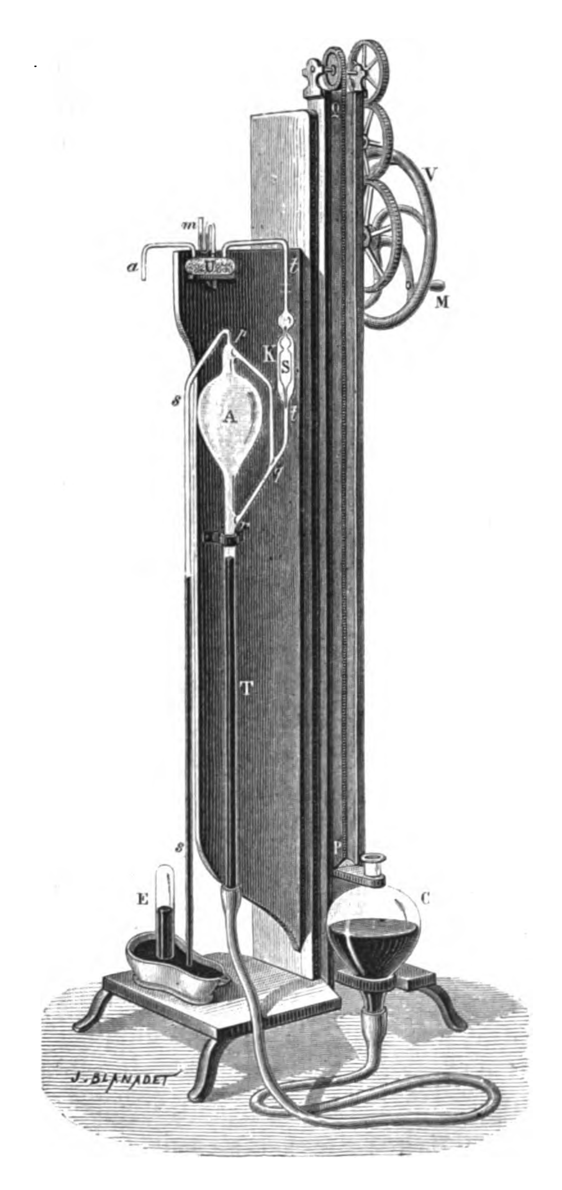


Fig. 516

comme d'ordinaire, est un réservoir U contenant des perles de

verre humectées d'acide sulfurique, et portant un petit manomètre tronqué *m* (¹).

Trompe de Sprengel. — On obtient un vide encore plus complet avec la trompe à mercure, imaginée par Sprengel. Cet appareil, modifié à plusieurs reprises par MM. Alvergniat sur les conseils de H. Sainte-Claire Deville, se construit aujourd'hui sous la forme représentée ci-contre. En T est la trompe proprement dite (262) (²). L'air du récipient, placé au delà de F, est aspiré par la chute du mercure qui vient suivant AGHPT : une ampoule ménagée en F recueille l'air qui a pu être entraîné jusque-là par le mercure ; cet air monte en F, tandis que le mercure poursuit sa route vers T. La position du réservoir A se règle aisément par l'enroulement de la tresse qui le soutient, de manière à ce que l'écoulement du mercure en T prenne la vitesse convenable. Le liquide entraînant avec lui l'air (que l'on peut facilement recueillir à l'orifice du tube K) est reçu en B.

Au début, on place le réservoir mobile A en 1 ; on tourne le robinet R de façon à faire passer la majeure partie du mercure de B en A; puis on donne au robinet R une position telle que le mercure puisse se rendre à la trompe ; on soulève le réservoir A jusqu'en 2 pour produire l'écoulement; celui-ci une fois établi, on amène A à la hauteur convenable 3, et on abandonne l'appareil à lui-même. Un chapelet de bulles d'air et de gouttes de mercure se succède en K, tandis que le tube s'électrise fortement et paraît lumineux dans l'obscurité. Entre le récipient et la trompe on met un tube à acide phosphorique et en outre un tube à soufre, ou mieux à sélénium, pour absorber la vapeur de mercure. On peut ainsi atteindre des vides d'une rare perfection.

Pour se faire une idée du vide obtenu, on emploie la jauge de M'Leod : c'est une ampoule J, communiquant avec le récipient, et dont l'air, par un jeu convenable du robinet *o* et du réservoir A, peut être réduit à une très petite fraction de son volume, mesurée dans le tube *t* : si par exemple l'air de J, pour arriver à la

(¹) Voir, sur certaines modifications récemment apportées à cette machine, Karavodine, *Journal de physique*, (2), II, 558 ; 1883.

(²) Au lieu d'une seule trompe on peut en employer plusieurs. MM. Alvergniat construisent des machines dans lesquelles ils réunissent quatre ou six trompes, de façon à permettre d'opérer plus vite.

ression atmosphérique, doit être réduit au $\frac{1}{1\,000\,000}$ de son volume,

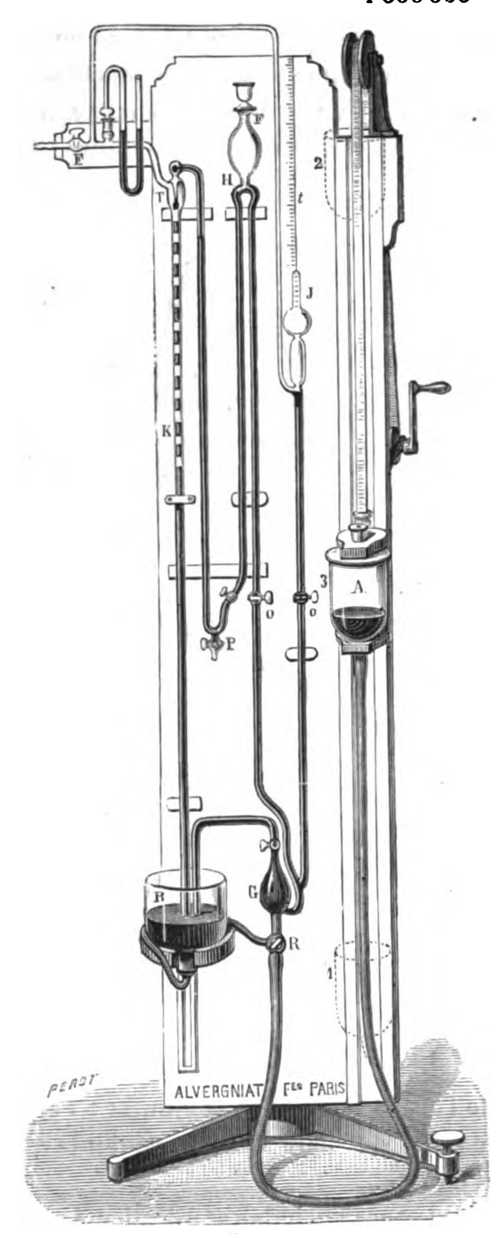


Fig. 517

on dit couramment que le vide a été fait à $\frac{1}{1\,000\,000}$ d'atmosphère.

304. Trompe à eau. — Avec une trompe à eau, on obtient rapidement le vide au degré que permet d'atteindre la tension de la vapeur d'eau pour la température de l'expérience.

La trompe à eau constitue ainsi une machine singulièrement commode pour raréfier l'air, sans peine aucune, à l'intérieur d'un récipient. Dans le petit modèle figuré ci-contre, A est l'entrée de

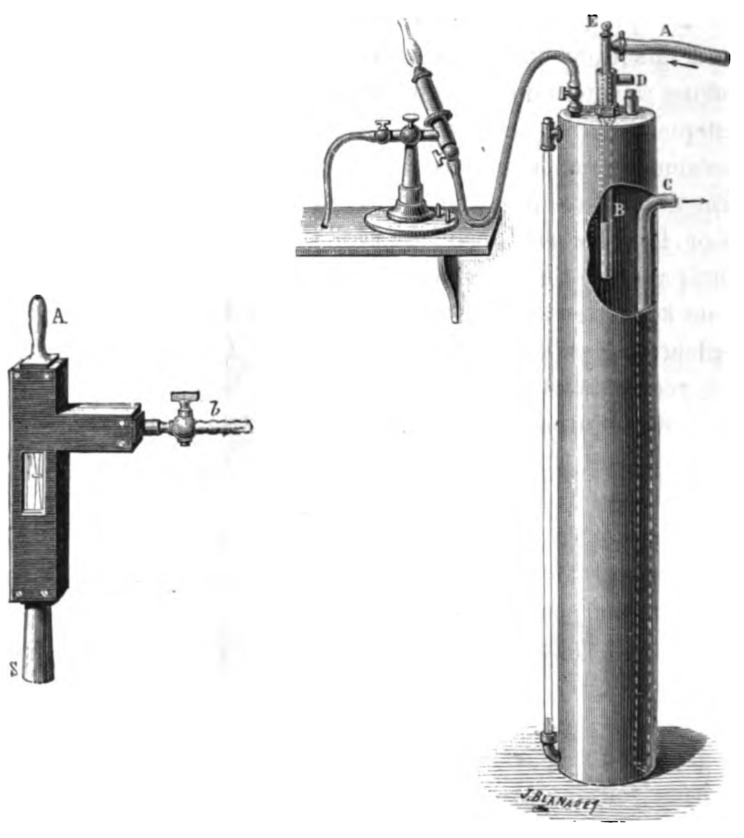


Fig. 518 Fig. 519

l'eau, *b* celle de l'air, S leur sortie commune ; l'aspiration se produit entre les pointes des deux ajutages coniques que traverse successivement le liquide.

On sait d'ailleurs, par l'ancienne application de la trompe comme machine soufflante, que l'air est expulsé de l'appareil avec violence, de sorte que la trompe peut aussi servir de machine de compression.

particulièrement propre à fournir un courant d'air sous pression. La figure 519 représente une petite trompe portative construite pour cet objet, sur les indications de M. Lionet. L'eau arrive par A et sort par C sous la pression de l'air intérieur qui, ayant pénétré par D et s'étant séparé de l'eau à l'extrémité de B, a gagné la partie supérieure du cylindre, d'où il va alimenter un chalumeau à gaz (¹).

305. Expériences avec la machine pneumatique. — La machine pneumatique a contribué largement aux progrès de la science. « Rien ne faisant mieux connaître les propriétés de l'air que ce qui passe là où il n'est pas », elle a fourni à Otto de Guericke et à Boyle des démonstrations convaincantes de la pesanteur de l'air (270), de son élasticité (123), de la nécessité de sa présence pour la combustion et la respiration. Mais ce sont surtout les preuves de la pression atmosphérique que le savant bourgmestre de Magdebourg se plut à multiplier.

On répète encore dans tous les cours l'expérience du *crève-vessie* et celle des *hémisphères de Magdebourg*. La force nécessaire pour

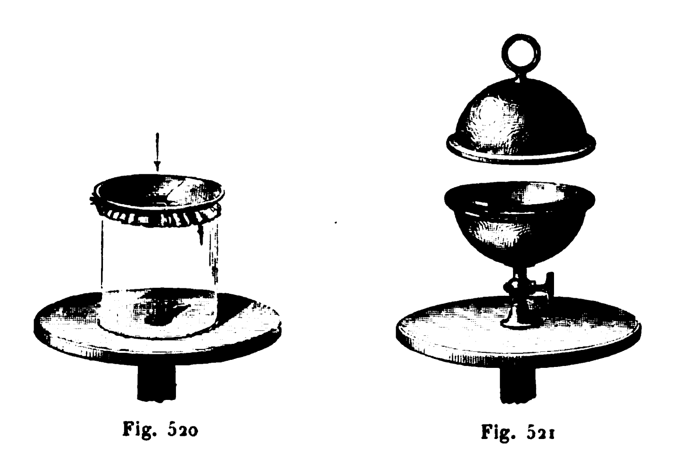


Fig. 520 Fig. 521

séparer les hémisphères, quand on a fait le vide à l'intérieur, étant égale à la pression de l'atmosphère sur le grand cercle qui leur sert

(¹) Voir en outre au *Journal de physique*, X, p. 308; 1881, la description d'intéressants appareils pneumatiques imaginés par M. DE ROMILLY, et appelés par lui la *pnéole* et la *spirelle*.

de base commune (¹), atteint rapidement une valeur énorme. A la diète de Ratisbonne en 1654, Otto de Guericke présenta deux hémisphères, de $\frac{2}{3}$ d'aune (44^{cm}) de diamètre, que 16 chevaux, 8 de chaque côté, ne purent séparer qu'à grand'peine; et quand ils y réussirent une forte détonation se produisit. Au contraire, en laissant rentrer l'air, on les séparait aisément.

On peut aussi procéder d'une manière inverse : après avoir fait le vide dans les hémisphères, on les suspend sous une cloche dont on enlève l'air; la force qui les réunissait se trouvant ainsi supprimée, le poids de l'hémisphère inférieur avec son pied suffit pour le détacher.

Nous citerons encore dans le même ordre d'idées l'expérience du

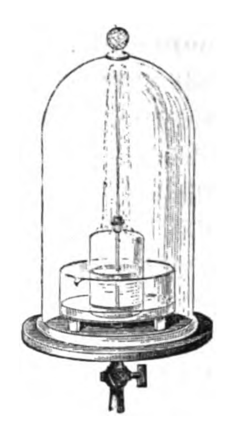


Fig. 522

jet d'eau dans le vide, où la raréfaction de l'air extérieur fait jaillir l'eau d'un flacon sous l'action de la force élastique de l'air enfermé dans ce flacon.

(¹) Soit en effet sur l'un des hémisphères un élément de surface ω, et soit α l'angle que la normale à cet élément fait avec la normale à la base de l'hémisphère; $p\omega$ étant la pression sur l'élément ω, la composante normale à la base, et seule agissante pour réunir les deux hémisphères, est $p\omega \cos\alpha = p\omega_1$, si nous appelons ω_1 la projection de ω sur le plan de la base; et la résultante de toutes ces forces est $\Sigma p\omega_1 = p\pi R^2$, R étant le rayon commun des deux hémisphères.

On arrive au même résultat en considérant la masse d'air occupée par l'un des hémisphères supposé plein : cette masse d'air étant en équilibre, la somme des pressions exercées par l'atmosphère sur sa surface courbe est égale et de signe contraire à la pression exercée sur sa base (nous négligeons le poids même de la masse d'air), c'est-à-dire égale à $p\pi R^2$. Telle est donc la force qu'il faut appliquer à chacun des hémisphères pour les séparer.

Rappelons enfin le *chemin de fer atmosphérique*, qui, pendant bien des années, gravit le coteau de Saint-Germain sous l'effort de la pression atmosphérique s'exerçant sur un piston mobile dans un gros tube placé entre les rails. Des machines pneumatiques puissantes faisaient le vide en avant du piston, auquel le train était attaché par une tige verticale traversant une fente pratiquée tout le long de l'arête supérieure du tube; une bande de cuir, appliquée sur cette fente, se soulevait juste pour le passage de la tige.

Ce système coûteux, usité aussi en différents points de l'Angleterre et de l'Irlande, a été complètement abandonné depuis l'invention des locomotives de montagne.

306. Machines à comprimer l'air. — *Machine de compression.* — En renversant les soupapes d'une machine pneumatique, on en fait une machine de compression. On trouve encore dans les cabinets de physique des machines de compression dont la forme extérieure rappelle entièrement celle de la machine pneumatique à deux corps de pompe, avec cette seule différence apparente que le récipient est un cylindre solidement serré entre deux platines par un système de colonnes et d'écrous. Mais cette similitude de forme ne présente aucun avantage.

Pompe à main. — La pompe à main est bien préférable. C'est une petite pompe MN, à piston plein P, munie à sa base de deux soupapes, l'une *a* s'ouvrant de l'extérieur à l'intérieur, l'autre *c* s'ouvrant au contraire de dedans en dehors. La pompe aspire donc l'air, ou tout autre gaz, en A et le refoule en C (1).

Soient V le volume du récipient, *v* le volume du corps de pompe;

(1) Chaque tubulure A, C, portant un tube latéral D, est munie d'un robinet à trois voies, dont la direction est marquée, comme d'habitude, par des traits tracés

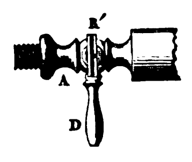


Fig. 523

sur la clef du robinet. On peut ainsi rétablir la pression atmosphérique sous la pompe seule, ou dans le récipient pris isolément, ou des deux côtés à la fois.

l'appareil étant supposé parfait, à chaque coup de piston la pression dans le récipient augmente de $H_0 \frac{v}{V}$, puisqu'à chaque coup de piston

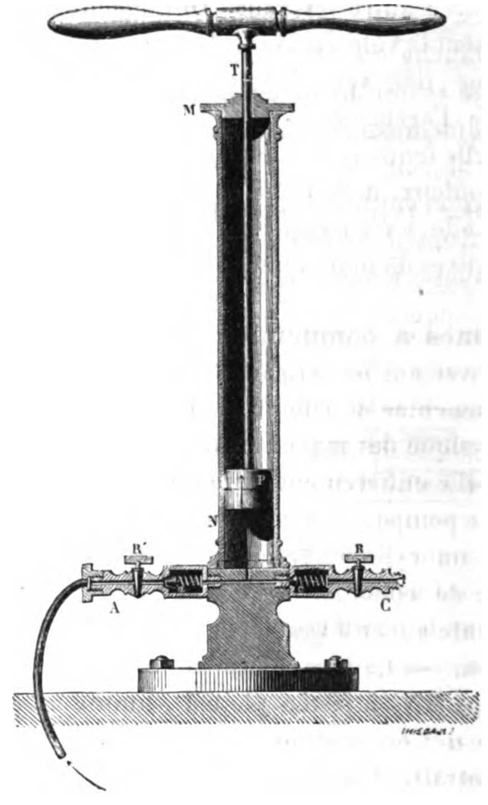


Fig. 524

une masse d'air, occupant le volume v sous la pression atmosphérique H_0, est repoussée dans le récipient V, et y prend la pression $H_0 \frac{v}{V}$, laquelle s'ajoute à la pression déjà existante, selon la loi du mélange des gaz. Après n coups de piston, la pression est donc

$$H_0 + n H_0 \frac{v}{V}:$$

la pression croît indéfiniment, suivant une progression arithmétique.

En réalité il y a un espace nuisible, le plus souvent même

assez considérable, u. La pression n'augmente donc pas indéfiniment, mais pour cette seule cause tend vers une limite

$$H = H_0 \frac{v}{u}.$$

En même temps la loi de variation de la force élastique est modifiée. On verra facilement qu'au n^e coup

$$H_n = \left(\frac{V}{V+u}\right)^n H_0 + \frac{v}{u} H \left\{ 1 - \left(\frac{V}{V+u}\right)^n \right\}.$$

Expériences avec la pompe à main. — Ctésibius (150 av. J.-C.), à qui paraît être due la pompe de compression, l'aurait, dit-on, appliquée au *fusil à vent*, également de son invention [1]. Dans l'appareil tel qu'on le construit actuellement, la crosse du fusil est creuse, et constitue un réservoir à l'intérieur duquel de l'air est injecté à haute pression. Devant la soupape d'écoulement se fixe le canon, dans lequel on introduit le projectile à la manière ordinaire. Si alors, au moyen d'une détente que le chien fait partir, on ouvre brusquement la soupape, un jet violent de gaz s'échappe du réservoir et lance au loin la balle. La soupape se referme aussitôt, et le fusil est prêt à servir de nouveau.

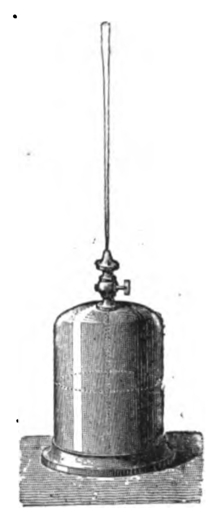


Fig. 525

Un autre appareil, également très ancien, est la *fontaine de compression*, que l'on trouve décrite en détail dans les *Pneumatiques* de Héron d'Alexandrie, le disciple célèbre de Ctésibius. L'expérience s'en répète habituellement dans les cours. On comprime de l'air à l'intérieur d'un réservoir métallique, au fond duquel on a préalablement versé un peu

(1) La partie de la physique ancienne se rapportant aux gaz serait due à Ctésibius, si l'on en juge par ce que rapporte Philon de Byzance, l'un de ses élèves, dans son *Traité sur la construction des machines à jet*. C'est également Ctésibius qui inventa la pompe à incendie, employée plus tard par les Romains sous le nom de *siphon* qu'on a donné depuis à un tout autre appareil. (Voir De Rochas, *Les origines de la science*. Paris, Masson ; 1884).

d'eau; on enlève la pompe; et à sa place, sur la tubulure à robinet, prolongée intérieurement par un tube plongeur, on visse un ajutage étroit. Si alors on ouvre le robinet, on voit l'eau jaillir à une grande hauteur.

Pompe Golaz. — De nos jours, les expériences sur la compressibilité et la liquéfaction des gaz ont réclamé des appareils plus puissants et plus parfaits.

La figure 526 représente un excellent modèle de la pompe de com-

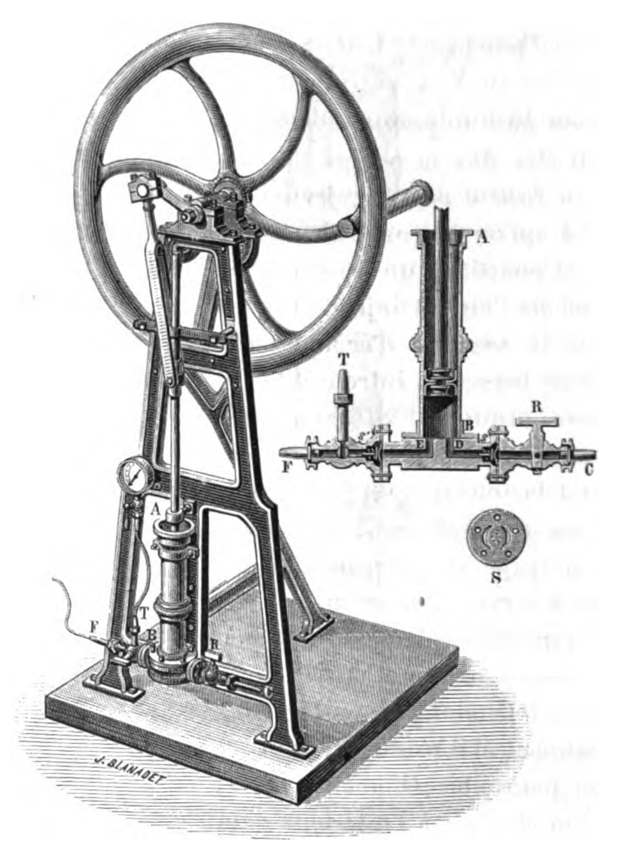


Fig. 526

pression, dû à Golaz, et avec laquelle il put essayer à 20 atmosphères tous les réservoirs et appareils construits jadis pour Regnault. La supériorité de cette pompe, d'une manœuvre facile, tient à la disposition des soupapes. Sous le disque métallique de chacune des sou-

papes *s* et *s'* est placé un cuir S, solidement attaché par les bords, et entaillé de deux fentes en croissant, d'un rayon double de celui de l'orifice (marqué en ponctué sur le dessin du cuir S); on évite ainsi complètement les fuites qui ont toujours lieu par les soupapes entièrement en métal. L'air est aspiré suivant CD et refoulé en EFT.

Pompe Cailletet. — M. Cailletet [1] a construit récemment une

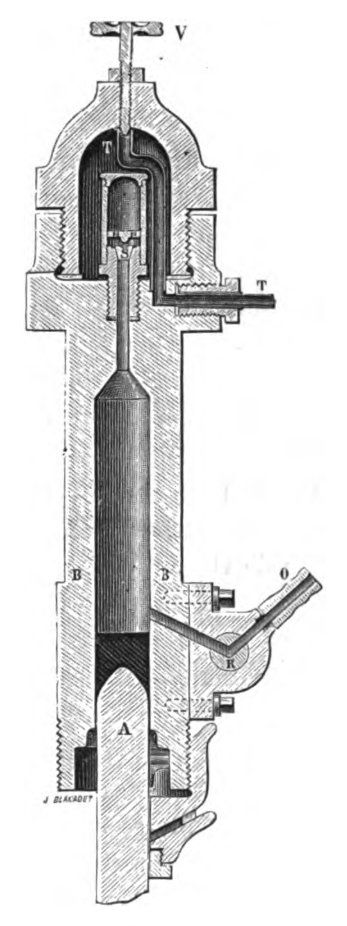


Fig. 527

pompe permettant de comprimer des masses de gaz considérables sous des pressions de plusieurs centaines d'atmosphères.

[1] CAILLETET, *Ann. de chim. et de phys.*, (5), XXIX, 153; 1883.

Reprenant l'idée mise autrefois en avant par Regnault et réalisée par Kravogl dans sa machine pneumatique, M. Cailletet place sur le piston renversé A une couche de mercure qui, à chaque coup de piston, vient soulever la soupape conique d'ébonite S, en s'adaptant exactement sur le fond du corps de pompe. La soupape d'aspiration est supprimée, et remplacée par un robinet R qu'un système de cames ouvre et ferme en temps voulu. Le piston est mis en mouvement par un balancier, actionné lui-même, à l'aide d'une bielle et d'une manivelle, par un volant auquel on imprime une rotation continue.

307. Applications de l'air comprimé. — Les applications de l'air comprimé sont nombreuses et importantes.

C'est l'air comprimé qui lance les dépêches dans les *tubes pneumatiques* formant le réseau télégraphique intérieur des grandes villes ([1]). A Paris, un système de tubes, de $0^m,065$ de diamètre, relie entre eux les différents bureaux, à la manière d'un chemin de fer souterrain dans lequel les véhicules sont les boîtes à dépêches et le moteur l'air comprimé. Les dépêches sont empilées par groupes de 30 ou 40 dans des boîtes en tôle recouvertes de cuir : dix boîtes et un piston forment un train pesant environ 4 kilogrammes. L'air à la pression voulue est préparé dans les stations, soit à l'aide d'une sorte de fontaine de Héron (311) alimentée par les eaux de la Ville, soit par l'action d'une machine foulante et aspirante avec moteur à vapeur. Les trains sont poussés ou aspirés par une différence de pression de trois quarts d'atmosphère, qui leur imprime une vitesse moyenne de 1 kilomètre par minute.

L'air comprimé permet de donner simultanément une heure sensiblement identique aux différentes horloges d'une même ville. Cette application intéressante, tentée en France par M. Collin dès 1867, réalisée à Vienne en 1876, fonctionne à Paris depuis quatre ans. Une horloge centrale, recevant directement l'heure de l'Observatoire, règle les émissions d'air comprimé dans la canalisation sur laquelle sont branchés les cadrans récepteurs. Toutes les minutes, de l'air à un excès de pression de $\frac{7}{10}$ d'atmosphère est lancé pendant

([1]) Ce système, inauguré à Londres en 1854, est employé à Paris et à Berlin depuis 1865. Voir Bontemps, *La Nature*, I; 1873.

vingt secondes dans la canalisation qui, durant les quarante autres secondes, communique avec l'atmosphère. Le mécanisme récepteur des *horloges pneumatiques* est très simple. L'air comprimé arrive à l'intérieur d'un petit soufflet en caoutchouc, et, soulevant un levier

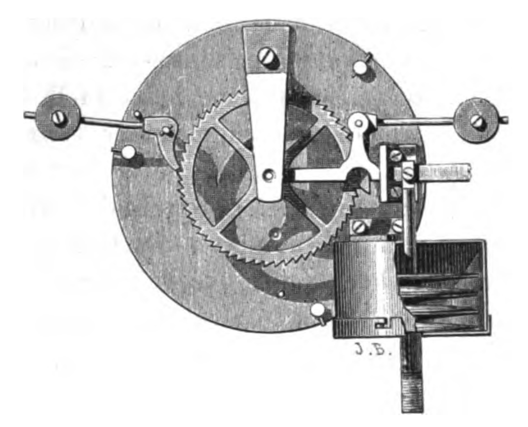


Fig. 528

muni d'une sorte de doigt, pousse une roue portant 60 dents, sur laquelle est montée l'aiguille des minutes. La roue, retenue de l'autre côté par un cliquet à contre-poids, avance d'une dent seulement, et l'aiguille sur le cadran marche d'une minute, entraînant de la quantité voulue l'aiguille des heures, à laquelle elle est reliée par une petite minuterie non marquée sur la figure.

C'est au moyen de l'air comprimé que l'homme peut travailler sous l'eau (1). A la cloche à plongeur (2) ont succédé le scaphandre et les caissons de l'appareil Triger. Le scaphandre (σκάφη, bateau, ἀνήρ, homme) consiste essentiellement en un casque hermétiquement fixé sur les épaules et recevant d'une pompe foulante, à une pression égale à celle que l'eau exerce sur le reste du corps, de l'air

(1) Voir P. Bert, *loc. cit.*
(2) L'invention de la cloche à plongeur est fort ancienne. Poggendorff rapporte qu'en 1538, devant Charles-Quint, deux Grecs firent à Tolède une expérience sur la cloche à plongeur ; et l'on pourrait aisément en faire remonter l'origine jusqu'au temps d'Aristote. Mais l'ancienne cloche, ne recevant pas d'air en outre de celui qu'elle renfermait au départ sous la pression atmosphérique, était envahie par l'eau à la partie inférieure, et l'air confiné dans le haut y devenait bientôt impropre à la respiration. Ce fut Halley qui imagina d'envoyer de l'air dans la cloche pour en chasser l'eau et y renouveler l'atmosphère viciée.

qui s'échappe ensuite par des ouvertures convenablement disposées. Les scaphandres sont journellement employés dans nos ports;



Fig. 529

on en fait aussi un fréquent usage dans les mers de l'Archipel pour la pêche des éponges, que l'on va chercher jusqu'à 40 et 50 mètres de profondeur. On doit à l'ingénieur français Triger [1] l'idée heureuse d'appliquer l'air comprimé au forage des puits de mines et au fonçage des piles de ponts. La figure ci-jointe [2] fait com-

(1) TRIGER, C. R., XIII, 884; 1841.
(2) Cette figure semi-schématique est empruntée à la thèse du Dr Foley. Paris; 1863.

prendre le principe de la méthode. Un tube de fonte, formé d'anneaux superposés et solidement boulonnés, reçoit par en haut

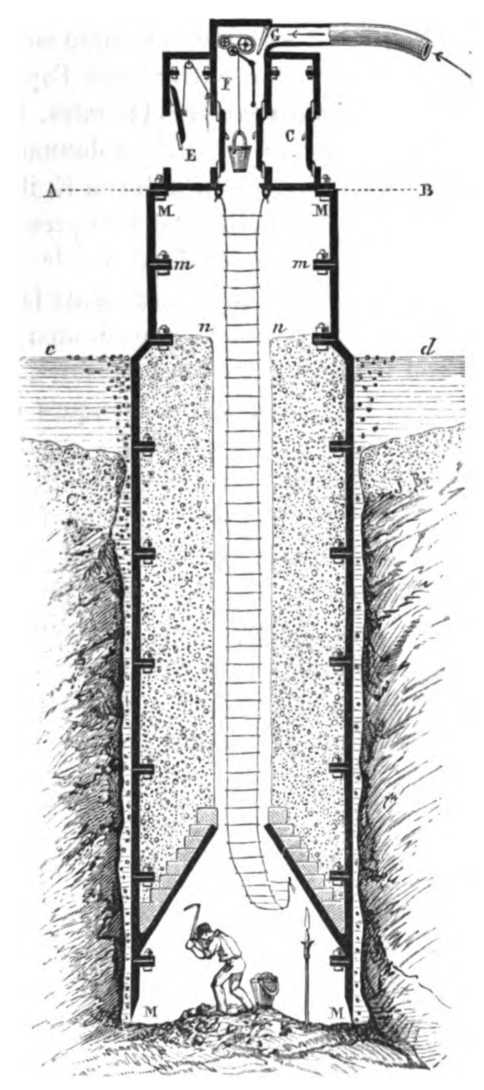


Fig. 530

de l'air comprimé qui chasse l'eau du tube et s'échappe tout autour de la partie inférieure, ou « crinoline », en laissant un sol asséché sur lequel l'ouvrier peut librement travailler. Le tube,

chargé de maçonnerie sur toute sa longueur, s'enfonce à mesure du creusement; on ajoute donc de nouveaux anneaux sous le caisson supérieur. Ce caisson se compose lui-même de trois chambres dont l'une, celle du milieu F, est en communication constante avec les machines de compression. Pour entrer dans l'appareil, l'ouvrier pénètre d'abord dans une des chambres latérales, E, à la pression extérieure, s'y renferme, ouvre un robinet donnant sur la chambre F, puis, quand la pression s'est établie en E, il pousse la porte intérieure maintenue jusque-là par l'excès de pression, entre dans la chambre F, et au moyen de l'échelle de corde descend au fond du tube. Pour sortir, il remonte en F, entre dans la chambre C qui contient de l'air comprimé, referme la porte, ouvre un robinet de décharge, et, quand la pression est tombée, sort par la porte extérieure. Il évite ainsi les changements brusques de pression qui peuvent amener des accidents graves.

Les *machines perforatrices* des tunnels du Mont-Cenis et du Saint-Gothard étaient animées par de l'air comprimé à l'aide de chutes d'eau naturelles, de sorte que la montagne a été percée par la force empruntée à ses torrents [1].

C'est encore l'air comprimé qui, lancé sur les pistons des *freins Westinghouse*, arrête en quelques secondes un train marchant à toute vitesse. On l'a aussi appliqué à la traction des tramways et même de trains entiers remorqués par des *locomotives à air comprimé*.

VI. — APPAREILS DIVERS SERVANT A L'ÉCOULEMENT DES LIQUIDES.

308. Vase de Mariotte. — Le vase de Mariotte est un flacon C, muni à sa partie inférieure d'un orifice A pour l'écoulement du liquide, et fermé en haut par un bouchon que traverse un tube vertical T ouvert aux deux bouts et plongeant dans le liquide jusqu'à une certaine distance au-dessus de l'orifice. L'air ne pouvant rentrer que par ce tube T, quand le régime normal est établi, des bulles d'air se dégagent de l'extrémité B du tube et gagnent la partie supérieure DED'E' du flacon, tandis que le liquide s'écoule avec une vitesse

[1] L'emploi de l'air comprimé avait en outre l'avantage de produire une ventilation active de ces profondes galeries.

constante, comme le montre la conservation de l'amplitude du jet ([1]).

Cette constance de la vitesse résulte de ce que, d'après la disposition de l'appareil, la pression en B, et par suite en tout point du plan BB′,

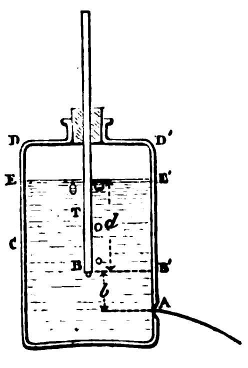


Fig. 531

est égale à la pression atmosphérique H. Cette même pression H régnant à l'orifice, l'écoulement est dû simplement à l'action de la colonne liquide b, comprise entre les niveaux A et B; la vitesse reste ainsi constante, tant qu'il y a du liquide au-dessus de l'orifice B du tube ([2]), et égale à

$$v = \sqrt{2gb},$$

([1]) Au début, le flacon étant complètement rempli de liquide, et celui-ci s'élevant même à une certaine hauteur dans le tube T, l'écoulement se produit avec

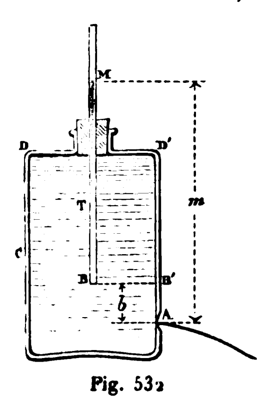


Fig. 532

une vitesse $v = \sqrt{2gm}$, rapidement décroissante à mesure que le liquide descend dans le tube T.

([2]) Au-dessous du plan BB′, la vitesse décroît de $\sqrt{2gb}$ jusqu'à zéro.

si l'orifice A est pratiqué en mince paroi [1]. On règle donc cette vitesse en élevant ou en abaissant le tube T.

La pression de l'air intérieur, étant à chaque instant égale à $H - d$, augmente à mesure que le liquide s'écoule. La rentrée de l'air se fait donc avec une vitesse croissante, puisque l'air qui rentre doit non seulement combler un vide constant, mais encore suffire à l'accroissement continuel de pression de la masse DED'E' [2].

Le jeu de l'appareil reposant uniquement sur ce que l'on établit la pression atmosphérique au point B du liquide situé au-dessus de l'orifice A, on obtiendrait la même constance d'écoulement en perçant un petit orifice sur la paroi du flacon en B'.

Dans les cours on se sert ordinairement, pour la démonstration, d'un flacon de Mariotte à trois orifices A, A', A''.

1° Le flacon étant complètement rempli de liquide, on ouvre A' : le liquide s'échappe par A' en même temps qu'il baisse dans le tube T; et, quand dans ce tube il est arrivé au niveau A', l'écoulement cesse, la pression atmosphérique s'exerçant également de part et d'autre de l'orifice.

2° On ferme A' et on ouvre A'' : l'air rentre par A'', et le liquide remonte dans le tube T jusqu'à ce qu'il ait atteint le niveau A'; alors l'équilibre est rétabli.

3° On ouvre à la fois les trois orifices A, A', A''. L'ouverture de A', amenant l'établissement de la pression atmosphérique au niveau de cet orifice, produit le même effet que si l'on avait soulevé le tube T

(1) En fait, la vitesse n'est pas rigoureusement constante. La rentrée d'air s'effectue en effet par bulles isolées; chaque bulle qui se forme en B repousse le liquide, qui remonte ensuite quand la bulle se dégage. La hauteur b n'est donc pas absolument constante; le jet s'abaisse et se relève à chaque bulle qui se dégage. On corrige cet inconvénient en effilant, ou mieux en taillant en biseau l'extrémité du tube.

(2) Soient S la section du flacon, s' la section contractée du jet sortant par A avec la vitesse constante v, et soit au début D la distance du niveau supérieur du liquide dans le flacon à l'extrémité B du tube : le volume du liquide écoulé au bout du temps t est $s'vt$. Il a été remplacé par un égal volume d'air à la pression $H - \left(D - \frac{s'vt}{S}\right)$. Cet air, sous la pression H, avait le volume

$$\begin{aligned} V &= s'vt\left(1 - \frac{D}{H} + \frac{s'vt}{SH}\right) \\ &= at + bt^2, \end{aligned}$$

a et b étant deux constantes. La vitesse de rentrée de l'air est donc

$$u = a + 2bt.$$

usqu'à cette hauteur. L'air rentre par A″, et le liquide s'échappe ıvec une vitesse constante par chacun des orifices A′ et A. Cette

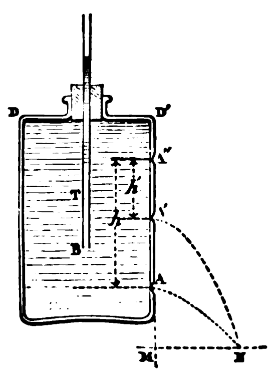
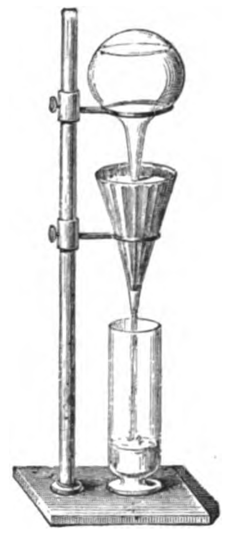


Fig. 533

constance se vérifie par la fixité du point où chacune des paraboles rencontre un plan horizontal MN ; si ce plan MN est mené à la distance h' de l'orifice A, les deux jets ont (254) l'amplitude $\sqrt{4hh'}$, et aboutissent l'un et l'autre au même point N.

Au lieu de munir l'appareil d'un tube engagé dans un bouchon


Fig. 534

fermant le flacon, on peut simplement renverser sur le liquide un ballon préalablement rempli du même liquide. Le niveau dans le

vase en expérience (ce vase est ici un entonnoir portant un filtre) se fixe à l'orifice du ballon, et la vitesse d'écoulement reste constante.

309. Siphon. — Le siphon est un appareil à l'aide duquel un liquide peut s'écouler d'un vase supérieur dans un vase inférieur en

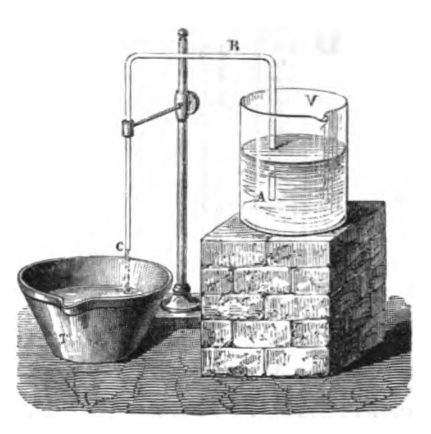


Fig. 535

passant par-dessus le bord du premier vase. C'est un tube recourbé ABC, à branches inégales, que l'on remplit de liquide et que l'on retourne en immergeant la courte branche dans le liquide à transvaser.

Fonctionnement. — Pour nous rendre compte de l'écoulement, supposons le liquide momentanément arrêté, et considérons les forces qui le sollicitent. Soit mn une tranche prise n'importe où dans le siphon : cette tranche supporte, du côté A, une pression $H-z$, H étant la pression atmosphérique mesurée en colonne du liquide donné, et z la hauteur de la tranche au-dessus du niveau MN dans le vase A ; du côté B, cette même tranche supporte une pression $H-h'+h-z$, h et h' étant les hauteurs des deux branches au-dessus des niveaux MN, M'N'. La pression résultante sur mn est donc égale à

$$h'-h,$$

et dirigée dans le sens AA' : par suite, le liquide s'écoulera du côté de la grande branche, et comme la pression est la même pour toute

tranche mn, il s'écoulera en bloc, et pour ainsi dire d'un seul morceau. La vitesse d'écoulement est

$$v=\sqrt{2g(h'-h)}:$$

elle diminue à mesure que le liquide baisse en V et monte en V'.

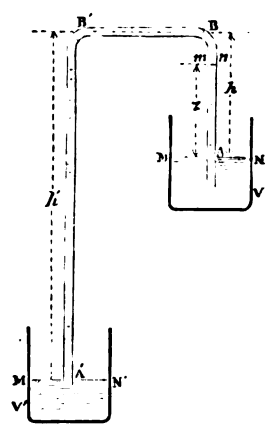


Fig. 536

Il n'est pas nécessaire que la grande branche soit plongée dans le liquide du vase inférieur. Elle peut s'ouvrir librement à l'air, la pression atmosphérique s'exerçant directement en A'; rien ne sera changé, pourvu que l'orifice A' ne soit pas assez large pour permettre à l'air de rentrer dans le siphon.

Si l'écoulement est produit par la différence des hauteurs h' et h du liquide dans les deux branches, c'est la pression atmosphérique H qui maintient le liquide soulevé dans chacune. La hauteur de la petite branche du siphon ne saurait donc être supérieure à H, sinon le liquide ne s'élèverait pas jusqu'à la courbure. La grande branche peut au contraire avoir une longueur quelconque, sauf à constituer un baromètre avec un espace vide supérieur dans lequel le liquide venant de la petite branche tombera en cascade.

Amorcement. — Pour amorcer le siphon, on emploie différents procédés :

Tantôt, comme nous l'avons déjà indiqué, on remplit le tube, on le ferme aux deux bouts, et on le retourne sur le liquide.

Tantôt on aspire l'air par l'extrémité de la grande branche, soit directement, soit au moyen d'un tube latéral *am*, muni d'une boule pour empêcher les liquides dangereux d'arriver à la bouche ; avec cette disposition il est à remarquer que, suivant la largeur de

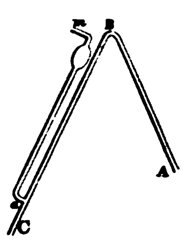


Fig. 537

l'orifice de la grande branche, la longueur *h'* de cette branche doit être comptée jusqu'à l'extrémité C, ou seulement jusqu'à la jonction *a* du tube latéral : le premier cas se présente si l'orifice C est étroit, et le liquide dans le tube *am* s'élève à une hauteur un peu inférieure au niveau du liquide dans le vase supérieur (hauteur qu'il atteindrait exactement si l'on venait à fermer la grande branche en C) ; si au contraire l'orifice C est large, le liquide se sépare de la paroi au niveau de la jonction *a*, et c'est en ce point que se termine réellement la grande branche.

D'autres fois, on amorce le siphon en exerçant une pression à la

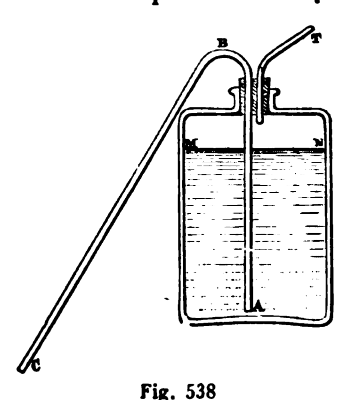


Fig. 538

surface du liquide, l'appareil étant monté comme le représente la figure 538.

Dans les fabriques d'acide sulfurique, on emploie des siphons ABC,

à grande branche inclinée, que l'on amorce par la partie supérieure. Le robinet R étant fermé, on ouvre les orifices b et b' ; par b on verse de l'acide sulfurique jusqu'à remplir la grande branche, et

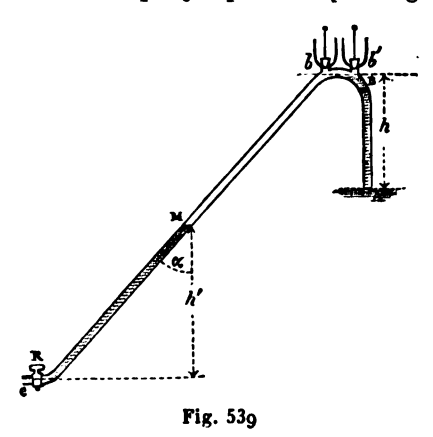


Fig. 539

pendant ce temps l'air s'échappe en b' ; on bouche alors les orifices b et b', et l'on ouvre le robinet R. Le liquide s'écoule, aspirant derrière lui l'air intérieur, et l'acide monte dans la petite branche ; si les dimensions de l'appareil sont convenables, quand l'acide atteint la courbure, il reste encore en MC une colonne liquide, de hauteur verticale h' supérieure à la longueur h de la petite branche, et le siphon est amorcé. Supposons en effet le mouvement arrêté un instant : l'air interposé en MB n'agissant que par son élasticité, les pressions à l'intérieur du liquide sont réparties exactement de même que si, l'air étant supprimé, la tranche M était remontée en B. Rendu libre, le liquide tout entier marchera donc vers C si h' est plus grand que h. Le siphon étant peu large, la colonne d'air suivra ce mouvement, et comme le liquide venant de la petite branche sera arrivé dans la grande au-dessous du niveau A, avant que la colonne MC soit complètement écoulée [1], le siphon sera amorcé. Ainsi la condition de l'amorcement est que la longueur l' de la grande branche soit supérieure à celle pour laquelle il y aurait équilibre, l'air qui occupait le volume h à la pression H occupant le volume $l' - \frac{h}{\cos\alpha}$ à la pression $H - h$, ce qui donne

[1] D'autant que l'air intérieur diminue de volume, à mesure qu'il marche vers C.

$$l' > h\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{H}{H-h}\right). \text{ [1]}$$

Si le tube du siphon était un peu large, en rétrécissant suffisamment l'orifice C on pourrait empêcher que l'air intérieur fût entraîné: l'écoulement se produirait alors malgré la présence de cet air, pourvu que l'on eût $h' > h$.

Siphon fonctionnant avec de l'air. — Un siphon peut donc fonctionner avec de l'air. On le vérifie aisément à l'aide d'un siphon de verre ABCDE, effilé en E [2].

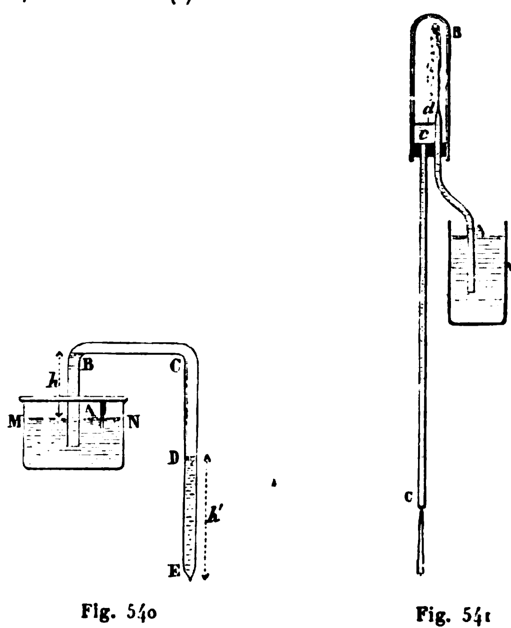


Fig. 540 Fig. 541

Sur les mêmes principes repose l'expérience du *jet d'eau dans un siphon* contenant de l'air. L'éprouvette B étant d'abord à moitié

[1] Si le siphon était formé de deux branches verticales, de longueur l et l', réunies par une branche horizontale de longueur k, la condition d'amorcement serait

$$l' > l + (l+k)\frac{H}{H-l}.$$

[2] Il peut arriver qu'à la partie supérieure d'un siphon il y ait une certaine quantité d'air immobile, insuffisante pour interrompre la colonne liquide. Cet air, faisant en quelque sorte partie de la paroi, n'empêche évidemment pas l'écoulement.

remplie d'eau, on la ferme au moyen d'un bouchon traversé par les deux tubes Ad, cC, et on la retourne sur le vase V, plein d'eau. Le liquide de l'éprouvette s'écoule par le tube cC, une diminution de pression se produit en B, et le liquide jaillit dans l'éprouvette par l'orifice d.

Siphon placé dans un milieu dont la densité n'est pas négligeable. — Jusqu'ici nous avons supposé le siphon tout entier plongé dans l'air, c'est-à-dire dans un fluide dont la densité est assez faible pour que l'on puisse négliger la différence des pressions exercées sur les liquides en V et V'. Nous considérerons maintenant le cas où la densité du fluide ambiant est comparable à celle du fluide à transvaser.

Soient δ la densité du fluide ambiant et d la densité du liquide à transvaser. La pression que la tranche mn (fig. 536) supporte du côté A est $p-z$, p étant la pression à la surface du liquide dans le vase V, évaluée comme toujours en colonne du liquide à transvaser. La pression exercée sur la même tranche mn du côté A' est $p'-h'+h-z$, p' étant la pression à la surface du liquide dans le vase V'. Mais la différence des pressions exercées par le fluide ambiant aux niveaux A et A' est due à l'action d'une colonne de hauteur $h'-h$ de ce fluide de densité δ, colonne équivalant par conséquent à une colonne de hauteur $(h'-h)\frac{\delta}{d}$ du liquide de densité d. On a donc $p'-p=(h'-h)\frac{\delta}{d}$, et par suite la résultante des pressions exercées sur mn est égale à

$$(h'-h)\left(1-\frac{\delta}{d}\right).$$

Deux cas sont à considérer :

1° $\delta < d$. L'écoulement se produit dans le sens ABB'A', avec la vitesse

$$v=\sqrt{2g(h'-h)\left(1-\frac{\delta}{d}\right)}:$$

c'est, à la grandeur près de la vitesse, le phénomène que nous avons étudié précédemment.

2° $\delta > d$. L'écoulement s'effectue en sens inverse, du vase le plus bas au plus élevé, avec la vitesse

$$v=\sqrt{2g(h'-h)\left(\frac{\delta}{d}-1\right)}.$$

On peut réaliser l'expérience au moyen de l'appareil figuré ci-contre. Les deux vases V et V', réunis par le siphon ABB'A', sont remplis de pétrole, puis fermés par des bouchons que traversent le siphon et les petits tubes recourbés *t, t'*. L'appareil étant descendu dans un

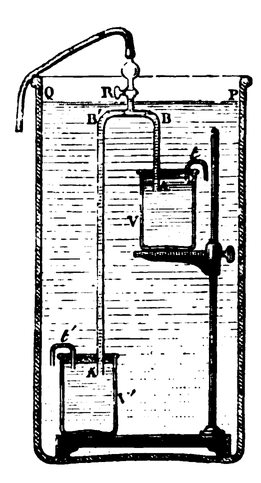


Fig. 542

grand vase plein d'eau, on aspire par la tubulure supérieure de façon à remplir le siphon; celui-ci amorcé, on ferme le robinet R, et l'écoulement se produit du vase V' au vase V.

Ce jeu s'observe surtout avec les gaz [1] : deux cheminées, par exemple, placées à des étages différents, forment souvent, par leurs tuyaux réunis à la partie supérieure, un véritable siphon déversant dans la pièce du haut la fumée de celle du bas.

Siphon donnant un écoulement constant. — Héron, qui dans ses *Pneumatiques* traite longuement du siphon, donne le moyen d'obtenir de cet appareil un écoulement constant. La petite branche

[1] Dans les cours de chimie on manifeste souvent la grande densité de l'acide carbonique en montrant qu'il se transvase au siphon exactement comme de l'eau, et la légèreté de l'hydrogène en faisant voir qu'au contraire, avec un siphon renversé, on le fait passer d'une éprouvette tenue verticalement le fond en haut dans une deuxième éprouvette placée de même mais à un niveau plus élevé.

du siphon est prise dans un flotteur en liège, reposant sur la surface du liquide supérieur, et convenablement lesté. La grande branche s'ouvrant librement à l'air, la différence $h' - h$ demeure invariable; la vitesse d'écoulement est donc elle-même constante.

Vase de Tantale. — Le siphon permet aussi d'avoir un écoulement intermittent : le *vase de Tantale* est un verre dont le pied est traversé par un siphon qui s'amorce quand le liquide dans le

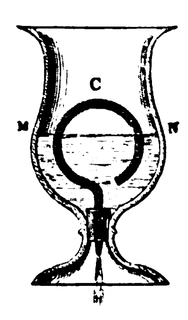


Fig. 513

vase atteint le niveau C. Une fois le siphon amorcé, l'écoulement se produit; et si l'orifice du siphon dépense plus que celui qui amène l'eau, le niveau baissera dans le vase jusqu'à dégager l'extrémité de la petite branche du siphon : l'écoulement cessera alors pour recommencer ensuite.

Le fonctionnement de certaines fontaines intermittentes naturelles s'explique de même.

310. Fontaine intermittente. — On trouve dans tous les cabinets de physique une fontaine intermittente, dite aussi *fontaine de Sturmius*, parce qu'elle est due à Sturm ou Sturmius, qui professait à Altdorf vers la fin du XVII[e] siècle. Un réservoir piriforme A, fermé en haut par un bouchon E, muni en bas d'orifices *aa*, est porté par un tube TS, s'ouvrant à sa partie supérieure S et aboutissant en T à une cuvette CC′, percée elle-même d'un trou *o* de section moindre que la somme des sections *aa*. Le tube ST étant d'abord librement ouvert, le liquide s'écoule par les orifices *aa* [1], tombe dans la cuvette CC′, s'y élève peu à peu, et

[1] Le vase A pouvant, par un mouvement de rotation, ouvrir ou fermer les orifices *a*, nous supposons que ceux-ci sont ouverts.

atteint l'orifice du tube T qui se trouve alors fermé. L'écoulement par les orifices *aa* commence aussitôt à se ralentir, la pression de l'air dans le réservoir A diminuant comme le montre l'ascension de l'eau en T, et bientôt il cesse complètement, quand la pression de l'air intérieur est devenue $H - z$, H étant la pression atmosphérique évaluée en colonne d'eau, et z la distance du niveau MN du liquide dans le vase aux orifices *aa* : à ce moment, la hauteur x



Fig. 544

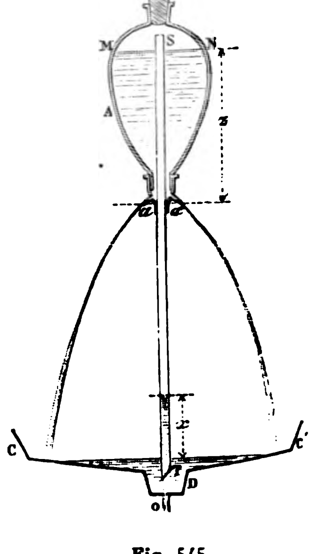


Fig. 545

du liquide soulevé est elle-même égale à z. Puis le liquide s'écoulant par l'orifice *o* dégage l'extrémité du tube T, l'air rentre dans le récipient; et ainsi de suite.

311. Fontaine de Héron. — Parmi les nombreux appareils d'hydraulique imaginés par Héron, l'un des plus curieux était celui que l'on désigne encore sous le nom de *fontaine de Héron*. Un réservoir A contenant du liquide porte deux tubes, l'un *s*, aboutissant à sa partie inférieure, et par lequel doit jaillir le liquide, l'autre *dc*, venant de sa partie supérieure et s'ouvrant en haut d'un deuxième réservoir B plein d'air. Au fond de ce réservoir B débouche un tube *ba*, partant de la cuvette D. Si l'on verse de l'eau en D de

façon à remplir complètement le tube ab, l'air du réservoir B se trouve alors comprimé à la pression $H+h$, H étant encore la pression atmosphérique évaluée en colonne d'eau, et h la différence des niveaux en D et en B ; cette pression se transmet intégralement par le tube cd à l'air du réservoir A ; le liquide de ce réservoir tend donc à s'élever au-dessus du niveau en A d'une hauteur égale h.

Au début, le réservoir A doit être rempli d'eau, le réservoir B

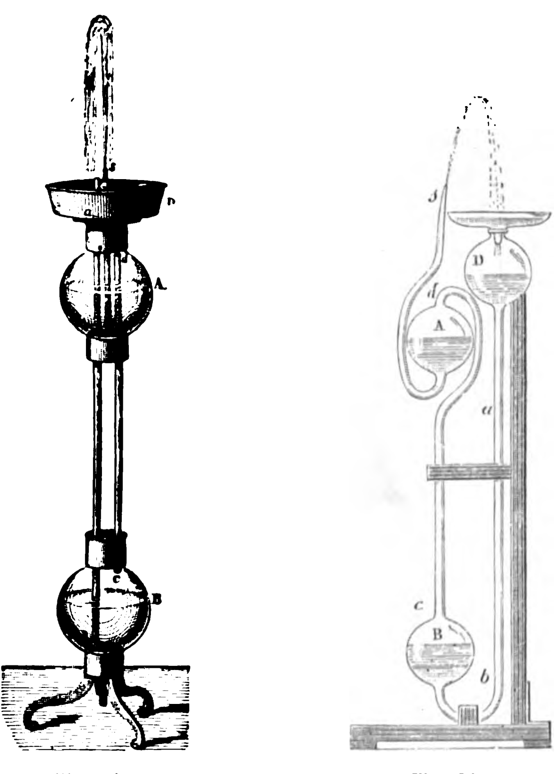


Fig. 546 Fig. 547

étant plein d'air. Quand l'appareil vient de fonctionner, il suffit de le retourner : l'eau qui est en B passe en A, et il se retrouve en état.

Lampe pneumatique. — Sur le modèle de sa fontaine, Héron décrit une lampe où l'huile s'élève automatiquement. Le réservoir à huile KΛ communique par le tube MN avec le compartiment

préalablement remplie d'eau. Pour mettre l'appareil en activité, on ouvre le robinet E de manière à laisser descendre l'eau de ABEZ dans ΓΔΕΖ : l'huile monte par le tube ΟΠ qui se prolonge à travers la poignée de la lampe, et elle se déverse à l'intérieur.

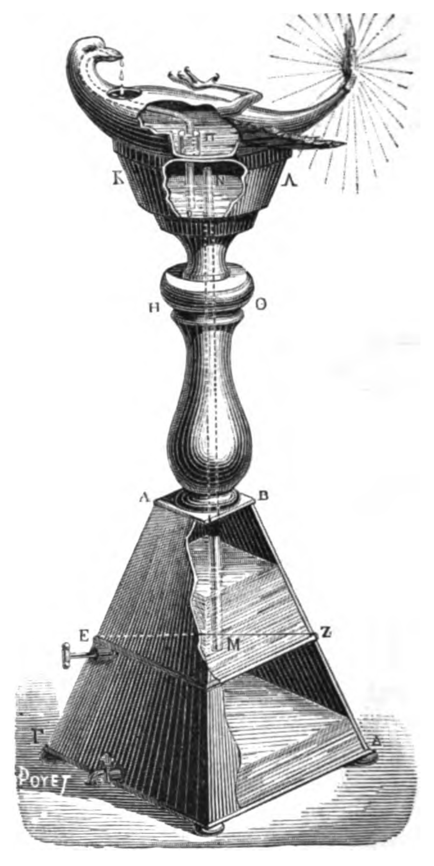


Fig. 548

Machines à élever l'eau. — Aux mines de Schemnitz, on a employé la disposition de Héron à épuiser l'eau qui envahit les galeries G. Cette eau, amenée dans le réservoir A, est pressée par l'air comprimé dans le vase B au moyen de l'eau du bassin D, qui se trouve lui-même sur la colline à une hauteur au-dessus du sol supérieure à la profondeur de la mine : l'eau de A pourra donc monter jusqu'au sol en *s*. Quand le vase A s'est vidé, on y introduit une nouvelle quantité de l'eau de G, en même temps que l'on vide

inférieur ΓΔΕΖ du pied, dont la chambre supérieure ΑΒΕΖ a été le vase B qui s'était rempli pendant l'opération, et l'on recommence.

La figure 550 montre un appareil analogue servant à d'élever l'eau de M jusqu'à un réservoir R placé au-dessus du sol à une hauteur moindre que la distance du réservoir S à la nappe P située en

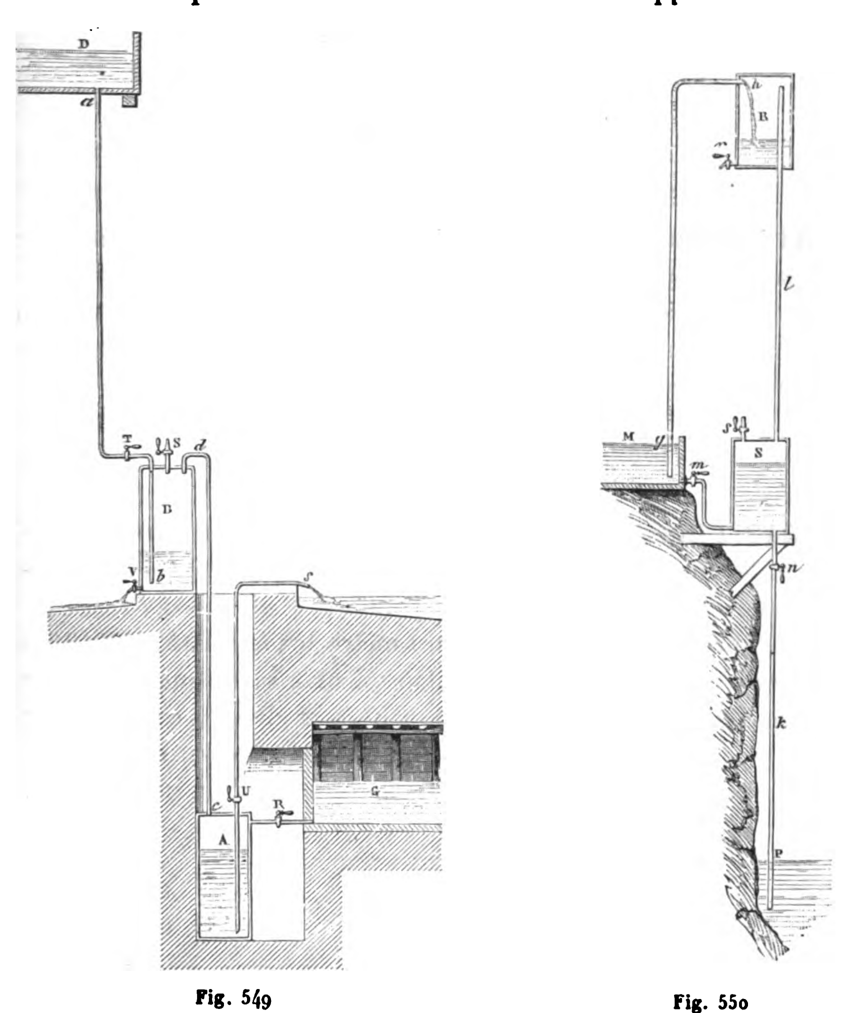


Fig. 549

Fig. 550

contre-bas. Seulement il est manifeste que l'on ne peut pas ainsi élever l'eau à plus de 10 mètres, tandis que la machine de Schemnitz permet d'extraire l'eau d'une profondeur quelconque, à la seule condition de disposer d'une chute de hauteur supérieure.

CHAPITRE III

DIFFUSION

312. Diffusion. — On désigne sous le nom de diffusion, pour les gaz de même que pour les liquides, le phénomène de pénétration réciproque que présentent deux gaz mis en contact, soit directement comme dans l'expérience de Berthollet (296), soit par l'intermédiaire d'un diaphragme poreux ou perméable.

I. — DIFFUSION SANS DIAPHRAGME.

313. Diffusion simple. — La diffusion simple, dont le terme est le mélange parfait, régi par la loi de Dalton, a été étudiée expérimentalement par M. Loschmidt [1].

Un tube de verre AB, d'environ 1 mètre de long et 26 millimètres de large, est partagé perpendiculairement à sa longueur par une mince cloison métallique que l'on peut faire glisser à coulisse entre deux plaques de glace, percées d'un trou égal à l'ouverture du tube.

La cloison étant en place, et les deux moitiés du tube isolées,

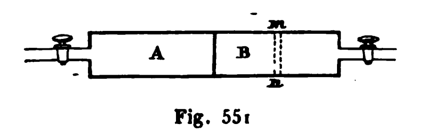


Fig. 551

on introduit dans chacune un gaz distinct, à la pression atmosphérique; on ferme les robinets d'arrivée des gaz, et on ouvre la cloison. Une demi-heure ou une heure après, l'appareil ayant été tout

[1] Loschmidt, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.*, LXI, 367 et LXII, 468; 1870.

ce temps maintenu à une température rigoureusement constante, on ferme la cloison, et on procède à l'analyse du mélange gazeux contenu dans chaque moitié du tube.

Soient, à l'époque t, p_1 la pression du gaz 1 dans la tranche mn, située à la distance z de l'extrémité du tube, et p_2 la pression du gaz 2 dans la même tranche, on a constamment

$$p_1+p_2=p,$$

p étant la pression initiale commune des deux gaz. Si l'on compare encore ici la diffusion au transport de la chaleur par conductibilité, la quantité du gaz 1, qui traverse l'unité de surface de la face gauche de la tranche mn pendant le temps dt, aura pour expression (247)

$$-k\frac{dp_1}{dz}dt,$$

le coefficient de diffusibilité k étant défini : la quantité (en centimètres cubes) du gaz 1 qui, à l'état stationnaire, traverse en 1ˢ une surface de 1^{cq} dans le gaz 2, quand dans l'espace de 1^{cm} la pression du premier gaz décroît de 1 à 0, tandis que celle du deuxième croît de 0 à 1, la température étant zéro.

Le flux gazeux à travers l'unité de surface de la face droite, pendant le même temps dt, est

$$k\left(\frac{dp_1}{dz}+\frac{d^2p_1}{dz^2}dz\right)dt.$$

La différence des deux flux représente la quantité du gaz 1 dont la tranche considérée s'est accrue pendant le temps dt. Mais cette quantité, déterminant dans le volume dz un accroissement $\frac{dp_1}{dt}dt$ de la pression p_1, peut se représenter par $dz\frac{dp_1}{dt}dt$. On a donc

$$\frac{dp_1}{dt}=k\frac{d^2p_1}{dz^2}.$$

Cette équation est identique à celle qui règle l'état variable des températures dans un milieu homogène dont les deux faces sont maintenues à une température constante, comme nous le verrons

plus loin. On peut donc appliquer au cas actuel les conclusions obtenues pour cet état variable. Après un temps t suffisamment long, la série qui représente la pression p_1 à une époque quelconque peut être réduite à son premier terme, et le rapport de la différence D des deux quantités du gaz 1 contenues en A et B à leur somme S, a pour expression

$$\frac{D}{S} = \frac{8}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2 K}{L^2} t},$$

L étant la longueur totale du tube.

M. Loschmidt a trouvé ainsi, en unités C.G.S. :

		k	$k\sqrt{d_1 d_2}$
Acide carbonique —	Hydrogène.	0,558	0,182
»	Air	0,142	0,176
»	Oxygène.	0,141	0,183
»	Oxyde de carbone .	0,140	0,171
»	Protoxyde d'azote .	0,098	0,150
Oxygène —	Hydrogène	0,722	0,199
»	Oxyde de carbone .	0,180	0,186
Oxyde de carbone —	Hydrogène	0,642	0,167

Ces coefficients k sont sensiblement en raison inverse des racines carrées des produits des poids spécifiques, comme le montre la dernière colonne où l'on a mis les produits $k\sqrt{d_1 d_2}$, les densités d_1, d_2 des deux gaz étant prises par rapport à l'air.

La diffusion s'accélère avec la température. Ainsi, pour l'acide carbonique se diffusant dans l'air, k est 0,1234 à — 21° et 0,1684 à + 18.

M. Stefan (¹) a donné les formules relatives à la diffusion de trois gaz, et M. Wretschko (²) les a vérifiées expérimentalement.

Les mêmes lois s'appliquent à la diffusion des vapeurs. M. Merget (³), au moyen d'un papier à l'azotate d'argent ammoniacal, a montré la diffusibilité de la vapeur de mercure à la température

(¹) Stefan, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.*, LXIII, 63; 1871.
(²) Wretschko, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.*, LXII, 575; 1870.
(³) Merget, *Ann. de chim. et de phys.* (4), XXV, 121; 1872.

ordinaire; dans une vaste pièce on trouve, depuis le plancher jusqu'au plafond, de la vapeur provenant d'une cuve à mercure de dimensions ordinaires.

II. — DIFFUSION AVEC DIAPHRAGME.

314. Différents modes de diffusion avec diaphragme. — La diffusion avec diaphragme a surtout attiré l'attention des physiciens. On doit en particulier à Graham [1] une étude détaillée de la question. Il a employé différentes sortes de diaphragmes; et dans chaque cas, pour découvrir à quelle loi obéit le phénomène, il l'a réduit d'abord au passage d'un seul gaz sous pression constante à travers un diaphragme de l'autre côté duquel le vide était constamment entretenu au moyen d'une pompe à gaz. La loi établie, on en déduit aisément les diverses circonstances du phénomène normal où chacun des deux gaz en rapport se diffuse dans l'autre.

Nous distinguerons quatre modes de diffusion avec diaphragme.

A. — EFFUSION.

315. Effusion. — *Loi du phénomène.* — Le diaphragme ou septum est une lame mince de platine, percée d'un trou extrêmement étroit, que l'on a pratiqué à l'aide d'une fine pointe d'aiguille. Le gaz pénètre dans le vide suivant la règle de Torricelli [2]: chaque gaz passe avec la vitesse que posséderait un corps pesant tombé de la limite d'une atmosphère, dont la densité serait partout la même qu'à sa base, et qui aurait la hauteur convenable pour produire

(1) Graham, *Edinburg. Phil. Trans.*, XII; 1834; et *Phil. Trans.*; 1846-1863.

(2) La règle de Torricelli peut en effet être étendue à l'écoulement d'un gaz sous faible excès de pression. Le phénomène ressemble alors beaucoup à celui que présentent les liquides : contraction de la veine, nœuds et ventres, état vibratoire du jet, nappes produites par le choc de la veine contre un disque solide ou contre une autre veine, toutes ces circonstances se retrouvent dans les gaz, rendus visibles par leur mélange avec de la poudre de lycopode (Savart) ou de la fumée de tabac (Sondhaus). La fumée qui sort d'une cheminée offre parfois ces apparences très nettes. Mais, sous les fortes pressions, l'écoulement des gaz ne saurait plus être assimilé à celui des liquides : le principe de Torricelli cesse de s'appliquer. Les phénomènes thermiques prennent alors une telle importance que l'examen de la question doit être renvoyé à l'étude de la chaleur.

précisément la pression supportée par le gaz au niveau de l'orifice. Cette hauteur serait en raison inverse de la densité.

Donc, *la vitesse du passage de chaque gaz sera en raison inverse de la racine carrée de sa densité.*

Telle est la loi du phénomène que Graham appelle *effusion*. L'expérience vérifie complètement ces conclusions qui s'appliquent également quand le gaz considéré s'écoule sous excès de pression dans un espace illimité contenant un gaz quelconque. Le principe de Torricelli gouverne toujours le phénomène ; et, toutes choses égales d'ailleurs, la vitesse d'écoulement est encore inversement proportionnelle à la racine carrée de la densité du gaz qui s'écoule.

Appareil de M. Bunsen pour mesurer le poids spécifique d'un gaz. —

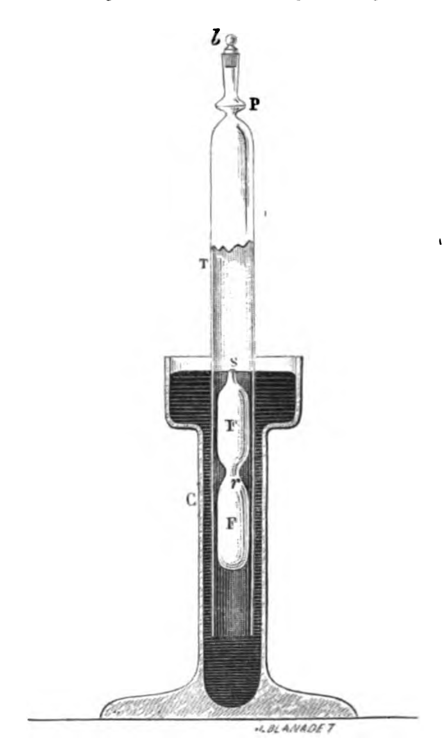


Fig. 552

M. Bunsen (1) a construit sur ce principe un appareil très ingénieux pour déterminer le poids spécifique d'un gaz. Le gaz à expérimenter

(1) Bunsen, *loc. cit.* (trad. franç.), 131.

est introduit dans un tube de verre T, reposant sur une cuvette profonde C. Ce tube est étranglé à sa partie supérieure, et fermé par une mince plaque de platine P percée d'un trou très fin ; au-dessus est un petit tube de verre dans lequel s'engage un bouchon en verre *b*, permettant de clore complètement l'appareil. Le bouchon *b* étant en place, on enfonce le tube T dans le mercure jusqu'à ce que la pointe supérieure *s* d'un flotteur en verre FF, enfermé dans le tube, soit amenée juste au niveau du mercure extérieur dans la cuvette C. On établit l'affleurement exact à l'aide d'une lunette située à distance, et on fixe le tube T dans cette position. On enlève alors le bouchon *b*, le gaz s'échappe par l'orifice étroit, et on note le temps nécessaire pour qu'un repère *r*, marqué sur le flotteur, arrive au niveau du mercure dans la cuvette C. On refait la même expérience avec l'air. Le rapport des carrés des temps employés par des volumes égaux de gaz et d'air pour s'écouler sous les mêmes pressions donne la densité du gaz par rapport à l'air. Ainsi, M. Bunsen trouve pour le temps que le flotteur met à s'élever de *sr* :

Gaz de la pile. 2 vol. hydrogène, 1 vol. oxygène.	Air atmosphérique.
$75^s,4$	$117^s,9$
75 ,5	117
75 ,6	111 ,9
75 ,9	117 ,6
75 ,6	117 ,6

d'où, pour la densité ρ du gaz de la pile,

$$\rho = \frac{(75.6)^2}{(117,6)^2} = 0,413.$$

La densité calculée d'après les densités connues de l'hydrogène et de l'oxygène est 0,415.

La figure 553 montre une autre forme perfectionnée du même appareil. Le flotteur très léger, en verre, *b b*, porte deux repères, β et β_2, surmontés le premier d'un petit bouton blanc, le second d'un trait β_1 servant à prévenir du prochain passage du repère voisin.

Le tube *aa* est enfoncé dans la cuve à mercure A jusqu'au trait γ. On ouvre le robinet *c*, le gaz s'échappe par l'orifice *e*, et le flotteur,

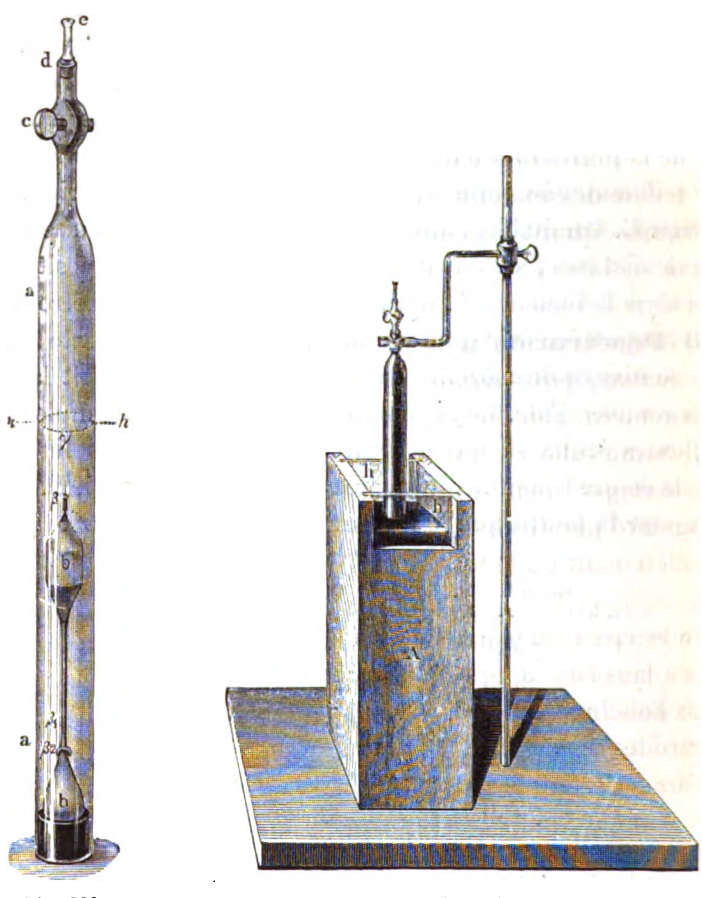


Fig. 553

Fig. 554

complètement caché d'abord, présente bientôt son bouton supérieur à la lunette au moyen de laquelle on vise au niveau *hh* du mercure dans la cuvette. On note l'époque du passage du repère β, puis celle du passage du repère β_2. On opère de même avec l'air, et l'on a tout ce qu'il faut pour calculer la densité du gaz.

C'est par cette méthode que M. Soret [1] a pu déterminer la

[1] Soret, *Ann. de chim. et de phys.*, (4), XIII, 257; 1868.

lensité de l'ozone, qu'il trouva sensiblement égale à une fois et demie celle de l'oxygène.

B. — TRANSPIRATION.

316. Expériences de Graham sur la transpiration. — Si, au lieu d'une ouverture pratiquée en mince paroi, on a une ouverture percée dans une plaque d'une certaine épaisseur, la loi de l'effusion éprouve des perturbations ; mais, lorsque la longueur du tube capillaire par lequel s'échappe le gaz dépasse 4000 fois son diamètre, on retrouve de nouveaux rapports constants entre les vitesses d'écoulement des divers gaz. On a donc affaire à un phénomène régulier, que Graham nomme la *transpiration*. Les vitesses relatives de la transpiration sont entièrement indépendantes de la nature du tube ou des tubes capillaires par où elle se produit, ce qui indique que le gaz coule réellement dans une gaîne gazeuse adhérente au tube, et que c'est son frottement contre cette gaîne, c'est-à-dire contre lui-même, qui régit le phénomène. La transpiration s'effectue d'ailleurs également soit vers le vide, soit vers un espace contenant déjà un gaz quelconque, pourvu qu'un excès de pression suffisant provoque le passage du gaz soumis à l'expérience à travers les tubes capillaires du septum.

En désignant par 1 la vitesse de transpiration de l'oxygène, on a pour les différents gaz :

Gaz.	Vitesses relatives de transpiration.	Temps nécessaire à la transpiration d'un même volume.
Oxygène	1	1
Azote . . . . . . / Oxyde de carbone	1,150	0,87
Acide carbonique	1,376	0,72
Chlore.	1,500	0,67
Gaz des marais. .	1,815	0,55
Gaz oléfiant . . . / Ammoniaque. . . / Cyanogène	2	0,50
Hydrogène. . . .	2,260	0,44

C. — DIFFUSION.

317. Diffusion proprement dite à travers un diaphragme. — *Expériences de Graham.* — Si les tubes capillaires deviennent trop étroits, il ne peut plus se produire d'écoulement sensible du gaz : mais un nouveau phénomène apparaît, la diffusion proprement dite. On l'observe, par exemple, avec une mince plaque de graphite artificiellement comprimé, tel qu'on l'emploie pour la fabrication des crayons ; et la loi du passage, entièrement différente de celle qui règle la transpiration, se retrouve la même que pour l'effusion, bien que les deux phénomènes soient complètement distincts [1], puisque l'un porte sur la masse du gaz, l'autre sur ses molécules isolées, et que la vitesse absolue dans le premier est plusieurs milliers de fois aussi grande que dans le second. En mesurant encore les temps nécessaires au passage d'un même volume de gaz dans le vide à travers le graphite, Graham a trouvé les nombres suivants, dont nous rapprochons les racines carrées des densités :

Gaz.	Temps du passage d'un même volume de gaz.	Racine carrée de la densité.
Oxygène.	1	1
Air	0,9501	0,9507
Acide carbonique	1,1860	1,1760
Hydrogène. . . .	0,2505	0,2502

La loi est manifeste :

Les vitesses de passage des différents gaz à travers une cloison poreuse sont en raison inverse des racines carrées des densités.

Le graphite de Graham peut être remplacé par du biscuit de porcelaine dense, qui donnera des résultats presque aussi nets [2].

(1) Au lieu d'un écoulement du fluide en masse à travers des espaces capillaires, c'est « un tamisage à travers une sorte de crible qui ne laisse passer que les molécules individuelles », suivant l'expression de Graham.

(2) La diffusion à travers un tampon d'asbeste a permis à M. Pebal de séparer partiellement l'ammoniaque de l'acide chlorhydrique dans la vapeur de chlorhy-

Mais la plupart des autres corps poreux, plâtre de Paris, stuc, terre cuite, etc., présentent la superposition des deux sortes de phénomènes : transpiration encore sensible, et diffusion. Ainsi, M. Bunsen trouve pour la vitesse d'écoulement de l'oxygène à travers un tampon de plâtre, comparée à celle de l'hydrogène, le rapport 1 : 2,73 au lieu du rapport théorique 1 : 3,995. A travers une plaque de stuc, Graham trouve pour les vitesses relatives d'écoulement de l'air et de l'hydrogène 1 : 2,892 au lieu de 1 : 3,80.

Diffusiomètre. — Pour toutes ces mesures on peut parfaitement opérer sous un excès de pression beaucoup moindre qu'une atmosphère. C'est ce que fit M. Bunsen avec son *diffusiomètre.* Cet appareil consiste en un tube gradué *d*, fermé par un tampon poreux *b* (en plâtre), et surmonté d'un ajutage C fixé par le caoutchouc D [1]. Au moyen du tube *ei* on amène le gaz au-dessus du tampon *b*, qu'un bouchon en verre *o*, commandé par la tige *m*, permet d'ailleurs au besoin de soustraire à toute action extérieure. On introduit dans le tube *d*, reposant sur le mercure, une certaine quantité du gaz à expérimenter, on soulève le tube de manière à produire intérieurement une diminution de pression. Faisant alors passer en C un courant du même gaz qui remplit le tube, et tirant graduellement celui-ci (par un mécanisme convenable), de façon à ce que la hauteur du mercure y reste constante, on note le temps nécessaire au passage de deux divisions successives du tube devant un même repère. Si l'on opère ensuite pareillement sur un autre gaz, on aura les temps qu'exige la diffusion d'un même volume des deux gaz sous la même pression ; et on retrouvera les faits rapportés plus haut.

Il n'est nullement indispensable pour la diffusion qu'il y ait excès de pression du côté du gaz considéré. Ainsi, le fait signalé il y a

drate d'ammoniaque. De même, en employant un simple tube de verre effilé, MM. Wanklyn et Robinson ont réussi à séparer l'eau et l'acide anhydre dans la vapeur de l'acide sulfurique ordinaire, le chlore et le trichlorure dans la vapeur du pentachlorure de phosphore. Ces expériences ont été le point de départ de recherches et de discussions qui ne sauraient trouver place ici (Voir H. Sainte-Claire Deville, Troost et Hautefeuille, et Würtz, C. R, *passim;* 1863-81).

[1] Un tube latéral *qp*, pincé en *q*, sert à faire les prises de gaz à analyser.

déjà longtemps par Döbereiner (1) d'une éprouvette pleine d'hydrogène laissant échapper son gaz par une fêlure imperceptible

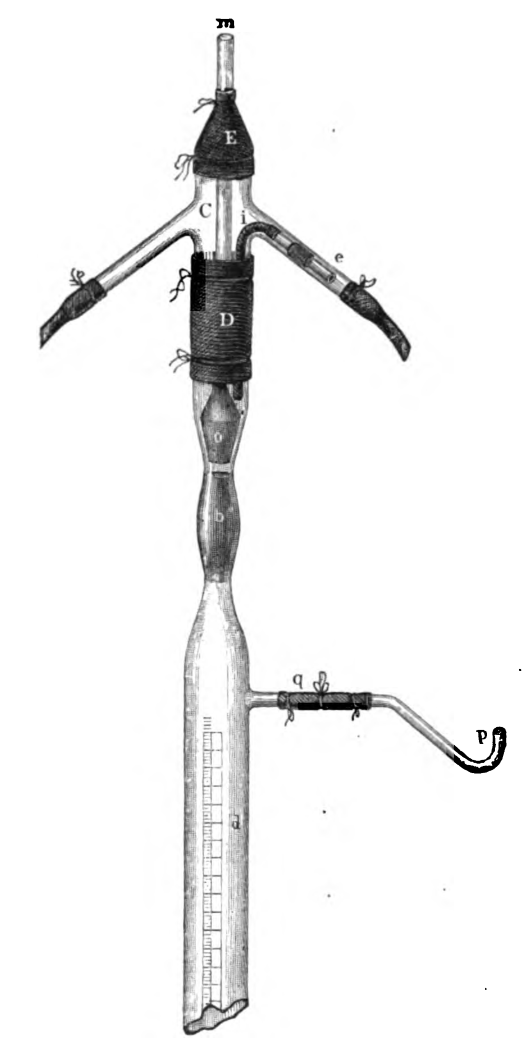


Fig. 555

tandis que l'eau s'élève à l'intérieur, nous montre que la diffusion peut tout aussi bien se produire contre la direction de la pression

(1) Dœbereiner, *Ann. de chim. et de phys.*, XXIV, 332; 1823.

la plus forte que dans le sens de cette pression ([1]). L'indifférence à la pression est un des caractères de la diffusion, ainsi que de la pénétration (319), et distingue ces phénomènes de l'effusion et de la transpiration, qui n'ont lieu que dans le sens de la pression prépondérante.

Dans l'observation de Döbereiner il y avait en réalité diffusion réciproque de l'hydrogène dans l'air contre la pression et de l'air dans l'hydrogène suivant la pression, comme le montra Magnus ([2]). La pénétration réciproque de deux gaz par diffusion se fait suivant les vitesses d'expansion respectives des deux gaz. Ainsi, de l'air et de l'hydrogène étant séparés l'un de l'autre par une lame de graphite comprimé, pour chaque volume d'air qui passe du côté occupé par l'hydrogène, 3,8 volumes d'hydrogène passent du côté occupé par l'air. C'est ce que l'on observera aisément au moyen du diffusiomètre, en remplissant le tube *d* d'hydrogène, et en amenant en C un courant d'air continu, tandis que l'on maintiendra le gaz intérieur à une pression constante, la même si l'on veut que celle du gaz en C.

([1]) On peut faire l'expérience avec un tube de Graham A, fermé en haut par une plaque de plombagine *aa*. Le tube étant rempli d'hydrogène et placé sur la

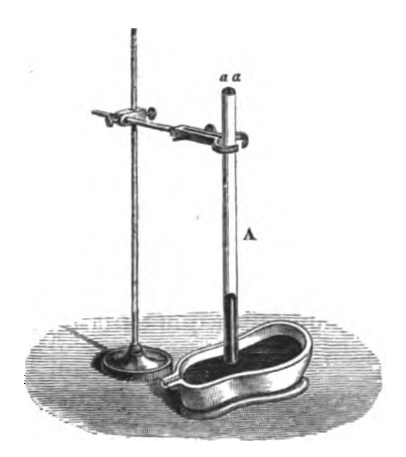


Fig. 556

cuve à mercure, on voit le liquide s'y élever rapidement au-dessus du niveau dans la cuve.

([2]) Magnus, *Pogg. Ann.*, X, 153 ; 1827.

Atmolyse. — Les gaz mélangés se séparent aussi les uns des autres selon leurs vitesses de diffusion respectives.

Cette séparation, caractéristique encore de la diffusion et de la pénétration, est nettement démontrée par le « tube atmolyseur » de Graham. C'est un long tuyau de pipe, placé dans l'axe d'un tube de

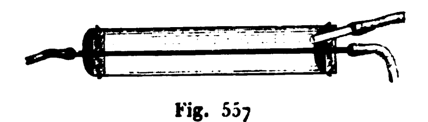


Fig. 557

verre où l'on maintient le vide, et traversé par un courant d'air : l'azote se diffusant plus vite que l'oxygène, l'air à sa sortie du tuyau contient 24,5 pour 100 d'oxygène au lieu des 21 pour 100 qu'il contenait à son entrée dans l'appareil.

Notons encore, d'après M. Dufour, que, dans le passage d'un gaz à travers une paroi poreuse, il y a élévation de température du côté de la diffusion entrante, et abaissement de température du côté où le gaz ressort de la paroi. Par suite, quand deux gaz distincts, l'hydrogène et l'air, par exemple, traversent en sens inverse une paroi poreuse avec des vitesses différentes, l'effet dû au gaz qui diffuse le plus devant nécessairement l'emporter, il y aura abaissement de température à la face de sortie de l'hydrogène, et élévation de température du côté où s'échappe l'air. Un thermomètre placé dans le vase poreux de la figure 558 donna à M. Dufour une variation de $+0°{,}37$ et dans le vase de la figure 559 une variation de $-0°{,}48$ ([1]).

Appareils de M. Jamin et de H. Sainte-Claire Deville. — Si les vases de terre ne peuvent pas remplacer les plaques de graphite pour les mesures, on peut les utiliser avantageusement comme appareils de démonstration, ainsi que l'a fait M. Jamin ([2]).

A un vase de pile on adapte, avec un bouchon fermant bien, un long tube de verre que l'on immerge dans l'eau par son extrémité inférieure, et au moyen d'un deuxième tube muni d'un

([1]) Inversement, si l'on maintient à des températures différentes les deux faces extrêmes d'un diaphragme poreux installé dans un tube, il se produit dans le gaz que contient le tube un courant permanent dirigé dans le sens de la face froide à la face chaude du diaphragme (*thermodiffusion* de Feddersen).

([2]) Jamin, C. R., XLIII, 234; 1856.

robinet on fait passer dans le vase un courant d'hydrogène sortant par le long tube. Quand on juge que l'air est entièrement expulsé,

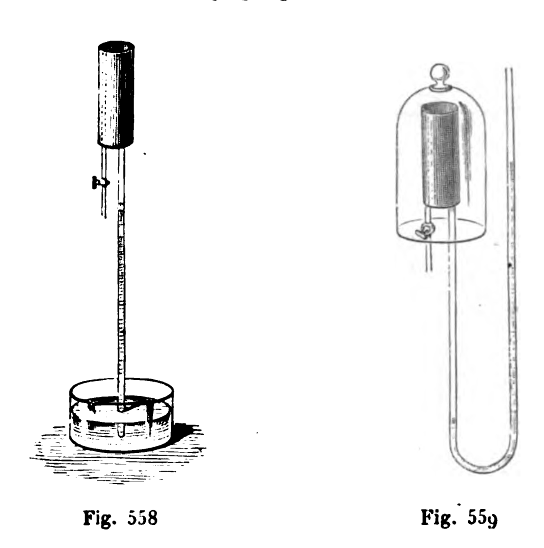


Fig. 558 Fig. 559

on ferme le robinet. On voit aussitôt le liquide monter dans le tube et bientôt y atteindre une grande hauteur, comme si l'on faisait le vide dans le vase.

Un vase semblablement disposé, mais dont le long tube est redressé verticalement de manière à constituer un manomètre contenant de l'eau, est rempli d'air à la pression atmosphérique et fermé. Si l'on vient à le recouvrir d'une cloche préalablement remplie d'hydrogène, l'eau du manomètre est refoulée si rapidement que le plus souvent elle est en partie projetée hors du tube.

H. Sainte-Claire Deville (1) a imaginé un appareil qui permet de montrer sous une forme frappante la rapidité de la diffusion de l'hydrogène dans l'acide carbonique. Un tube de terre poreuse *ac* est entouré d'un tube de verre plus large. Dans le tube de terre on fait passer un courant d'hydrogène que l'on enflamme à l'extrémité d'un tube de dégagement fixé sur le tube de terre, en *a*. Puis on dirige dans l'espace annulaire compris entre les deux tubes un courant

(1) H. Sainte-Claire Deville, C. R., LII, 524; 1861.

d'acide carbonique sortant par un tube de dégagement spécial *b*. Aussitôt on voit baisser jusqu'à extinction la flamme qui brillait à

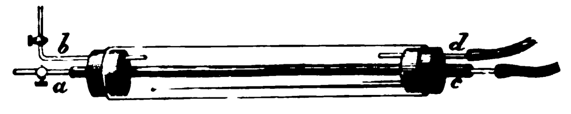


Fig. 560

l'extrémité du tube de terre, tandis que l'on peut allumer le gaz qui sort de l'espace annulaire et le voir brûler en une longue flamme, attestant que les deux gaz ont changé presque instantanément de place.

Dans l'air même, l'échange s'effectue très promptement : un tube de terre poreuse, placé dans l'air et traversé par un courant assez rapide d'hydrogène, ne donne à son extrémité que de l'air pur.

On voit donc la nécessité, déjà indiquée par Priestley [1], de n'employer en chimie que des tubes et cornues vernissés.

Expériences de M. Merget. — Sur une plaque de cuivre amalgamé, plaçons, à l'exemple de M. Merget, plusieurs doubles de papier buvard, puis une coupe de quelques centimètres d'épaisseur pratiquée dans un tronc d'arbre, et enfin une feuille de papier imprégnée de chlorure de platine ; mettons le tout en presse. Au bout d'un certain temps, le papier présentera une épreuve très nette de la coupe, épreuve qu'il suffira de laver à l'eau ordinaire pour la fixer d'une manière absolue [2]. Par cette expérience, M. Merget a non seulement fait une démonstration convaincante de la diffusibilité de la vapeur de mercure, mais il a encore fourni aux botanistes un procédé précieux pour obtenir des empreintes de tiges, de feuilles, etc.

Avertisseur Ansell. — L'avertisseur Ansell est une application ingénieuse de la diffusion. Une plaque de terre poreuse ferme à sa partie supérieure une coupe en fonte, dont le pied recourbé

(1) Priestley, *Experiments and observations on differents kinds of air*, III, 29; 1777.

(2) M. Merget a été conduit ainsi à la fabrication de photographies inaltérables au platine, à l'iridium, etc.

en siphon se redresse verticalement et porte un tube de verre logeant une pointe de platine. Du mercure est enfermé dans

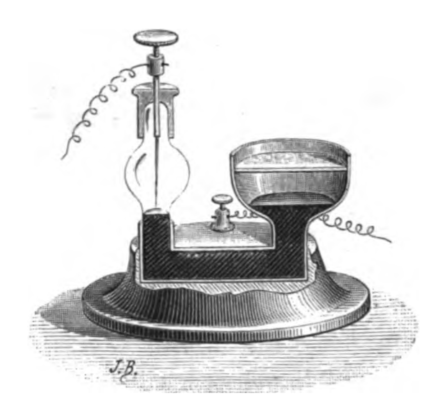


Fig. 561

le siphon et s'élève presque au contact de la pointe de platine. Qu'une fuite de gaz d'éclairage se produise dans le voisinage, et le gaz plus léger que l'air va aussitôt refouler le mercure de la coupe, le contact s'établira dans l'autre branche, et si ce contact ferme le circuit d'une sonnerie électrique, on sera aussitôt averti de la fuite.

D. — PÉNÉTRATION.

318. Pénétration à travers le caoutchouc. — *Observation de Mitchell.* — En 1831, le docteur Mitchell (¹), de Philadelphie, découvrit dans certains gaz la propriété de passer au travers d'une lame mince de caoutchouc, laquelle est cependant absolument dénuée de pores visibles.

Expériences de Draper et de Graham. — Draper (²) s'empara du fait, et Graham y appliqua sa méthode générale d'expérimentation. En disposant au-dessus d'un espace vide une lame de caoutchouc (convenablement soutenue par un disque en terre très poreuse dont l'action individuelle était tout à fait négligeable),

(¹) MITCHELL, *Philadelphia Journal of medical sciences*, XIII, 36; 1831.
(²) DRAPER, *Franklin Institut Journal*, XVII et XVIII, *passim*; 1836.

et en retirant au fur et à mesure le gaz qui passait à travers le caoutchouc, il trouva que les divers gaz traversaient le caoutchouc avec des vitesses relatives différentes :

Gaz.	Vitesses relatives de pénétration.	Temps nécessaire à la pénétration d'un même volume de gaz.
Azote	1	13,585
Oxyde de carbone.	1,113	12,203
Air atmosphérique.	1,149	11,850
Gaz des marais. . .	2,148	6,326
Oxygène.	2,556	5,316
Hydrogène	5,500	2,470
Acide carbonique .	13,585	1

Cette *pénétration* qui s'effectue selon un coefficient spécial, distinct de ceux qui se rapportent aux cas précédents, participe de plusieurs des caractères de la diffusion proprement dite. Comme la diffusion, elle modifie la composition des mélanges gazeux soumis à son action, car chacun des gaz constituant passe avec la vitesse qui lui est propre. Ainsi le mélange d'oxygène et d'azote qui forme l'air atmosphérique, traité par l'appareil à vide de Graham, présente, après son passage à travers la lame de caoutchouc, la composition suivante :

Oxygène	$21 \times 2,55 = 53,55$	ou	40,4
Azote	$79 \times 1 \quad = 79,00$		59,6
			100,0

La proportion d'oxygène dans l'air transmis s'élève donc à 40 p. 100. On voit en effet cet air enflammer un éclat de bois incandescent, et une analyse précise confirme la composition indiquée ci-dessus. Inversement, de la composition de l'air qui a pénétré dans un espace vide à travers une lame de caoutchouc on peut déduire les vitesses de pénétration relatives de l'oxygène et de l'azote dans le caoutchouc. On fait facilement l'expérience en attachant à une pompe de Sprengel un sac

le soie revêtue de caoutchouc noir, contenant un morceau de lanelle pour empêcher le collement des parois. De l'extrémité nférieure de la trompe sort un courant continu d'air suroxygéné.

La pénétration se produit très bien sans qu'il y ait le vide de l'autre côté du septum en caoutchouc. Prenons un de ces petits ballons imaginés par Mitchell et devenus si communs aujourd'hui, remplissons-le d'air, et plongeons-le dans une atmosphère d'hydrogène après l'avoir entouré suivant un de ses grands cercles d'un fil inextensible. Nous verrons aussitôt le caoutchouc faire hernie de part et d'autre du fil, et le ballon se distendre peu à peu jusqu'à éclater. Tout le monde sait que le phénomène inverse se manifeste avec les ballons pleins d'hydrogène qui servent de jouets aux enfants : ces ballons se dégonflent très rapidement dans l'air en perdant leur gaz.

319. Pénétration à travers les liquides. — *Expérience de Marianini.* — Les phénomènes que nous venons de rappeler ressemblent beaucoup à ceux qu'a décrits Marianini [1] : on laisse tomber une bulle de savon pleine d'air dans un vase aux deux tiers

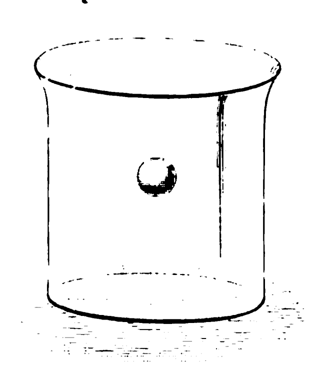


Fig. 562

rempli d'acide carbonique. La bulle flotte d'abord à la surface de l'acide carbonique, et ce gaz se dissout à la surface extérieure de la bulle ; une fois dissous, il se diffuse comme un liquide dans l'enveloppe liquide de la bulle et arrive à la surface intérieure, où il

[1] Marianini, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), IX, 382 ; 1843.

s'évapore en augmentant à la fois le volume et le poids de la bulle. Celle-ci s'enfonce graduellement et en même temps se gonfle de plus en plus, présentant la série des colorations d'une lame qui s'amincit; elle se distend enfin jusqu'à éclater.

Recherches de M. Exner. — M. Exner [1] a essayé de déterminer les lois d'après lesquelles un gaz traverse ainsi une mince paroi liquide.

A cet effet, il prenait un long tube de verre, de 8 à 10 millimètres de diamètre, gradué sur toute sa longueur. Ce tube, ouvert en A et muni en B d'un robinet, était mouillé intérieurement, puis plongé par l'extrémité A dans de l'eau de savon : une lamelle se formait en A, et on l'amenait à la division n_0 en aspirant par l'extrémité C. On fermait alors le robinet B, et on mettait l'extrémité A en communication avec un récipient contenant le gaz à expérimenter, sous la pression atmosphérique. La lamelle ne tardait pas à se déplacer, et, si le gaz employé traversait la membrane plus facilement que l'air, la membrane marchait vers l'extrémité A. On attendait qu'elle eût pris une position fixe n_1. Alors un volume d'air n_0 s'était échangé contre un volume de gaz n_1. Par conséquent, les quantités de gaz et d'air qui s'échangent dans un même temps à travers une lamelle liquide sont dans le rapport

Fig. 563

$$\alpha = \frac{n_1}{n_0}.$$

Sur les gaz qui pénètrent rapidement une lamelle liquide, on ne pouvait plus opérer ainsi, la lamelle étant brusquement projetée et déchirée. On est revenu alors à la bulle de savon de Marianini. La bulle, gonflée avec le gaz à étudier, se rapetissait dans l'air : une mesure rapide du diamètre au début et une autre à la fin, donnaient approximativement α.

Le tableau suivant renferme les résultats des expériences. On y a ajouté la densité d du gaz et son coefficient de solubi-

[1] EXNER, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.*, LXX, 465; 1874.

lité β à la température de l'expérience (laquelle a varié de 13° à 18°) :

	d	α	β
Azote	0,97	0,86	0,015
Air	1,00	1,00	0,016
Oxygène	1,10	1,95	0,030
Hydrogène. . . .	0,07	3,77	0,019
Acide carbonique.	1,52	47,1	1,002
Ammoniaque. . .	0,59	46000	700

De ces mesures M. Exner conclut que la quantité de gaz qui traverse une membrane liquide est sensiblement proportionnelle au coefficient de solubilité du gaz dans le liquide, et en raison inverse de la racine carrée de la densité du gaz, comme si la diffusion du gaz dissous suivait la loi de Graham. La formule

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}\sqrt{\frac{d'}{d}}$$

représente en effet suffisamment les observations.

L'échange des gaz peut s'opérer à la longue au travers de masses liquides même considérables. C'est ainsi qu'une cloche pleine d'hydrogène, placée sur la cuve à eau, perdra en quelques jours tout son gaz et ne contiendra plus que de l'air.

Expériences de M. von Wroblewski. — Quand un gaz est mis en présence d'un liquide, il se produit donc une véritable diffusion du gaz dans le liquide. Si l'on se borne aux premiers instants du phénomène, la quantité Q de gaz absorbée pendant un temps t est

$$Q=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta k\frac{H}{760}\sqrt{t}.$$

En d'autres termes, cette quantité est proportionnelle au coefficient de solubilité β, proportionnelle au coefficient de diffusion k, proportionnelle à la pression H, proportionnelle enfin à la racine carrée du temps que cette quantité de gaz met à se dissoudre.

Pour vérifier ces conséquences, M. von Wroblewski [1] a pris une éprouvette profonde, remplie de liquide, et l'a surmontée d'un récipient de même section, plein de gaz. Au récipient était adapté un manomètre à mercure, formé de deux branches verticales réunies en bas par un tube de caoutchouc, ce qui permettait de

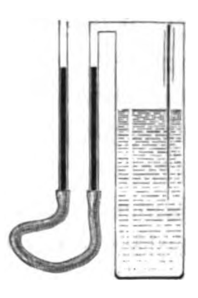


Fig. 564

déplacer la branche extérieure de manière à conserver au gaz la pression atmosphérique pendant toute l'expérience. A un instant donné, on établissait la communication entre la surface du liquide et le gaz; et, maintenant la pression constante, on suivait la diminution du volume.

La loi de la proportionnalité à la racine carrée du temps s'est vérifiée pour l'acide carbonique avec l'eau sucrée, l'eau salée, la glycérine, l'huile de colza, la gélatine, et divers colloïdes; mais elle ne s'est pas trouvée exacte avec l'eau, dans laquelle l'absorption était sensiblement proportionnelle au temps.

Dans tous les cas où la loi se vérifie, la mesure de Q permet de déterminer le produit βk, et par conséquent l'un des deux coefficients β ou k quand l'autre est connu.

La pénétration d'un gaz à travers le caoutchouc paraît consister aussi en une absorption du gaz par la lame solide, suivie d'une diffusion directe à travers le solide, et enfin d'une évaporation sur la face opposée.

M. von Wroblewski [2] a prouvé, en effet, par sa méthode dy-

(1) Von Wroblewski, *Wied. Ann.*, II, 431; 1877.

(2) Von Wroblewski, *Wied. Ann.*, VIII, 29; et *Journal de Physique*, VIII, 418; 1879.

namique : 1° que le caoutchouc absorbe les gaz conformément aux lois de Henry et de Dalton qui régissent l'absorption des gaz par les liquides; 2° que les gaz se diffusent dans le caoutchouc comme dans les autres substances absorbantes, suivant une loi analogue à celle de la conduction de la chaleur dans les solides, la constante de diffusion étant sensiblement en raison inverse de la racine carrée de la densité du gaz.

Une feuille de caoutchouc est donc entièrement assimilable à une lame liquide quant à la manière dont elle permet l'échange de deux gaz.

320. Pénétration à travers les métaux. — *Expériences de H. Sainte-Claire Deville et de M. Troost.* — Le phénomène le plus remarquable en ce genre est celui qui a été découvert par H. Sainte-Claire Deville et M. Troost [1], et qui présente de même le rapport le plus intime avec les faits d'occlusion (301) étudiés plus tard par Graham : la pénétration de certains gaz, et plus particulièrement de l'hydrogène à travers les métaux chauffés au rouge.

Un tube épais en platine fondu, très homogène et sans soudure, est placé dans l'axe d'un tube de porcelaine, et maintenu au moyen de deux bouchons qui ferment exactement l'espace annulaire compris entre les deux tubes. Dans le tube de platine circule un courant d'air sec ; dans l'espace annulaire on a entassé des fragments de porcelaine et l'on fait passer un courant d'hydrogène sec. Le tout est mis à l'intérieur d'un bon fourneau. Au début de l'expérience, les tubes étant encore froids, l'air qui sort du tube de platine a la composition ordinaire. La température s'élevant, l'air s'appauvrit peu à peu en oxygène, et des gouttelettes d'eau se condensent dans le tube de sortie, attestant ainsi que de l'hydrogène a passé au travers du platine pour venir se combiner avec l'oxygène de l'air. Vers 1000 degrés, le tube de platine ne donne plus que de l'azote et de l'eau sous une pression considérable. L'hydrogène qui sort de l'espace annulaire est toujours pur, mais la vitesse de dégagement s'est sensiblement ralentie. Si alors on arrête l'arrivée de

[1] H. Sainte-Claire Deville et Troost, C. R., LVII, 894; 1863.

l'hydrogène, la pénétration continuant, un vide presque complet se fait dans cet espace annulaire, comme le montre l'ascension du mercure à l'intérieur du tube de dégagement. On peut remplacer l'air par de l'azote, de l'acide carbonique ou de l'oxyde de carbone, on a des résultats analogues : l'hydrogène pénètre à chaud à travers le platine, tandis que ce métal reste imperméable à l'autre gaz. Il y a donc là un phénomène d'élection en rapport avec la propriété que possède le platine de condenser l'hydrogène.

Graham (1) a observé sur le palladium des phénomènes semblables dès la température de 240°. Un tube de palladium plongé dans la flamme du gaz d'éclairage, assez peu riche en hydrogène libre, en extrait cependant la presque totalité de ce gaz à un état de pureté parfaite.

Le fer se comporte semblablement à haute température, ainsi que l'ont démontré H. Sainte-Claire Deville et M. Troost (2). Ils ont pris un tube en fer, de 3 à 4 millimètres d'épaisseur, et l'ont placé

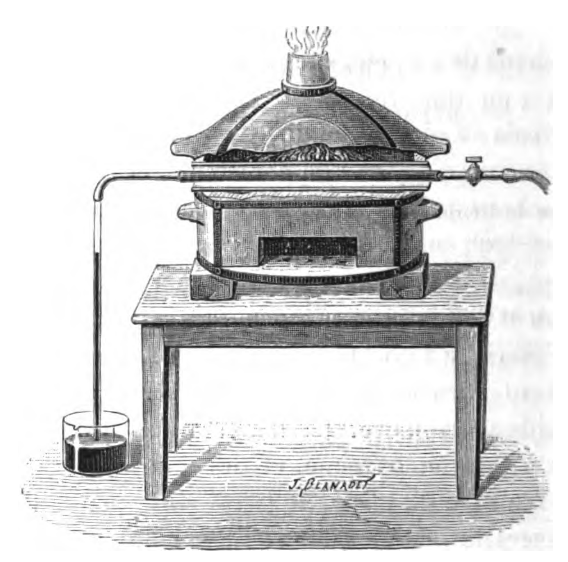


Fig. 565

dans un tube de porcelaine librement ouvert à l'air par les deux extrémités, et chauffé dans un fourneau où l'on brûlait du charbon

(1) GRAHAM, *loc. cit.*
(2) H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE et TROOST, C. R., LVII, 965; et LIX, 102; 1863-64.

de cornue soumis au vent d'un fort soufflet. Un courant d'hydrogène traversait le tube de fer et se dégageait par un long tube vertical plongeant dans le mercure. L'appareil étant porté à une température élevée, on arrête le courant d'hydrogène en fermant à la lampe le tube qui l'amène : on voit alors le mercure monter dans le tube de dégagement jusqu'à 74 centimètres, c'est-à-dire presque à la hauteur du mercure dans le baromètre. Les parois du tube de fer ont donc fait l'office d'une véritable pompe, aspirant l'hydrogène pour le refouler dans l'atmosphère extérieure.

M. Cailletet [1] a passé au laminoir un morceau de canon de fusil, jusqu'à l'aplatir complètement, puis l'a soudé aux deux bouts, de manière à constituer une sorte de boîte entièrement close qu'il a placée dans un bon feu de forge, en la séparant toutefois du charbon (de bois) par un tube de terre poreuse; il l'a vue se gonfler et reprendre sa forme primitive. En l'ouvrant sur le mercure, il a constaté qu'elle était remplie d'hydrogène. Pour mesurer la pression sous laquelle l'hydrogène s'était introduit à travers le fer, il a adapté au tube aplati un petit tube de cuivre, relié à un manomètre à air libre : il a pu alors reconnaître qu'un tube de fer de 2 millimètres d'épaisseur revenait à sa forme primitive sous un excès de pression de 34 centimètres de mercure; un tube de 24 millimètres d'épaisseur resta aplati, et l'absorption de l'hydrogène cessa au rouge sous une pression de 68 millimètres. En enlevant le manomètre, on voyait sortir du tube de cuivre, pendant tout le temps de la chauffe, un rapide courant d'hydrogène pur [2].

Enfin, H. Sainte-Claire Deville et M. Troost [3] ont encore signalé le passage de l'oxyde de carbone provenant de la combustion à travers la fonte des poêles chauffés au rouge [4]. De son côté,

[1] Cailletet, C. R., LVIII, 327 et 1057; 1864.

[2] M. Cailletet a même pu, dans des conditions spéciales, obtenir à la température ordinaire le passage de l'hydrogène à travers le fer. Une boîte plate, en tôle, fermée de toutes parts sauf en une petite ouverture munie d'un fin tube de cuivre, est plongée dans de l'eau acidulée. De l'hydrogène se forme à l'extérieur, et au bout de quelque temps une certaine quantité de ce gaz a traversé la tôle et se dégage sous pression par le tube de cuivre.

[3] H. Sainte-Claire Deville et Troost, C. R., LXVI, 83; 1868.

[4] Ce curieux phénomène de pénétration explique le malaise qu'occasionnent trop souvent les poêles de fonte. Pour éviter tout danger, il suffit de ne jamais les pousser au rouge.

Graham a constaté que le fer peut absorber à chaud environ $\frac{1}{2}$ de son volume d'hydrogène et 4,15 volumes d'oxyde de carbone. Ici donc encore se vérifie la relation entre la perméabilité d'un métal pour un gaz donné et la propriété qu'il possède d'absorber ce gaz quand la chaleur a convenablement dilaté ses espaces intermoléculaires.

CHAPITRE IV

FROTTEMENT INTÉRIEUR

321. Frottement intérieur des gaz. — Le frottement intérieur des gaz, que l'on appelle aussi leur *viscosité*, se définit exactement comme dans les liquides, et s'étudie par les mêmes procédés.

322. Écoulement par des tubes capillaires. — Quand un gaz s'écoule à travers un tube capillaire sous un excès de pression $p_0 - p_e$, p_0 et p_e étant les pressions à l'origine et à l'extrémité du tube, si l'on peut négliger les phénomènes thermiques accompagnant la détente, on a

$$Q = \frac{\pi(p_0 - p_e)}{128\eta L}\left(D^4 + 8\frac{\eta}{c}D^3\right),$$

ou

$$Q = \frac{\pi(p_0 - p_e)}{8\eta L}\left(R^4 + 4\frac{\eta}{c}R^3\right),$$

en supposant le gaz à la pression moyenne $\frac{p_0 + p_e}{2}$. Mesurée à la pression p_0, la quantité de gaz écoulé pendant l'unité de temps t sera

$$Q_0 = \frac{\pi(p_0^2 - p_e^2)}{16\eta L p_0}\left(R^4 + 4\frac{\eta}{c}R^3\right).$$

Que l'on applique cette formule aux expériences de Graham sur la transpiration, et on pourra en déduire les coefficients de frottement relatifs des divers gaz.

C'est ce qu'a fait M. O.-E. Meyer [1]. Dans les nombreuses séries de Graham, il en prend d'abord une relative à l'air s'écoulant par transpiration entre un récipient à pression p_0 constante et un espace vide ($p_1 = 0$), et il y applique la formule précédente qui devient, si l'on désigne par t le temps nécessaire à l'écoulement de la quantité Q_0,

$$Q_0 = \frac{\pi p_0 t}{16 \eta L}\left(R^4 + 4\frac{\eta}{c}R^3\right).$$

Si l'on fait passer successivement un même volume d'air à travers le même tube sous différentes pressions, p_0 et t changent seuls, et l'on doit avoir par conséquent

$$p_0 t = C^{te}.$$

Graham donne en effet

	p_0	1^{atm}	$0^{atm},75$	$0^{atm},5$
	t	$799^s,5$	1050^s	1543^s
d'où				
	$p_0 t$	799	788	772

et l'on voit qu'au degré d'exactitude des expériences, la constance du produit $p_0 t$ est vérifiée.

Considérant ensuite les expériences de Graham sur les autres gaz, M. Meyer cherche à en déduire les coefficients de frottement de ces gaz rapportés à celui de l'air pris pour unité. Soient t et t' les durées de l'écoulement d'un même volume d'air et de gaz à travers un même tube, on a, en désignant par des lettres accentuées les coefficients relatifs au gaz,

$$\frac{t'}{t} = \frac{\eta'}{1 + 4\frac{\eta'}{c'R}} : \frac{\eta}{1 + 4\frac{\eta}{cR}}.$$

Si la couche gazeuse adhérente au tube ne se déplaçait pas sensi-

(1) O.-E. Meyer, *Pogg. Ann.*, CXXVII, 253; 1866.

lement, en d'autres termes, si l'on pouvait supposer $c=\infty$, on aurait simplement

$$\frac{t'}{t}=\frac{\eta'}{\eta}.$$

Or, tel était précisément le cas dans les expériences de Graham, puisque la nature du tube s'est montrée sans influence aucune sur le phénomène. On peut donc leur appliquer la formule

$$\frac{\eta'}{\eta}=\frac{t'}{t};$$

et l'on trouve ainsi :

	$\frac{\eta'}{\eta}$
Air.	1
Oxygène	1,11
Azote.	0,98
Acide carbonique.	0,807
Hydrogène	0,486

M. Meyer [1] a lui-même fait des expériences d'après cette méthode, en mesurant exactement les constantes qui entrent dans l'expression de Q_0. Il a ainsi trouvé pour le coefficient du frottement de l'air, en unités C.G.S., $\eta=0{,}000\,168$, nombre trop faible; c'est en effet le danger des expériences faites suivant cette méthode, tandis que les expériences ayant pour but de mesurer l'influence retardatrice de l'air sur un mouvement pendulaire, sont exposées à des erreurs en sens inverse. Dans l'écoulement d'un gaz à travers un tube capillaire, il y a en effet une complication analogue à celle que l'on rencontre dans la propagation du son au milieu d'un gaz. Des phénomènes thermiques se présentent ici comme sous l'influence des vibrations sonores. Mais si l'on peut supposer le phénomène calorifique, qui accompagne la propagation du son, localisé dans la masse gazeuse même où il se produit, cette hypothèse ne saurait convenir au cas actuel, où le gaz traverse un tube extrêmement étroit, dont les parois

[1] O.-E. Meyer, *Pogg. Ann.*, CXLVIII, 1 et 203; 1873.

ne peuvent pas être regardées comme dénuées de toute conductibilité calorifique. Tout ce que l'on est donc en droit d'affirmer, c'est que les phénomènes thermiques concomitants ne peuvent qu'élever la vitesse d'écoulement, et par suite abaisser le coefficient de frottement intérieur du gaz. Le criterium auquel on reconnaîtra que ces phénomènes thermiques sont négligeables sera l'exactitude avec laquelle la loi de Poiseuille se vérifiera. En se guidant sur ce fait, MM. Meyer et Springmühl (¹) ont obtenu les nombres suivants, résultant de mesures très exactes sur l'acide carbonique et des coefficients de transpiration de Graham corrigés par Maxwell :

Oxygène................	0,000212	Chlore..................	0,000147
Air....................	190	Gaz des marais..........	120
Azote..................	184	Gaz oléfiant............	109
Acide carbonique........	160	Ammoniaque............	108
Acide chlorhydrique......	156	Hydrogène..............	093

Ces nombres se rapportent à une température moyenne d'environ 15 degrés. Ils s'accordent très bien avec ceux que l'on peut déduire des expériences antérieures de M. von Lang (²), lequel s'était servi non seulement de tubes ordinaires à section circulaire, mais aussi d'un tube à section elliptique (³).

323. Décroissance de l'amplitude des oscillations d'un pendule. — Le second procédé employé pour l'étude du frottement intérieur des gaz se rapproche davantage de la définition de ce frottement. Un disque horizontal, suspendu par son centre à un fil métallique vertical, peut osciller dans son plan. Les oscillations s'effectuent sous l'action de la force de torsion du fil, et l'on a (268)

$$\Lambda - \Lambda_0 = \frac{\pi R^4}{2Q}\sqrt{\frac{\pi}{2}\tau\eta\rho};$$

(¹) O.-E. Meyer et Springmühl, *Pogg. Ann.*, CXLVIII, 526 ; 1873.
(²) Von Lang, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.*, XIII ; 1871. Voir aussi Pulcj, *Sitzungsber. d. Wien. Akad.*, LXIX et LXX ; 1874.
(³) M. Mathieu avait précisément déjà considéré ce cas dans son étude de la loi de Poiseuille (Mathieu, *loc. cit.*).

λ et Λ_0 sont les décréments logarithmiques dans l'air et dans le vide.

M. O.-E. Meyer (1) et Maxwell (2) ont successivement appliqué cette méthode.

Elle a été suivie récemment encore par MM. Kundt et Warburg (3). Leur appareil consistait en un disque de verre extrême-

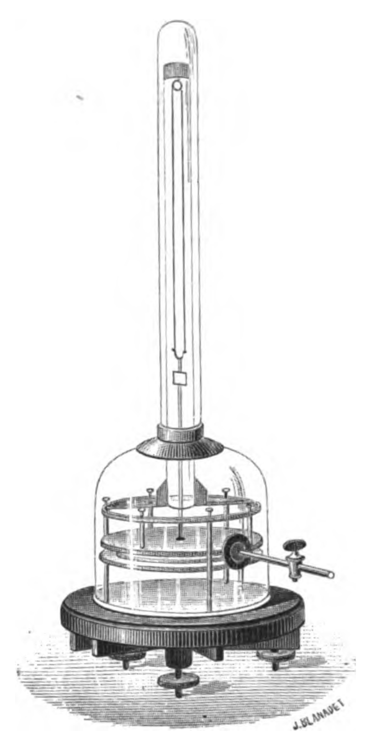


Fig. 566

ment léger, soutenu par une suspension bifilaire entre deux disques fixes, également en verre; ce disque pouvait osciller horizontalement autour de son axe; un miroir, solidaire du disque, permettait de suivre, à l'aide d'une lunette et d'une règle divisée, le décroissement de l'amplitude des oscillations. Tout l'appareil était renfermé sous une cloche que l'on remplissait de tel gaz que

(1) O.-E. Meyer, *Pogg. Ann.*, CXXV, 401; et CXLIII, 143; 1865-71.
(2) Maxwell, *Phil. Trans.*, 249; 1866.
(3) Kundt et Warburg, *Pogg. Ann.*, CLV, 337 et 525; 1875.

l'on désirait à la pression voulue, au moyen de dispositions faciles à concevoir, le seul point essentiel étant de faire tous les raccords par soudure afin d'éviter les rentrées d'air.

On a trouvé ainsi pour l'air, à 15°, $\eta = 0,000\,189$, nombre presque identique à celui qui ressort des expériences d'écoulement à travers les tubes capillaires. Les constantes pour l'hydrogène et l'acide carbonique s'accordent également bien avec les nombres résultant des expériences de transpiration dues à Graham; les coefficients de frottement obtenus pour l'acide carbonique et l'hydrogène sont en effet 0,806 et 0,488 si l'on prend le coefficient de frottement de l'air pour unité.

Un fait important se dégage de toutes ces mesures : c'est que *le frottement intérieur est indépendant de la densité du gaz*, tant du moins que l'on n'atteint pas les degrés de raréfaction extrême où des phénomènes spéciaux apparaissent. Graham, Maxwell, et M. Meyer ont successivement établi cette indépendance du coefficient de frottement et de la pression, que MM. Kundt et Warburg ont récemment vérifiée depuis 750 millimètres jusqu'à 1 millimètre.

L'expérience montre aussi que le coefficient de frottement croît avec la température : mais ici l'accord n'est plus aussi satisfaisant entre les différents observateurs. Nous reviendrons sur ce point en étudiant la théorie dynamique des gaz.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES

PHYSIQUE MOLÉCULAIRE

PRÉLIMINAIRES

LIVRE I

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA MATIÈRE

CHAPITRE I

MÉCANIQUE

I. — CINÉMATIQUE.

II. — STATIQUE.

III. — DYNAMIQUE.

A. — DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL.

B. — DYNAMIQUE DES SYSTÈMES.

IV. — UNITÉS ABSOLUES. SYSTÈME C.G.S.

CHAPITRE II

PESANTEUR

I. — CHUTE DES CORPS.

II. — PENDULE.

III. — BALANCE.

IV. — ATTRACTION UNIVERSELLE.

CHAPITRE III

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

I. — IMPÉNÉTRABILITÉ.

II. — ÉTENDUE. INSTRUMENTS DE MESURE.

1° VERNIER.

2° VIS MICROMÉTRIQUE.

3° LEVIER A RÉFLEXION.

III. — COMPRESSIBILITÉ. DIVISIBILITÉ. CONSTITUTION DE LA MATIÈRE.

LIVRE II

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES SOLIDES

CHAPITRE I

STRUCTURE

CHAPITRE II

ÉLASTICITÉ

I. — THÉORIE.

A. — ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

B. — FORCES ÉLASTIQUES RÉSULTANT DE LA DÉFORMATION.

C. — APPLICATION DES FORMULES A QUELQUES CAS SIMPLES.

II. — EXPÉRIENCES.

A. — TRACTION.

B. — TORSION.

C. — FLEXION.

D. — FROTTEMENT INTÉRIEUR.

CHAPITRE III

DÉFORMABILITÉ. SOLIDITÉ

I. — DÉFORMABILITÉ.

II. — SOLIDITÉ.

CHAPITRE IV

DIVISIBILITÉ

CHAPITRE V

ADHÉRENCE. FROTTEMENT

I. — ADHÉRENCE.

II. — FROTTEMENT.

A. — FROTTEMENT DE GLISSEMENT.

B. — FROTTEMENT DE ROULEMENT.

C. — FREINS DYNAMOMÉTRIQUES.

CHAPITRE VI

CHOC DES CORPS

LIVRE III

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES LIQUIDES

CHAPITRE I

COMPRESSIBILITÉ

CHAPITRE II

HYDROSTATIQUE

I. — PRINCIPE DE PASCAL.

II. — PRINCIPE D'ARCHIMÈDE.

III. — POIDS SPÉCIFIQUES.

CHAPITRE III

CAPILLARITÉ

I — THÉORIE GÉNÉRALE.

II. — ÉQUILIBRE D'UNE MASSE LIQUIDE SOUS LA SEULE ACTION DES FORCES MOLÉCULAIRES.

III. — PHÉNOMÈNES PRODUITS AU CONTACT DES SOLIDES PAR LES LIQUIDES QUI LES MOUILLENT.

1° TUBES CAPILLAIRES.

2° LAMES PARALLÈLES.

3° PHÉNOMÈNES DIVERS.

IV. — PHÉNOMÈNES OFFERTS PAR UN LIQUIDE AU CONTACT D'UN SOLIDE QU'IL NE MOUILLE PAS OU D'UN AUTRE LIQUIDE.

A. — LIQUIDE EN CONTACT AVEC UN SOLIDE QU'IL NE MOUILLE PAS.

B. — LIQUIDE AU CONTACT D'UN AUTRE LIQUIDE.

V. — MOUVEMENTS DUS AUX ACTIONS CAPILLAIRES.

CHAPITRE IV

DIFFUSION

I. — DIFFUSION SIMPLE.

II. — DIFFUSION A TRAVERS UN SEPTUM OU OSMOSE.

CHAPITRE V

ÉCOULEMENT DES LIQUIDES

I — ÉCOULEMENT PAR UN ORIFICE EN MINCE PAROI.

CHAPITRE VI

FROTTEMENT INTÉRIEUR

LIVRE IV

PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES GAZ

CHAPITRE I

ÉQUILIBRE DES GAZ

I. — BAROMÈTRE.

à la latitude de 45° et au niveau de la mer. — Baromètre à gravité...... 772

II. — PRINCIPE D'ARCHIMÈDE.

CHAPITRE II

ÉLASTICITÉ

I. — LOI DE MARIOTTE.

II. — MANOMÈTRES ET VOLUMÉNOMÈTRES.

III. — MÉLANGE DES GAZ.

IV. — ABSORPTION DES GAZ.

V. — MACHINES A RARÉFIER ET A COMPRIMER LES GAZ.

VI. — APPAREILS DIVERS SERVANT A L'ÉCOULEMENT DES LIQUIDES.

CHAPITRE III

DIFFUSION

I — DIFFUSION SANS DIAPHRAGME.

II. — DIFFUSION AVEC DIAPHRAGME.

A. — EFFUSION.

B. — TRANSPIRATION.

C. — DIFFUSION.

D. — PÉNÉTRATION.

CHAPITRE IV

FROTTEMENT INTÉRIEUR

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

4814-82. — Corbeil. Typ. et stér. Crété.